REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

P. THIONET

Note sur un point de technique statistique appliquée à l'industrie

Revue de statistique appliquée, tome 12, nº 1 (1964), p. 75-84
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_1_75_0>

NOTE SUR UN POINT DE TECHNIQUE STATISTIQUE APPLIQUÉE A L'INDUSTRIE

P. THIONET
Professeur sans chaire. Faculté des Sciences de Poitiers

La présente Note concerne la technique de décision sur échantillon utilisée sous le nom de "carte de contrôle" dans l'industrie (contrôle statistique des fabrications en série).

La technique classique étant jugée à certains égards insuffisante, on se propose d'exposer et de compléter une méthode due à E.S. PAGE (1) tendant à son amélioration.

1. LA TECHNIQUE CLASSIQUE

La conception du contrôle de qualité est voisine de celle du jugement (test) sur échantillons. Une production étant fragmentée par lots, chaque lot étant représenté par son échantillon, on décide finalement (sur échantillon) si le lot est ou non acceptable.

Ici, la décision est un peu différente :

laisser la machine tourner - ou bien arrêter la machine.

Souvent, le jugement est porté au vu de la proportion de pièces défectueuses dans l'échantillon ("jugement par tout ou rien"). Ici on envisage au contraire une variable X, prenant des valeurs x_1, x_2, ..., x_n sur les N pièces-échantillon :

$\bar{x}$ est la moyenne des x_i échantillons.

Les x sont supposés distribués suivant une loi de Gauss d'écart-type constant. Des informations antérieures, on ne retient que la valeur à donner à σ.

La moyenne de la loi de Gauss pour un réglage donné de la machine est désignée par m.

Si la machine est bien réglée, on a : $m = \mu$
Si la machine se dérègle, on a : $m \neq \mu$ (σ reste constant).

On considère ici comme fâcheux que la nouvelle moyenne m augmente trop ; en revanche on ne fera aucune objection à ce qu'elle diminue (sinon c'est un second problème, traité également par Page.).

----

(1) E.S. PAGE : Control charts for the mean of a normal population. Journal of the Royal Statistical Society B, 1954, 1, p. 131/35. PAGE joint ses critiques à celles de WEILER (A.M.S. 1952, p. 247/54)

Bien entendu, on ne connaît pas m mais $\bar{x}$, qui est aussi une variable de Gauss de moyenne m mais d'écart-type $\sigma/\sqrt{N}$. En pratique on ne prélève à chaque réglage qu'un petit échantillon, disons de N = 10 pièces échantillon.

Désignant alors par B une constante souvent choisie égale à 3,09, la décision que l'on prend est du type suivant :

$\bar{x} > \mu + B\,\sigma/\sqrt{N} \Longrightarrow$ arrêtez la machine (et faites un réglage)

$\bar{x} < \mu + B\,\sigma/\sqrt{N} \Longrightarrow$ continuez à produire.

2. CRITIQUE DE CETTE TECHNIQUE

Après WEILER, PAGE observe que le choix de B = 3,09 et de N = 10 (ou autre routine) est une règle empirique, éloignée de tout optimum. Au contraire, le choix de B et N (autrement dit de $B/\sqrt{N}$ et N) devrait tenir compte des considérations extrastatistiques - disons :

de considérations d'ordre économique et industriel

Appelons production mauvaise une production telle que :

$$m = \mu + k\,\sigma$$

k étant choisi d'après l'opinion des ingénieurs et variant avec le cas concret étudié.

Pour certaines productions, il est intolérable que l'erreur de réglage $(m - \mu)$ atteigne $(0,2)\,\sigma$, alors que d'autres fois, la tolérance peut atteindre σ voire $2\,\sigma$. C'est un problème de technique industrielle, et aussi un problème de coût : procède-t-on au réusinage ou, au contraire à la mise au rebut des pièces gâchées ?

Il existe actuellement plusieurs corps de doctrine qui tendent à incorporer à la technique statistique des concepts de nature économique (des utilités, des pertes) et psychologique (probabilités a priori).

