

PH. FORMERY

## **Intégration de la distribution normale à deux variables dans un domaine polygonal**

*Revue de statistique appliquée*, tome 11, n° 2 (1963), p. 39-88

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1963\\_\\_11\\_2\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1963__11_2_39_0)

© Société française de statistique, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INTÉGRATION DE LA DISTRIBUTION NORMALE A DEUX VARIABLES DANS UN DOMAINE POLYGONAL <sup>(1)</sup>

Ph. FORMERY

Ingénieur Civil des Mines au Bureau de Recherches Géologiques et Minières

On considère un couple  $(x,y)$  de variables aléatoires, centrées et normées à leur écart-type et représenté par le point figuratif  $M(x,y)$  obéissant à une loi de Gauss à deux variables :

$$d^2F = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)} dx dy$$

où  $Q$  représente la forme quadratique.

$$Q = \frac{x^2 - 2rxy + y^2}{1 - r^2}$$

qui peut s'exprimer au moyen des couples de variables aléatoires indépendantes :

$$x \text{ et } \eta = \frac{y - rx}{\sqrt{1-r^2}} \text{ qui représente la variable } y \text{ liée par } x$$

et :  $y \text{ et } \xi = \frac{x - ry}{\sqrt{1-r^2}} \text{ qui représente la variable } x \text{ liée par } y$

$$Q = x^2 + \eta^2 = y^2 + \xi^2$$

On se propose d'étudier l'intégrale  $F_\Delta$ , prise dans un domaine  $\Delta$ , limité par une courbe frontière  $(\Gamma)$ , intégrale qui mesure ce que l'on pourra appeler brièvement la "probabilité pour que  $M$  soit dans le domaine  $\Delta$ ". Plus particulièrement on s'efforcera de calculer cette intégrale dans le cas où  $(\Gamma)$  est un contour polygonal et pratiquement lorsque  $\Delta$  est un angle dont un côté est parallèle à l'axe de  $y$  et l'autre quelconque (et dans le cas plus général de l'angle formé par deux demi-droites quelconques). Pour effectuer ce calcul on introduira une fonction de deux variables  $R(z, \zeta)$  dont une table sommaire et une abaque sont jointes à la note.

Voici la démarche qui sera suivie : Après avoir envisagé sommairement le cas général où le domaine  $\Delta$  est quelconque, mis l'intégrale sous forme d'intégrale curviligne sur le contour  $(\Gamma)$ , et donné un procédé

-----

(1) Nous voudrions remercier spécialement de ses conseils Mademoiselle Ulmo, qui a bien voulu étudier et annoter en détail ce travail.

graphique d'évaluation, on donnera l'expression de l'intégrale curviligne sur un segment de droite, ce qui permettra ultérieurement de calculer l'intégrale dans un polygone  $\Delta$  où dans l'angle formé par deux demi-droites quelconques. Le calcul, ainsi mené, introduira une fonction  $R(z, \zeta)$  dont nous préciserons l'interprétation géométrique, quelques propriétés, et que nous représenterons par un développement en série de fonctions permettant le calcul pratique et l'établissement d'une table. Alors sera donnée l'expression de l'intégrale dans l'angle formé par deux demi-droites quelconques, ainsi que dans les cas particuliers d'un angle dont un côté est parallèle à  $oy$  et l'autre quelconque et d'un angle droit de côtés parallèles aux axes de coordonnées. On retrouvera, à ce propos, un procédé d'appréciation du coefficient de corrélation dans une loi de LAPLACE GAUSS (1). On s'attachera ensuite au calcul des moments d'ordre entier de la distribution :

$$M_i^j = \iint_{\Delta} x^i y^j \frac{e^{-\frac{1}{2} \varphi(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

dans un angle dont un côté est parallèle à  $oy$  et l'autre quelconque. On indiquera la possibilité théorique de calculer par dérivation tous les moments tels que :

- $i + j$  impair, exprimés au moyen des seules fonctions élémentaires,
- $i + j$  pair, introduisant les fonctions  $R$ .

et on donne des formules de récurrence pour le calcul des moments successifs, les expressions des moments du second ordre étant explicitées.

On a envisagé enfin quelques applications de la théorie, à la loi log-normale à deux variables et à un problème de statistique des gisements et, pour terminer la possibilité d'application à un test dû à M. Bastenaire.

Notons l'identité du calcul, dans un angle droit de côtés parallèles aux axes de coordonnées, d'une intégrale double de la forme :

$$\iint_{\Delta} x^i \frac{e^{-\frac{1}{2} \varphi(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy = \int_x^{\infty} x^i \frac{e^{-\frac{1}{2} x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx$$

( $G$  désigne l'intégrale de Gauss :  $G(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz$ ,  $i$  un entier  $\geq 0$ )

avec le calcul de l'intégrale simple de la forme :

$$\int_x^{\infty} x^i \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}} G(x) dx$$

ou de la forme :

-----

(1) On indique au paragraphe VI une façon géométrique d'obtenir les résultats, moins rigoureuse, mais plus brève et plus intuitive.

$$\int_y^{\infty} y^i \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} G(m + \sigma y) dy$$

que l'on rencontre parfois dans les applications.

En particulier, une intégration par parties fait ressortir la relation :

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) dx + \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} G(x) dx = G(x) G\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

d'où en posant :

$$r = -\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \quad \text{et} \quad y = -\frac{m}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) dx = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-ru}{\sqrt{1-r^2}}\right) du = F_{\Delta}$$

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} G(x) dx = G(x) G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) - F_{\Delta}$$

## I - PROBLEME GENERAL -

1/ On effectue sur l'intégrale double :

$$F_{\Delta} = \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

le changement classique de variables, qui restitue des variables aléatoires indépendantes :

$$\begin{cases} x = x \\ \eta = \frac{y - rx}{\sqrt{1-r^2}} \end{cases} \quad Q(x,y) = x^2 + \eta^2$$

on a :

$$F_{\Delta} = \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2 + \eta^2)}}{2\pi} dx d\eta$$

passant en coordonnées polaires dans le nouveau système de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ \eta = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad Q(x,y) = x^2 + \eta^2 = \rho^2$$

$$F_{\Delta} = \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2}}{2\pi} \rho d\rho d\varphi$$

et après intégration par rapport à  $\rho$ ,  $F_{\Delta}$  est transformée en une intégrale curviligne le long de la frontière ( $\Gamma$ ) :

$$F_{\Delta} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\varphi$$

que l'on peut écrire, en notant que :

$$\rho^2 d\varphi = x d\eta - \eta dx$$

et en revenant aux anciennes variables, après avoir remarqué que :

$$x d\eta - \eta dx = \frac{x dy - y dx}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{Q(x,y)} (y dx - x dy)$$

2/ Autres expressions de cette intégrale curviligne  $F_{\Delta} = -\int_{\Gamma^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2}}{2\pi} d\varphi$ .