Si PAGE était Bayesien, il considèrerait la moyenne m de la machine déréglée comme une seconde variable aléatoire (x étant la première) ; il ferait intervenir la probabilité a priori que le déréglage $m - \mu$ dépasse tel ou tel seuil. Apparemment, PAGE évite de s'engager dans cette voie qui n'est praticable que si l'on a déjà beaucoup de renseignements sur le comportement de la machine à contrôler (hypothèse peu réaliste pour un consultant).

PAGE semble plutôt disciple de NEYMAN et PEARSON, et s'inspire de leur théorie des deux risques :

α = le risque de refuser une production, un lot, qui, en fait est acceptable.

β = le risque d'accepter une production, un lot, qui, en fait est détestable.

$1 - \beta$ est appelé "puissance du test", puissance du procédé de décision.

soit

$$\Phi(u) = \int_u^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - F(u)$$

le complément à l'unité de la fonction de répartition d'une variable de Gauss.

Ces deux risques sont, dans le cas présent :

α = Probabilité d'arrêter la machine bien réglée

β = Probabilité de ne pas arrêter la machine déréglée.

Bien entendu, β dépend de k.

Calcul de α et β

Calcul de α : La machine étant supposée bien réglée, et par conséquent, $m = \mu$, on a :

$$\alpha = \text{Prob } (\bar{x} > \mu + B\ \sigma/\sqrt{n})$$

$$= \text{Prob } \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > B\right)$$

$$= \Phi(B)$$

Calcul de β : La machine étant supposée mal réglée, si bien que

$$m = \mu + k\sigma,$$

on a :

$$\bar{x} = \mu + k\ \sigma - \frac{\lambda\ \sigma}{\sqrt{N}} \qquad (\lambda > 0)$$

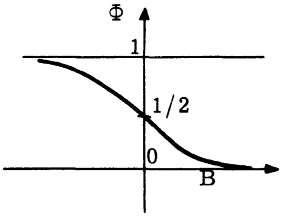
Il vient :

$$\beta = \text{Prob.} \left[\bar{x} < \mu + \frac{B\ \sigma}{\sqrt{N}} \right] = \text{Prob.} \left[k - \frac{\lambda}{\sqrt{N}} < \frac{B}{\sqrt{N}} \right]$$

$$= \text{Prob. } [\lambda > k\sqrt{N} - B]$$

$$= \Phi\ [k\sqrt{N} - B]$$

$$= 1 - \Phi\ [B - k\sqrt{N}]$$



$\Phi(B - k\sqrt{N})$ est la "puissance du test".

Remarque : Dans les applications de la théorie de Neyman et Pearson, une difficulté fréquente est que la nature ne présente pas seulement 2 états entre lesquels on doit choisir. Dans le cas présent, on raisonne comme si m était égal soit à μ soit à $\mu + k\sigma$, alors que m en fait est quelconque. Il faut admettre qu'on part de la situation $m = \mu$ (réglage parfait) et que le déréglage se produit petit à petit ; de façon que, si m atteint et dépasse $\mu + k\ \sigma$ on ait le temps de s'en apercevoir.

Optimum au sens de NEYMAN et PEARSON

S'inspirant trop strictement de NEYMAN et PEARSON, on songera d'abord : soit à rendre $(\alpha + \beta)$ minimum,

soit à rendre β minimum - donc $1 - \beta$ maximum - pour α donné.

On s'aperçoit vite que ces critères conduisent à des absurdités :

Cherchons à avoir $(\alpha + \beta)$ minimum $\Longrightarrow 1 + \Phi(B) - \Phi(B - k\sqrt{N})$ minimum

- Supposons k et N donnés, donc $k\sqrt{N}$ fixé :

Ce minimum suppose B infini.

- Si k et B sont donnés, le minimum correspond à N infini.

De même si on suppose $\Phi(B)$ donné, le minimum de $1 - \Phi(B - k\sqrt{N})$ correspond à N infini.

Ceci tient à ce que α et β sont eux-mêmes sans grande signification.