On prend successivement pour couples de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ v = \frac{y - rx}{|x|\sqrt{1-r^2}} = \frac{\eta}{|x|} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \\ u = \frac{x - ry}{|y|\sqrt{1-r^2}} = \frac{\xi}{|y|} \end{array} \right.$$

On désigne par  $\varepsilon(x)$  la quantité +1 si  $x$  est positif et -1 si  $x$  est négatif. On remarque que l'angle polaire  $\varphi$  et le rayon vecteur  $\rho$  dans les coordonnées  $x$  et  $\eta$  sont liés à  $v$  par :

$$v = \varepsilon(x) \operatorname{tg} \varphi$$

$$d\varphi = \varepsilon(x) \frac{dv}{1+v^2}$$

$$\rho^2 = Q = x^2(1+v^2) = y^2(1+u^2)$$

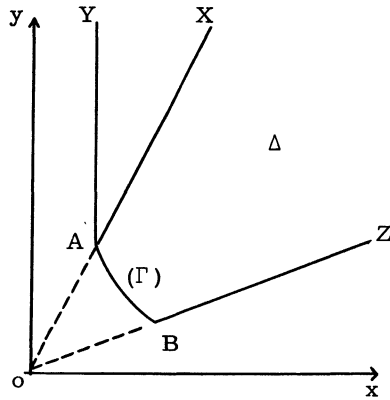
Moyennant quoi l'intégrale curviligne  $F_{\Delta} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\varphi$  devient :

$$F_{\Delta} = -\frac{\varepsilon(x)}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2(1+v^2)}}{1+v^2} dv = \frac{\varepsilon(y)}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2(1+u^2)}}{1+u^2} du$$

$x$  et  $v$  sont liés par une relation, que traduit la courbe  $(\Gamma)$ . L'intégrale curviligne est nulle sur une demi-droite passant par l'origine car  $v$  est constant le long de celle-ci - elle mesure l'intégrale prise dans un domaine  $\Delta$ , limité par l'arc de courbe  $(\Gamma)$ , et les rayons vecteurs OAX et OBZ passant par ses extrémités. En particulier :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{v_A}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_A^2(1+v^2)}}{1+v^2} dv$$

mesure l'intégrale prise dans le domaine YAX.



3/ Procédé graphique d'évaluation de l'intégrale - ainsi que des moyennes de x et de y - dans un domaine quelconque.

Si on effectue sur le contour  $(\Gamma)$  le changement de coordonnées :

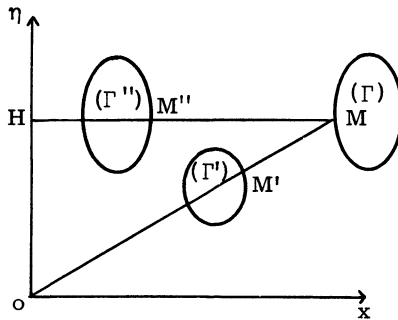
$$\begin{cases} x = x \\ y = rx + \eta\sqrt{1-r^2} \end{cases}$$

$Q = \rho^2$  est égal au carré du rayon vecteur OM du point M dans les nouvelles coordonnées x et  $\eta$  et l'intégrale prend la forme, avons-nous vu :

$$F_{\Delta} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\varphi$$

que l'on peut écrire :

$$F_{\Delta} = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{\overline{OM}^2}{4}} \right)^2 d\varphi = \frac{A'}{\pi}$$



Utilisant ici la propriété que l'aire limitée par une courbe fermée est :

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} xdy - ydx$$

on met en évidence l'aire  $A'$ , intérieure au contour  $(\Gamma')$  décrit par le point  $M'$  tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} e^{-\frac{OM^2}{4}}$$

On peut d'ailleurs évaluer la moyenne des  $x$  de façon analogue :

$$\iint_{\Delta} \frac{x e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{x e^{-\frac{1}{2}(x^2+\eta^2)}}{2\pi} dx d\eta$$

On peut intégrer par rapport à  $x$  :

$$\iint_{\Delta} \frac{x e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\eta = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} e^{-\frac{1}{2}OM^2} d\eta = \frac{A''}{2\pi}$$

L'aire  $A''$  apparaît ici, intérieure au contour ( $\Gamma''$ ) décrit par le point  $M''$ , de même ordonnée que  $M$  tel que :

$$\overline{HM''} = e^{-\frac{1}{2}OM^2} \quad (\text{toujours positif})$$

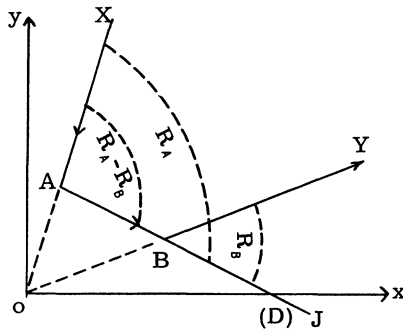
On aura noté que  $M'$  et  $M''$  décrivent leur trajectoire en sens contraire de  $M$ .

La moyenne des  $y$  :  $\iint_{\Delta} \frac{y e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$  pourrait s'évaluer, bien entendu, en faisant cette fois sur ( $\Gamma$ ) le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} y = y \\ x = ry + \xi \sqrt{1-r^2} \end{cases}$$

## II - CALCUL DE L'INTEGRALE CURVILIGNE $I_1 = \int_{\Gamma^+} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{Q(x,y)} (ydx - xdy)$ SUR UN CONTOUR POLYGONAL -

On suppose que le contour ne passe pas par l'origine qui apparaît comme un point singulier. On verra, à la fin de ce paragraphe, ce que l'on peut dire lorsqu'un côté du domaine  $\Delta$  passe par l'origine.



On note les sommets ABC... du polygone dans le sens direct pour un observateur placé à l'intérieur du contour et on se préoccupe de la valeur de l'intégrale  $I_L$  sur le segment orienté AB, soit  $I_{AB}$ .

$\Gamma_{AB}$  mesure l'intégrale de LAPLACE GAUSS dans le domaine défini par le segment AB et les demi-droites AX et BY issues de l'origine. On note que l'intégrale curviligne est nulle sur une demi-droite AX ou BY et à l'infini.