Optimum au sens de PAGE

Le grand mérite de PAGE est d'avoir vu que les risques par unité d'échantillon

$$\frac{\alpha}{N} = \frac{\Phi(B)}{N} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \beta}{N} = \frac{\Phi(B - k\sqrt{N})}{N}$$

avaient au contraire une signification très claire :

Il résulte de la règle de décision adoptée que Φ est, pour chaque échantillon contrôlé, la probabilité d'arrêter la machine ; donc Φ est en moyenne la proportion des échantillons dont le contrôle entraîne l'arrêt de la machine. Alors $1/\Phi$ est le nombre moyen d'échantillons contrôlés entre 2 arrêts de machine.

Ainsi N/Φ est le nombre moyen de pièces contrôlées entre 2 arrêts de machine. Posons $N/\Phi(u) = L(u)$

$$L_o = N/\Phi(B) = L(B) = L(B)$$

est le nombre moyen de pièces contrôlées (entre deux stop) quand la machine est bien réglée.

$$L_1 = N/\Phi(B - k \quad N) = L(B - k\sqrt{N})$$

est ce que devient ce nombre moyen lorsque la machine est franchement déréglée, c'est-à-dire quand on a : $m = \mu + k\sigma$

Alors les conditions d'optimum posées par PAGE sont, pour choisir N et B : (si $k > 0$ est donné)

Indifféremment :

Condition P : $\min L(B - k\sqrt{N})$, lié par $L(B) =$ Constante

Condition P' : $\max L(B)$, lié par $L(B - k\sqrt{N}) =$ Constante

Autrement dit :

$$(P) : \min L_1 \quad \text{lié par } L_0 \text{ constant}$$

$$(P') : \max L_0 \quad \text{lié par } L_1 \text{ constant}$$

Interprétation physique

Condition P : pour L_0 donné, il est du plus haut intérêt que L_1 soit minimum ; c'est-à-dire qu'on laisse passer le moins possible d'échantillons avant de s'apercevoir que la machine est déréglée.

Condition P' : L_0 maximum signifie qu'on arrête le moins souvent possible la machine, lorsqu'elle est bien réglée ; en effet les arrêts pour réglage entraînent alors une perte qu'on a intérêt à réduire.

Autrement dit : raisonner pour une valeur donnée de m équivaut à supposer invariable le nombre C de pièces contrôlées à l'heure, lorsque la machine fonctionne. Bien entendu si la machine est bien réglée, on souhaite que C soit petit et si elle est mal réglée, on souhaite C très grand.

Calcul de l'optimum

PAGE a publié les résultats numériques de ses calculs effectués avec une machine électronique. Nous allons au contraire leur donner très simplement une forme analytique.

On peut récrire les conditions d'optimum comme suit :

$$(P) : \max \frac{1}{N} \Phi (B - k \sqrt{N}) \qquad \text{lié par } \frac{1}{N} \Phi (B) = C_1$$

$$(P') : \min \frac{1}{N} \Phi (B) \qquad \text{lié par } \frac{1}{N} \Phi (B - k \sqrt{N}) = C_2$$

Dans l'un et l'autre cas, avec :

$$\Phi' (X) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = -F' (X)$$

Extrémum lié signifie proportionnalité des dérivées partielles par rapport à B et N.

$$\Longrightarrow \frac{\frac{1}{N} \Phi' (B - k \sqrt{N})}{\frac{1}{N} \Phi' (B)} = \frac{-\frac{1}{N} \Phi (B - k \sqrt{N}) + \frac{1}{N} \Phi' (B - k \sqrt{N}) (\frac{-k}{2\sqrt{N}})}{-\frac{1}{N^2} \Phi (B)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Phi' (B - k \sqrt{N})}{\Phi (B)} = \frac{\Phi (B - k \sqrt{N})}{\Phi (B)} + \frac{k \sqrt{N}}{2} \frac{\Phi' (B - k \sqrt{N})}{\Phi (B)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Phi (B)}{\Phi' (B)} - \frac{\Phi (B - k \sqrt{N})}{\Phi' (B - k \sqrt{N})} = \frac{k \sqrt{N}}{2}$$