Le segment AB est porté par une droite (D) dont on peut écrire l'équation en résolvant par rapport à y :

$$y = mx + p$$

ou encore en résolvant par rapport à x :

$$x = ny + q$$

on dira alors l'équation prise sous forme inverse.

On écarte tout d'abord le cas où la droite passerait par l'origine, ce cas sera étudié à la fin du paragraphe. On a donc ici  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$ .

Lorsque le point courant décrit le segment de droite, l'élément différentiel de l'intégrale devient :

$$ydx - xdy = pdx = - qdy$$

$$I_{AB} = \frac{p}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_A^B \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x, mx+p)}}{Q(x, mx+p)} dx = - \frac{q}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_A^B \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(ny+q,y)}}{Q(ny+q,y)} dy$$

La mise sous forme canonique du trinôme  $Q(x, mx + p)$  suggère le changement de variable :

$$u = \frac{s^2x - (r-m)p}{|p|\sqrt{1-r^2}} \quad \text{avec} \quad s = \sqrt{m^2 - 2rm + 1}$$

s est une grandeur essentiellement positive, dont nous verrons plus loin le sens statistique (cf. § V) et on a :

$$Q = \frac{p^2}{s^2} (1 + u^2)$$

d'où,  $\varepsilon(p)$  désignant la quantité +1 si p est positif et -1 si p est négatif.

$$I_{AB} = \frac{p}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_A^B \frac{e^{-\frac{1}{2}Q}}{Q} dx = \frac{\varepsilon(p)}{2\pi} \int_{u_A}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{p^2}{s^2} (1+u^2)}}{1+u^2} du - \frac{\varepsilon(p)}{2\pi} \int_{u_B}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{p^2}{s^2} (1+u^2)}}{1+u^2} du$$

u peut s'exprimer de façon plus symétrique, en introduisant les coordonnées x et y du point courant de la droite (D) et les variables réduites  $\xi$  et  $\eta$  relatives à ses coordonnées - on remplace dans l'expression de  $u$   $s^2$  par  $m^2 - rm + 1$  et p par  $y - mx$  :

$$u = \frac{1}{|p|} \left( \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} + m \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \right) = \frac{\xi + m\eta}{|p|}$$



On pourrait alors prendre  $\frac{p}{s}$  et  $u$  comme paramètres, nous préférons prendre plutôt :

$$\begin{cases} a = \frac{p}{s} \\ \alpha = \frac{|p|}{s} u = \frac{s^2 x - (r-m)p}{s \sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{s} \left( \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} + m \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \right) = \frac{\xi + m\eta}{s} \end{cases}$$

on a d'ailleurs :

$$a^2 + \alpha^2 = Q(x,y)$$

Si le segment AB est parallèle à  $ox$  ( $m = 0$ ) :

$$\begin{cases} a = y \\ \alpha = \xi = \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \end{cases}$$

$I_{AB}$  apparaît comme la différence des valeurs d'une même fonction de deux variables  $z$  et  $\zeta$ ,  $R(z, \zeta)$  prise aux points A et B :

$$I_{AB} = \frac{\varepsilon(p)}{2\pi} \int_{\frac{a}{|a|_A}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} a^2 (1+u^2)}}{1+u^2} du - \frac{\varepsilon(p)}{2\pi} \int_{\frac{a}{|a|_B}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} a^2 (1+u^2)}}{1+u^2} du$$

$$I_{AB} = R(a, \alpha_A) - R(a, \alpha_B) = R(A) - R(B)$$

$$\text{avec } R(z, \zeta) = \frac{\varepsilon(z)}{2\pi} \int_{\frac{\zeta}{|z|}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Sur la figure précédente,  $R_A$  représente la mesure de l'intégrale de LAPLACE GAUSS dans le domaine XAJ, ce que l'on voit en faisant  $x_B$ , c'est-à-dire  $\alpha_B$  infinis par valeurs positives dans la formule précédente.  $R_B$  mesure l'intégrale de GAUSS dans le domaine YBJ.

Il peut être commode d'exprimer  $I_{AB}$  au moyen des paramètres de la droite (D) prise sous forme inverse :

$$x = ny + q$$

On a vu que :

$$I_{AB} = - \frac{q}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_A^B \frac{e^{-\frac{1}{2} Q(ny+q, y)}}{Q(ny+q, y)} dy$$

La forme quadratique  $Q(x,y)$  étant symétrique en  $x$  et  $y$ , on obtient l'expression de  $I_{AB}$  en permutant  $x$  et  $y$ , remplaçant  $m$  par  $n$  et  $p$  par  $q$ , et en changeant le signe de l'intégrale. Ceci s'explique par le fait, que permutant les coordonnées, on devrait changer le sens "direct" défini par l'angle premier axe, deuxième axe.

à "a" et "α" on substitue donc b et β tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{q}{\sigma} \\ \beta = \frac{\sigma^2 y - (r-n)q}{\sigma \sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} + n \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \right) = \frac{\eta + n\xi}{\sigma} \end{array} \right.$$

avec : 
$$\sigma = \sqrt{n^2 - 2rn + 1}$$

et : 
$$I_{AB} = -R(b, \beta_A) + R(b, \beta_B)$$

Les paramètres a et α, b et β sont des grandeurs associées à un couple (M, D) : point M(x, y), demi-droite D(m, p ou n, q) issue de ce point.

Pour un même couple (M, D) ε(m) désignant +1 si la pente est positive et -1, si la pente est négative, on a la relation :

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{b}{a} = \varepsilon(m)$$

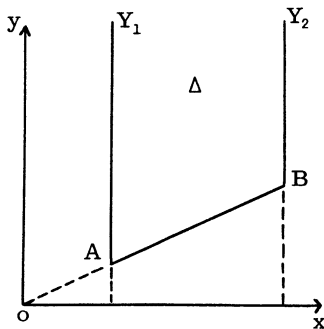
Si, par contre, on a deux demi-droites D<sub>1</sub> et D<sub>2</sub> issues du même point M(x, y), l'une D<sub>1</sub> prise sous forme directe y = mx + p et l'autre D<sub>2</sub> sous forme inverse x = ny + q, les paramètres a et α relatifs à (M, D<sub>1</sub>) et b et β relatifs (M, D<sub>2</sub>) sont liés par :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = Q(x, y) = Q(M)$$

En pratique, si l'on a affaire à un domaine angulaire de sommet M, on prendra l'un des côtés MD<sub>1</sub> sous forme directe et l'autre MD<sub>2</sub> sous forme inverse. On aura ainsi des formules parfaitement symétriques, et les côtés peuvent être rendus aisément parallèles aux axes de coordonnées en faisant m = 0 ou n = 0.

Cas où le support du segment AB passe par l'origine : p = 0.

L'intégrale curviligne I<sub>AB</sub> n'a pas de sens, non plus que l'intégrale de Gauss, dans le domaine défini par le segment AB et les rayons vecteurs AX et BY. La valeur de l'intégrale F<sub>Δ</sub> est par contre bien définie dans un domaine Δ, défini par le segment AB et les parallèles AY<sub>1</sub> et BY<sub>2</sub> à oy, domaine situé par rapport au segment AB du côté des y positifs.



$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \iint_{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} y > mx \\ \text{abscisse} > x \end{array} \right. e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{contour}} e^{-\frac{1}{2}x^2} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx$$

Mais le long du segment AB :  $y = mx$

$$F_{\Delta} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}}x\right) dx$$

soit en posant :  $\frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} = t$

$$F_{\Delta} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tx) dx = \int_{x_A}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tx) dx - \int_{x_B}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tx) dx$$

Une intégrale du type  $\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tx) dx$  est étudiée en détail au paragraphe suivant. Elle est égale à  $R(x, tx)$  si  $x$  est positif,

à  $\frac{1}{2} + R(x, tx)$  si  $x$  est négatif,

à  $\frac{1}{2\pi} \text{Arc cotg } t$  si  $x$  est nul.

On a donc si  $x_A$  et  $x_B$  sont de même signe :

$$F_{\Delta} = R\left(x_A, \frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} x_A\right) - R\left(x_B, \frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} x_B\right)$$

et comme :  $mx_A = y_A$        $mx_B = y_B$

$$F_{\Delta} = R\left(x_A, \frac{y_A - rx_A}{\sqrt{1-r^2}}\right) - R\left(x_B, \frac{y_B - rx_B}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

si  $x_A$  et  $x_B$  sont de signe contraire ( $x_A < 0 < x_B$ )

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} + R\left(x_A, \frac{y_A - rx_A}{\sqrt{1-r^2}}\right) - R\left(x_B, \frac{y_B - rx_B}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

En particulier la valeur de l'intégrale dans un angle de sommet  $M(x, y)$  dont un côté est parallèle à  $oy$  et l'autre passe par l'origine est :

$$\text{si } x > 0 \qquad R\left(x, \frac{y - rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

$$\text{si } x < 0 \qquad \frac{1}{2} + R\left(x, \frac{y - rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

$$\text{si } x = 0 \qquad \frac{1}{2\pi} \text{Arc cotg } \frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}}$$

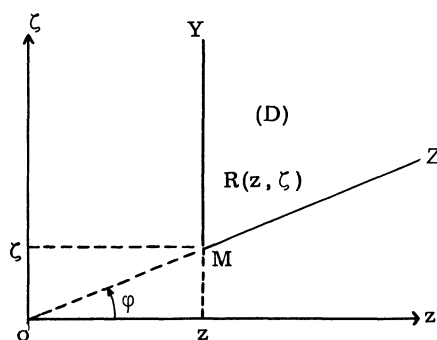
### III - INTERPRETATION GEOMETRIQUE - PROPRIETES - DIFFERENTIELLE ET DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION $R(z, \zeta)$ -

La fonction  $R(z, \zeta)$  est définie par :

$$R(z, \zeta) = \frac{\varepsilon(z)}{2\pi} \int_{\frac{\zeta}{|z|}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

La fonction est discontinue pour  $z = 0$ , lorsque  $\zeta$  est négatif. Elle n'est pas définie pour  $z = \zeta = 0$ .

Il sera souvent commode de prendre pour variable auxiliaire le rapport  $t = \frac{\zeta}{|z|}$ . Etant entendu que  $R(z, \zeta)$  a le signe de  $z$ , on supposera  $z$  positif dans tout ce paragraphe.



1 - La fonction  $R(z, \zeta)$  n'est autre que la mesure de l'intégrale canonique de Gauss dans le domaine défini par l'abscisse  $z$  et le rayon vecteur  $OZ$  passant par  $M(z, \zeta)$ , d'angle polaire  $\varphi = \text{Arctg} \frac{\zeta}{|z|} = \text{Arctgt}$ . Domaine en "haut" du rayon vecteur  $OZ$  et à "droite" de l'abscisse  $z$ .

On a en effet avec des notations évidentes :

$$\iint_{(D)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(z^2 + \zeta^2)}}{2\pi} dz d\zeta = \iint_{(D)} \frac{e^{-\frac{1}{2} \rho^2}}{2\pi} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{contour de } (D)} e^{-\frac{1}{2} \rho^2} d\varphi$$

après intégration faite par rapport à  $\rho$ . D'où, en notant que l'intégrale est nulle sur  $MZ$  ( $\varphi = \text{Cste}$ ) et que sur  $MY$  :  $\rho \cos \rho = z$  et  $\varphi > \varphi_0$ .

$$\int_{(D)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(z^2 + \zeta^2)}}{2\pi} dz d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi} e^{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

De l'identité de  $R(z, \zeta)$  avec  $\iint_{(D)} \frac{e^{-\frac{1}{2}(z^2 + \zeta^2)}}{2\pi} dz d\zeta$ , on déduit, en écrivant d'une autre manière l'intégrale double :

$$R(z, \zeta) = \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz \quad \text{avec} \quad t = \frac{\zeta}{|z|}$$

2 - Seconde expression de la fonction R(z, ζ).

Si on dérive R, considéré comme fonction de z et de t, par rapport à z :

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)} z dt = -\frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz)$$

D'où, lorsque z est positif :

$$R(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz$$

on retrouve l'expression issue de l'interprétation géométrique.

En particulier, si  $\frac{\zeta}{|z|}$  tend vers moins l'infini  $t = -\infty$   $G(-\infty) = 1$

et  $R(z, -\infty) = G(z)$

si  $\zeta = 0$   $t = 0$   $G(0) = \frac{1}{2}$

et  $R(z, 0) = \frac{1}{2} G(z)$

$R(z, \zeta)$  s'annule lorsque le rapport  $\frac{\zeta}{|z|}$  tend vers  $+\infty$ .

Enfin si  $\zeta = z$  :  $R(z, z) = \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(z) dz = \frac{1}{2} G^2(z)$ .