Posant Ψ (X) = - Φ (X) / Φ' (X) = + [1 - F (X)] / F' (X)

$$\Longrightarrow \quad \Psi (B) = \Psi (B - k \sqrt{N}) = - \frac{1}{2} k \sqrt{N}$$

ou :

$$\boxed{\Psi (B) - \Psi (B - h) = - \frac{1}{2} h}$$

avec :

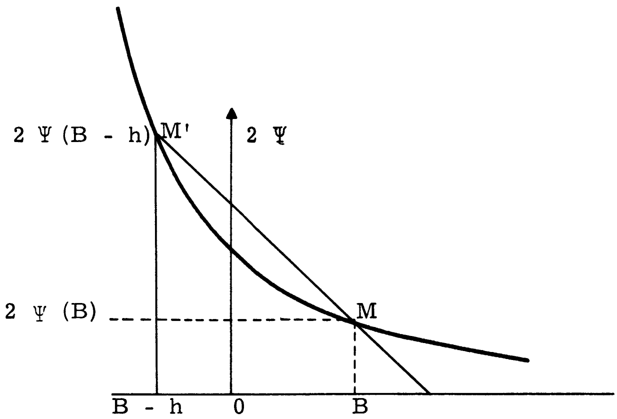
$$h = k \sqrt{N} > 0$$

Nous avons construit par point (sur papier millimétrique) la courbe Y = Ψ (X) à l'aide des tables de F (X) et de F' (X), c'est-à-dire des tables donnant l'intégrale de GAUSS et l'ordonnée de la courbe en cloche de GAUSS [Cf. Table 1].

Table I : Valeurs de la fonction Y = Ψ (X)

$\bar{X}$	Y	X	Y	X	Y
- 2,0	18,0962	0	1,2534	2,0	0,4222
- 1,9	14,8064	0,1	1,1591	2,1	0,4068
- 1,8	12,2037	0,2	1,0759	2,2	0,3915
- 1,7	10,1530	0,3	1,0018	2,3	0,3780
- 1,6	8,5229	0,4	0,9356	2,4	0,3660
- 1,5	7,2061	0,5	0,8761	2,5	0,3542
- 1,4	6,0935	0,6	0,8232	2,6	0,3455
- 1,3	5,2695	0,7	0,7748	2,7	0,3365
- 1,2	4,5566	0,8	0,7314	2,8	0,3291
- 1,1	3,9664	0,9	0,6557	2,9	0,3166
- 1,0	3,4764	1,0	0,6227	3,0	0,3068
- 0,9	3,0661	1,1	0,5227	3,1	0,292
- 0,8	2,7204	1,2	0,5926	3,2	0,284
- 0,7	2,4271	1,3	0,5647	3,3	0,276
- 0,6	2,1779	1,4	0,5397	3,4	0,269
- 0,5	1,9639	1,5	0,5158	3,5	0,262
- 0,4	1,7795	1,6	0,4941	3,6	0,255
- 0,3	1,6200	1,7	0,4739	3,7	0,248
- 0,2	1,4815	1,8	0,4544	3,8	0,243
- 0,1	1,3596	1,9	0,4375	3,9	0,237
- 0	1,2534	2,0	0,4222	4,0	0,231

Nous avons porté X en abcisse et 2 Y en ordonnée (c'est-à-dire Y avec une échelle double). Soit h l'écart entre les abcisses de 2 points de la courbe.



La formule $$2\,\Psi\,(B) - 2\,\Psi\,(B - h) = - h$$

établit une correspondance entre les points de la courbe d'abcisses (B, B - h) de façon que la corde joignant ces points M et M' soit inclinée à 45°.

Nous avons vérifié cette propriété sur les données numériques des tableaux de PAGE, donnant pour diverses valeurs de k et L (B) les valeurs "optimales" de N et L $(B - k\sqrt{N})$. On observe quelques désaccords lorsque $h = k\sqrt{N}$ assez grand.

Or le tracé de la courbe 2 Ψ (B) permet une détermination graphique de h (B) si h n'est pas trop petit (de façon que la corde à 45° et la courbe se coupent franchement). De toute façon les tables de F (X), F' (X) et Ψ (X) sont plus précises que le dessin.