Arrêtons nous un instant aux deux transformations suivantes :

Changement de ζ en -ζ t se change en -t et :

$$R(z, -\zeta) = \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(-tz) dz$$

or :  $G(-tz) = 1 - G(tz)$

et :  $R(z, -\zeta) = G(z) - R(z, \zeta)$

soit :  $R(z, \zeta) + R(z, -\zeta) = G(z)$

Permutation de z et de ζ - z est supposé positif et on considère tout d'abord le cas  $\zeta > 0$ . t est la variable auxiliaire  $t = \frac{\zeta}{|z|}$ . Si on intègre par parties l'expression de R(z, ζ) :

$$R(z, \zeta) = \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2} u^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tu) du,$$

on obtient :

$$R(z, \zeta) = G(z) G(tz) - \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2} t^2 u^2}}{\sqrt{2\pi}} G(u) t du$$

soit par le changement de variable :  $v = tu$

$$R(z, \zeta) = G(z) G(tz) - \int_{tz}^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2} v^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{v}{t}\right) dv = G(z) G(\zeta) - \int_\zeta^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2} v^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{z}{\zeta} v\right) dv$$

La dernière intégrale n'est autre que l'expression de  $R(\zeta, z)$ , d'où finalement :

$$\text{si } \zeta > 0 \quad \underline{R(z, \zeta) + R(\zeta, z) = G(z) G(\zeta)}$$

$$\text{En particulier, } R(z, z) = \frac{1}{2} G^2(z).$$

Lorsque  $\zeta$  est négatif, la relation de permutation appliquée à  $-\zeta$  :

$$R(z, -\zeta) + R(-\zeta, z) = G(z) G(-\zeta)$$

donne immédiatement, en tenant compte de la convention de signe sur  $R(z, \zeta)$  et de la relation de changement de  $\zeta$  en  $-\zeta$  :

$$G(z) - R(z, \zeta) - R(\zeta, z) = G(z) [1 - G(\zeta)]$$

$$R(z, \zeta) + R(\zeta, z) = G(z) G(\zeta)$$

La relation de permutation établie pour  $\zeta$  positif vaut pour  $\zeta$  quelconque.

Les deux transformations précédentes (changement de  $\zeta$  en  $-\zeta$ , permutation de  $z$  et de  $\zeta$ ) découlent immédiatement de l'interprétation géométrique de la fonction  $R(z, \zeta)$ . En particulier, la somme algébrique  $R(z, \zeta) + R(\zeta, z)$  mesure la probabilité pour que les variables indépendantes  $z'$  et  $\zeta'$  soient respectivement supérieures à  $z$  et  $\zeta$ , c'est-à-dire  $G(z) G(\zeta)$ .

Les transformations permettent de ramener le calcul de la fonction  $R$ , au cas  $\zeta > 0$  puis  $\zeta < z$  c'est-à-dire au cas  $0 < t < 1$ .

Revenons un instant sur l'intégrale :

$$\int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz$$

et ses rapports avec la fonction  $R(z, \zeta)$  avec  $\zeta = z t$  lorsque  $z$  est quelconque.

Si on effectue sur l'intégrale le changement de variable :

$$u = -z$$

$$\int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz = - \int_{-z}^{-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} G(-tu) du$$

or :

$$G(-tu) = 1 - G(tu)$$

d'où :

$$\int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz + \int_{-\infty}^{-z} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tu) du = \int_{-\infty}^{-z} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} du = 1 - G(-z) = G(z)$$

En faisant  $z = -\infty$ , on voit que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz = \frac{1}{2}$

On en déduit :

$$\int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz = G(z) - \frac{1}{2} + \int_{-z}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz$$

On a vu que si  $z$  était positif,

$$\underline{z > 0} \quad \int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz = \frac{1}{2\pi} \int_t^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = R(z, tz)$$

La relation que nous venons d'établir permet de conclure quand  $z$  est négatif :

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz &= G(z) - \frac{1}{2} + R(-z, -tz) \\ &= G(z) - \frac{1}{2} + G(-z) - R(-z, tz) \end{aligned}$$

$$\underline{z < 0} \quad \int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dz = \frac{1}{2} + R(z, tz)$$

Cette expression double, selon le signe de  $z$ , est due à la discontinuité de la fonction  $R$  pour  $z = 0$ .

D'autre part, si l'on fait tendre  $z$  vers 0 par valeurs positives,  $R(z, tz)$ ,  $z$  vers 0 par valeurs négatives,  $\frac{1}{2} + R(z, tz)$  tendent vers  $\frac{1}{2\pi}$  Arc cotgt, et d'après les relations qui précèdent :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dt = \frac{1}{2\pi} \text{Arc cotg } t$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} G(tz) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \text{Arc cotg } t = \frac{1}{2\pi} [\pi - \text{Arc cotg } t]$$

L'interprétation géométrique de ces deux égalités est d'ailleurs évidente.

### 3 - Différentielle de la fonction $R(z, \zeta)$ .

En différenciant l'intégrale  $R(z, \zeta) = \frac{\varepsilon(z)}{2\pi} \int_{\frac{\zeta}{|z|}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$  on obtient immédiatement :

$$dR = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\zeta dz - z d\zeta}{z^2 + \zeta^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{\sqrt{2\pi}} - G(\zeta) dz \right]$$

La différentielle de la fonction  $R$  s'exprime donc exclusivement au moyen de fonctions élémentaires.

### 4 - Développement de la fonction $R(z, \zeta)$ en série de fonctions eulériennes incomplètes.

Nous utiliserons la variable auxiliaire  $t = \frac{\zeta}{|z|}$

On désigne par fonctions eulériennes incomplètes des fonctions de la forme :

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^u e^{-u} u^{n-1} du$$

de telles fonctions ont été tabulées par Pearson au moyen des variables  $u = \frac{1}{2} z^2$  et  $v = 2n$ . Ainsi :

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\frac{1}{2} z^2} e^{-u} u^{n-1} du \quad \text{est désignée par } P(z^2, 2n)$$

en particulier :

$$G(z) = \frac{1}{2} - \int_0^z \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P(z^2, 1)$$

$$\begin{aligned} R(z, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\zeta}{|z|}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg} t + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Or, nous avons vu au (2°) que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} G(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} P(z^2, 1)$$

Cherchons à développer la dernière intégrale, à cette fin dérivons-la par rapport à  $\frac{1}{2} z^2$  :



$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{2} z^2\right)} \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_0^t e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+t^2)} dt = e^{-\frac{1}{2} z^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1}{2} z^2\right)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{1}{2} z^2 (1+t^2)}}{1+t^2} dt &= \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\frac{1}{2} z^2} e^{-u} u^{n-1} du = \\ &= \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} P(z^2, 2n) \end{aligned}$$

et enfin :

$$\underline{R(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \text{Arc cotgt} - \frac{1}{4} P(z^2, 1) + \frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} P(z^2, 2n)}$$

On remarque que :

$$P(z^2, 2n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\frac{1}{2} z^2} e^{-u} u^{n-1} du$$

est bornée supérieurement par :

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\frac{1}{2} z^2} u^{n-1} du = \frac{z^{2n}}{2^n n!}$$

Le terme général de la série qui figure au second membre est par suite borné supérieurement en valeur absolue par :

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \frac{z^{2n}}{2^n n!} \right]$$

c'est-à-dire, à une constante multiplicative près, par le terme général d'une série exponentielle de la forme :

$$\frac{1}{k!} \left( \frac{z^2 t^2}{2} \right)^k$$

la série alternée est donc absolument convergente et l'erreur inférieure au premier terme négligé. La convergence est rapide si on se limite aux cas  $|t| < 1$ , c'est-à-dire  $|\zeta| < |z|$  auxquels les relations établies au 2<sup>o</sup>) permettent toujours de se ramener.

On notera enfin que lorsque  $z$  et  $\zeta$  tendent simultanément vers 0, le rapport  $\frac{\zeta}{z}$  tendant vers une limite  $t$ , la fonction  $R(z, \zeta)$  tend vers  $\frac{\varepsilon(z)}{2\pi} \text{Arc cotgt}$ .

Lorsque  $z$  tend vers 0 par valeurs positives  $R(z, \zeta)$  tend vers 0 ou  $\frac{1}{2}$ , selon que  $\zeta$  est positif ou négatif.

5 - Développement asymptotique de la fonction R(z, ζ).

Il peut être utile de connaître le comportement de la fonction R pour de grandes valeurs de l'une des variables. Nous allons indiquer un développement en  $\frac{1}{z}$ . Le développement en  $\frac{1}{\zeta}$  pour ζ grand s'obtiendrait par la formule de permutation :

$$R(z, \zeta) + R(\zeta, z) = G(z) G(\zeta)$$

Afin de ne pas alourdir les notations qui font appel aux fonctions eulériennes incomplètes :

$$P(\zeta^2, 2n+1) = 1 - Q(\zeta^2, 2n+1) = \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-u} u^{\frac{2n+1}{2}-1} du$$

On supposera z, ζ et par suite la variable auxiliaire  $t = \frac{\zeta}{|z|}$  positifs. On se ramènerait immédiatement à ce cas par les formules de transformation vues plus haut.

Si, dans l'expression de R(z, ζ) au moyen de la variable auxiliaire t :

$$R(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{2}(1+u^2)}}{1+u^2} du = \frac{1}{2} G(z) - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2u^2}}{1+u^2} du$$

on effectue la division de 1 par  $1+u^2$ , ordonnée suivant les puissances croissantes de u, on obtient :

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_0^n (-1)^n u^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{u^{2n+2}}{1+u^2} \quad \text{quel que soit } u^2$$

$$\begin{aligned} R(z, \zeta) - \left[ \frac{1}{2} G(z) - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi} \sum_0^n (-1)^n \int_0^t e^{-\frac{1}{2}z^2u^2} u^{2n} du \right] &= \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}z^2u^2} \frac{u^{2n+2}}{1+u^2} du \end{aligned}$$

Lorsque t est inférieur ou égal à 1 ( $\zeta < z$ ), la valeur absolue de l'intégrale du second membre décroît lorsque n croît, puisque u est inférieur à 1 sauf peut être au point  $u = t$ , elle est en outre majorée par :

$$\int_0^t u^{2n+2} du = \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

et tend par suite vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte que le crochet du premier membre converge vers R(z, ζ) lorsque n croît indéfiniment à condition que ζ soit inférieur ou même égal à z.

Désignons par  $I_n$  le produit des n premiers nombres entiers impairs :

$$I_n = 1.3.5.7.\dots.2n-1 \quad (I_0 = 1 \text{ par définition}),$$

et effectuons sur les intégrales du premier membre le changement de variable :

$$v = \frac{1}{2} z^2 u^2$$

$$\int_0^t e^{-\frac{1}{2} z^2 u^2} u^{2n} du = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{z^{2n+1}} \int_0^{\frac{t^2}{2}} e^{-v} v^{\frac{2n+1}{2}-1} dv = \frac{I_n \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{z^{2n+1}} P(\zeta^2, 2n+1)$$

$$R(z, \zeta) = \frac{1}{2} G(z) - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{z^{2n+1}} P(\zeta^2, 2n+1) \text{ pour } 0 \leq \zeta \leq z$$

Or, on reconnait en :

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{z^{2n+1}}$$

le développement asymptotique de la fonction G(x) de Gauss, d'où finalement le développement asymptotique de R(z, ζ) :

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{I_n}{z^{2n+1}} Q(\zeta^2, 2n+1)$$

Le développement de R(z, ζ) pour 0 ≤ ζ ≤ z pourrait être utilisé pour la tabulation de la fonction R, on lui préférera, à moins que z ne soit grand, le développement en série entière de t, établi au 4/, qui converge généralement beaucoup plus vite.

#### IV - UNE TABLE DE LA FONCTION R(z, ζ) DONT UNE VERSION ABREGÉE ET UNE ABAQUE SONT JOINTES -

à ce texte a été présentée au moyen des variables z et ζ, ou plus exactement de leurs carrés, pour les valeurs positives, puis les valeurs négatives de ζ(1).

Les valeurs ont été calculées au moyen du développement de R(z, ζ) en série de fonctions eulériennes incomplètes pour t =  $\frac{\zeta}{z} < 1$  puis étendues aux cas ζ > z au moyen de la seconde relation du 2/. 2/.

$$R(z, \zeta) + R(\zeta, z) = G(z) G(\zeta)$$

et enfin aux cas ζ < 0 au moyen de la première relation du 2/.

$$R(z, \zeta) + R(z, -\zeta) = G(z)$$

Pour ζ > 0 on notera que les courbes R(z, ζ) = Cste présentent des maxima dont le lieu a pour équation (on se reportera à l'expression de la dérivée partielle de R par rapport à z au § III).