Notre procédé de calcul paraît donc plus précis que l'original (et en tout cas il est très pratique). Il reste en revanche très grossier si h est petit, c'est-à-dire B voisin de la racine de l'équation :

$$h = 0 \Longrightarrow \Psi\,(B) = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow (1 - F)\, f'/f^2 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{B \# 0,6}$$

Résultat essentiel

A toute valeur de B correspond (quels que soient α, β) une valeur optimale pour $h = k\sqrt{N}$

Suivant le choix fait pour k (c'est-à-dire suivant les exigences des ingénieurs) il en résulte une valeur optimale :

$$N\,(k)$$

La lecture du graphique permet de trouver par exemple, pour :

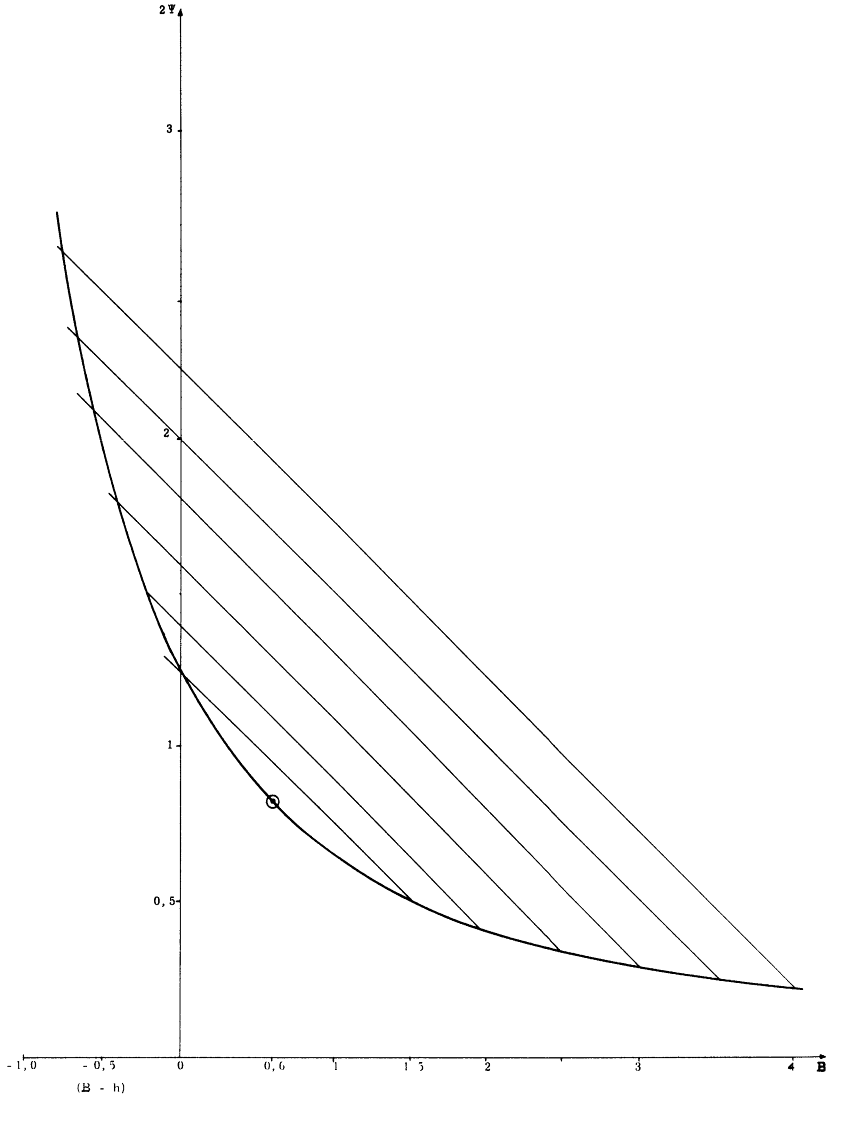
$$B = 3,09$$

sur la même parallèle à 45° le point B - h = - 0,58
d'où :

$$h = 3,67$$

A N = 10 correspond alors k optimal = $3,67/\sqrt{10}$
c'est-à-dire :

$$k_0 = 1,16$$



La lecture du graphique nous donne d'ailleurs les résultats suivants :

B	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
h opt	1,52	2,23	2,92	3,56	4,16	4,76

Remarque 1 : S'il est au fond normal qu'on abandonne une routine et qu'on repense le problème, on pouvait pourtant être tenté de choisir a priori B et N de façon à avoir :

$$\frac{B}{\sqrt{N}} = k$$

donc :

$$B - k\sqrt{N} = 0$$

donc :

$$\Phi\,(B - k\sqrt{N}) = 0,5000$$

La méthode de PAGE conduit en fait (Cf. ci-dessus) à :

$$h_{opt} > B \Longrightarrow \text{optimum}\ \frac{B}{\sqrt{N}} < k, \qquad \text{opt}\ (B - k\sqrt{N}) < 0$$

et d'autant plus que B lui-même est plus grand (en raison de la forme de la fonction Ψ).

Remarque 2 : Lorsqu'on a des raisons de choisir k petit, les valeurs optimales :

$$B - h = B - k\sqrt{n} \qquad > 0$$

se rencontrent également. A partir d'un tableau de PAGE, on tire facilement le tableau suivant :

Valeurs optimales de $\Phi(B - k\sqrt{N}) = N/L_1$

L_1 =	10	20	50	100
k = 0,2	0,30	0,35	0,42	0,49
0,3	0,40	0,40	0,50	0,61
0,5	0,40	0,50	0,66	0,76
0,7	0,50	0,60	0,76	0,84
0,8	0,60	0,65	0,80	0,86

Valeurs de $N = \Phi\ L_1$

10	20	50
3	7	21
4	8	25
4	10	
5		

Chaque fois que $\Phi\ (B - k\sqrt{N})$ est inférieur à 0,50, c'est que $B - k\sqrt{N}$ est positif. Bien entendu N reste alors relativement faible.

Remarque 3 : Comme on passe de Φ à $N/\Phi = L$ par une simple division, on n'a pas jugé utile de donner ici d'autres tableaux en fonction de L_0 et L_1 (ni d'ailleurs de reproduire la fonction Φ (B) complément à 1 de la fonction intégrale de GAUSS qu'on trouve partout). A ce sujet, l'article de PAGE renferme de nombreux tableaux numériques auxquels on pourra se reporter éventuellement.

Remarque 4 : On peut objecter que si L_1 est minimum, pour un écart $m - \mu = k\ \sigma$ ce ne peut être aussi le cas pour $m - \mu > k\ \sigma$, par exemple :

$$m = \mu = 2\ k\ \sigma$$

alors que c'est un dérèglement beaucoup plus grave que $m - \mu = k\ \sigma$.

Le choix de L_1 minimum peut-il entraîner qu'on s'aperçoive plus difficilement d'un écart $2\ k\ \sigma$ que d'un écart $k\ \sigma$?

Ce n'est heureusement pas le cas ; car de toute façon on a $L = N/\Phi$; donc :

$$L\ (B) > \Phi\ (B - k\ \sqrt{N}) > \Phi\ (B - 2\ k\ \sqrt{N})$$

En outre on peut admettre que le déréglage est progressif et qu'on s'apercevra assez vite que $m - \mu$ atteint (et dépasse) $k\ \sigma$.

Enfin, qui dit : écarts plus grands, dit aussi : écarts moins vraisemblables sans aller jusqu'à attribuer une loi de probabilité à $m - \mu$.

Conclusion

La statistique mathématique s'est engagée depuis quelque temps dans des voies ambitieuses mais où aucune application pratique n'est pas possible sans se donner au préalable un nombre excessif de matériaux tels que : probabilités subjectives, fonctions de risque, etc...

Il nous a paru intéressant d'étudier et (nous l'espérons) de clarifier cette méthode de PAGE déjà assez ancienne qui ne fait appel qu'à un minimum d'éléments exogènes (le coefficient k de tolérance) et semble apporter néanmoins un progrès sensible au procédé classique de la carte de contrôle lorsqu'on contrôle le travail d'une machine susceptible de se dérégler gravement.