-----  
 (1) On se rappellera que la fonction R(z, ζ) a toujours, par définition, le signe de z. On trouvera cette table à la fin de l'étude sous forme de 10 tableaux, dont 5 relatifs aux valeurs positives de ζ et 5 relatifs aux valeurs négatives de ζ.

$$z^2 = \frac{\zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{G(\zeta)\sqrt{2\pi}} - \zeta^2$$

et est asymptote à  $z^2 = 1$ .

## V - CALCUL DE L'INTEGRALE DE LAPLACE GAUSS DANS UN DOMAINE POLYGONAL -

Après avoir noté A, B, C... les sommets du polygone dans le sens direct pour un observateur placé à l'intérieur du polygone, il suffit de faire la somme des intégrales curvilignes de type  $I_{AB}$  prises sur les côtés du polygone. L'intégrale de Gauss s'exprime par une somme  $\Sigma(R_A - R_B)$ , chaque terme étant relatif à un segment de droite, c'est-à-dire au moyen d'une fonction R de deux variables seulement, prise pour différents couples de ces variables. On notera que la formule n'est vraie qu'à 1 près.

Nous allons en pratique nous limiter aux cas d'un angle dont les côtés sont quelconques, en particulier à un angle dont un côté est parallèle à oy et l'autre quelconque. Nous serons obligés de préciser les formules lorsque l'un des côtés viendra à passer par l'origine ( $p = 0$  ou  $q = 0$ ) car l'intégrale curviligne  $I_{AB}$  définie au second paragraphe perd alors sa signification.

1 - Le domaine  $\Delta$  est le demi-plan situé au-dessus d'une droite (D)  $y = mx + p$ .

Cette question est étroitement liée à la loi de probabilité de la variable aléatoire  $h = y - mx$ , x et y relevant d'une loi de LAPLACE GAUSS à deux variables. Cette variable h gaussienne a pour variance la quantité désignée précédemment  $s^2 = m^2 - 2rm + 1$ .

Moyennant l'introduction de la variable aléatoire h, l'intégrale de LAPLACE GAUSS dans le domaine  $\Delta$  peut s'écrire :

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \iint_{y-mx-p > 0} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)} dx dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \iint_{h > p} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)} dx dy$$

et s'interprète comme la probabilité pour que la variable aléatoire h de variance  $s^2$  soit supérieure à p,  $F_{\Delta}$  représente donc la fonction de répartition de h :

$$F_{\Delta} = G\left(\frac{p}{s}\right)$$

Revenant à l'interprétation de  $F_{\Delta}$  par une intégrale curviligne sur la droite (D) - dans le cas où p n'est pas nul - on a  $\alpha = -\infty$  et  $\alpha = +\infty$ , donc :

$$F_{\Delta} = R\left(\frac{p}{s}, -\infty\right)$$

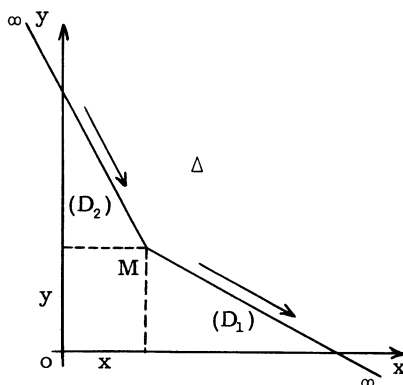
cette dernière expression a un sens, avons-nous vu au paragraphe III, 2/ et est égale à  $G\left(\frac{p}{s}\right)$  si p est positif, égale à  $-G\left(-\frac{p}{s}\right) = -\left[1 - G\left(\frac{p}{s}\right)\right]$  soit  $G\left(\frac{p}{s}\right) - 1$  si p est négatif.

2 - Le domaine est un angle de côtés quelconques.

On prendra  $(D_1)$  sous forme directe  $y = mx + p$

et  $(D_2)$  sous forme inverse  $x = ny + q$

Le domaine  $\Delta$  est la portion de plan située "au-dessus et à droite" des demi-droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .



a) On suppose d'abord qu'aucun des deux côtés de l'angle ne passe par l'origine. :  $p \neq 0$  et  $q \neq 0$ .

Le sens direct est défini pour un observateur placé au-dessus et à droite lorsque  $ox$  est le premier axe. Etant entendu que  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux demi-droites on prend les intégrales :

$I_{-\infty}$  sur  $(D_1)$  et  $I_{\infty}$  sur  $(D_2)$

$$F_{\Delta} = \frac{p}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q}}{Q} dx - \frac{q}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{\infty}^y \frac{e^{-\frac{1}{2}Q}}{Q} dy$$

$$F_{\Delta} = \frac{\varepsilon(p)}{2\pi} \int_{\frac{\alpha}{|s|}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt + \frac{\varepsilon(q)}{2\pi} \int_{\frac{\beta}{|b|}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}b^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

$$\underline{F_{\Delta} = R(a, \alpha) + R(b, \beta)}$$

Avec les valeurs des paramètres déjà explicitées au paragraphe 2 ,

$$s^2 = m^2 - 2rm + 1$$

$$\sigma^2 = n^2 - 2rn + 1$$

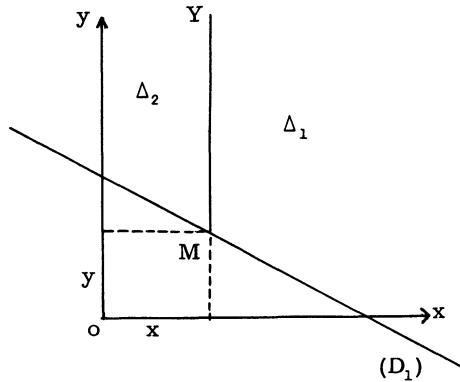
$$a = \frac{p}{s}$$

$$b = \frac{q}{\sigma}$$

$$\alpha = \frac{1}{s} \left( \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} + m \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \right) \quad \beta = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} + n \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \right)$$

avec :  $a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = Q(x, y)$

Cas particulier - Angle dont un côté est parallèle à  $oy$  et l'autre quelconque.



La droite  $(D_2)$  devient  $MY$ , n s'annule et les paramètres de  $MY$  sont :

$$\sigma = 1 \quad b = x \quad \beta = \frac{y - rx}{\sqrt{1 - r^2}}$$

D'où la valeur  $F_{\Delta_1}$  de l'intégrale dans le domaine "en haut" et à "droite" :

$$F_{\Delta_1} = R(a, \alpha) + R\left(x, \frac{y - rx}{\sqrt{1 - r^2}}\right)$$

Remarque.

En vue de traiter la question suivante, nous allons évaluer  $F_{\Delta_1}$  dans le domaine en "haut et à droite" et  $F_{\Delta_2}$  dans le domaine en "haut et à gauche" en fonction des paramètres de la droite  $(D_1)$  prise sous forme inverse.

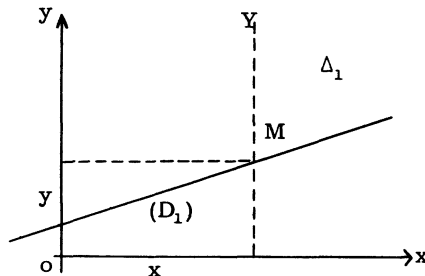
$$(D_1) y = mx + p \quad \text{à laquelle correspondent } s^2, a \text{ et } \alpha$$

$$(D_1) x = ny + q \quad \text{à laquelle correspondent } \sigma^2, b \text{ et } \beta$$

désignent maintenant la même droite  $D_1$ , on a alors les relations entre paramètres (cf. paragraphe II).

$$\frac{\beta}{\alpha} = - \frac{b}{a} = \epsilon(m)$$

Distinguons deux cas :

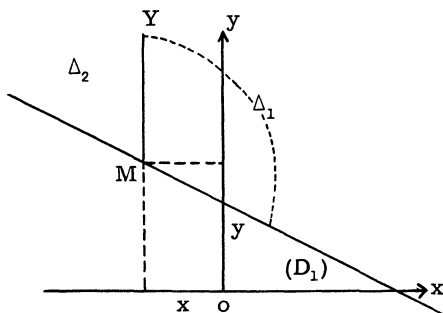


1° La pente m de la droite est positive :

$$F_{\Delta_1} = R(a, \alpha) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) = R(-b, \beta) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

$$F_{\Delta_1} = -R(b, \beta) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

2° La pente m de la droite est négative :



$$F_{\Delta_1} = R(a, \alpha) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) = R(b, -\beta) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

Quant à  $F_{\Delta_2}$ , elle est la différence de l'intégrale dans le demi-plan supérieur à la droite - à savoir  $G(a) = G(b)$  - et de l'intégrale  $F_{\Delta_1}$ .

$$F_{\Delta_2} = G(b) - R(b, -\beta) - R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

Mais on a vu dans les propriétés de la fonction  $R$  que :

$$G(b) - R(b, -\beta) = R(b, \beta)$$

d'où finalement :

$$F_{\Delta_2} = R(b, \beta) - R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

b) Un des côtés de l'angle passe par l'origine.

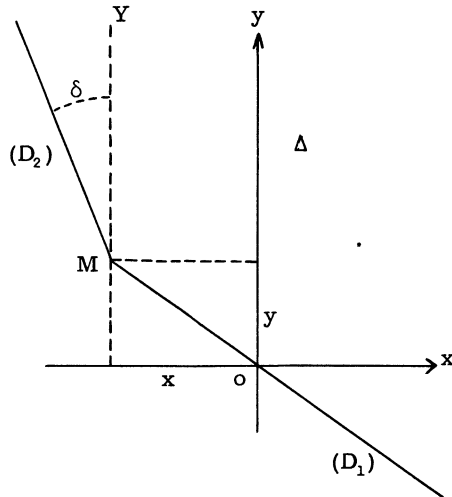
Supposons que ce soit  $(D_1)$   $p = 0$ .

L'angle est défini par les deux droites :

$$(D_1) \quad y = mx$$

$$(D_2) \quad x = ny + q \text{ prise sous forme inverse.}$$

On pose comme plus haut :



$$\begin{cases} \sigma^2 = n^2 - 2rn + 1 \\ b = \frac{q}{\sigma} \\ \beta = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} + n \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \right) \end{cases}$$

La méthode de l'intégrale curviligne qui a permis d'obtenir les formules dans le cas général ne s'applique plus ( $p = 0$ ), on est en mesure par contre d'évaluer l'intégrale dans le domaine  $YM D_1$  en revenant à sa définition :

$$F_{(YMD_1)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \iint_{YMD_1} \{ \substack{y > mx \\ \text{abscisse} > x} \} e^{-\frac{1}{2} Q(x,y)} dx dy = \int_{\text{contour}} \frac{e^{-\frac{1}{2} x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx$$

$$F_{(YMD_1)} = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2} x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} x\right) dx$$

Cette dernière intégrale est, d'après ce que l'on a vu à la fin du paragraphe II, égale à  $R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$  si  $x$  est positif,

égale à  $\frac{1}{2} + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$  si  $x$  est négatif,

égale à  $\frac{1}{2\pi} \text{Arc cotg } \frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}}$  si  $x$  est nul.

L'intégrale dans le domaine  $\Delta$  défini par  $(D_1)$  et  $(D_2)$  s'obtient en ajoutant ou en retranchant à  $F_{(YMD_1)}$ , l'intégrale dans le domaine  $\delta$  selon que la pente de  $(D_2)$  est négative ou positive, c'est-à-dire, d'après la remarque précédente, en ajoutant  $R(b, \beta) - R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$  dans le premier cas, en retranchant  $-R(b, \beta) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$  dans le second cas. On a donc toujours :



$$F_{\Delta} = R(b, \beta) \text{ si } x \text{ est positif,}$$

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} + R(b, \beta) \text{ si } x \text{ est négatif.}$$

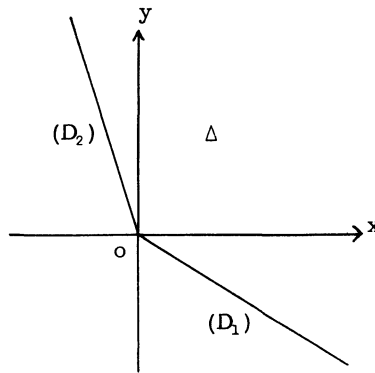
Si c'était la droite (D<sub>2</sub>) qui passait par l'origine, on aurait bien évidemment :

$$F_{\Delta} = R(a, \alpha) \text{ etc.}$$

c) L'angle a son sommet à l'origine.

$$(D_1) \quad y = mx$$

$$(D_2) \quad x = ny$$



Si la pente de la droite (D<sub>2</sub>) est négative, l'intégrale  $F_{\Delta}$  s'exprime par :

$$F_{\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx$$

y étant égal à  $\frac{x}{n}$  lorsque x est négatif et égal à mx lorsque x est positif.

$$F_{\Delta} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{\frac{1}{n} - r}{\sqrt{1-r^2}} x\right) dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} x\right) dx$$

soit d'après les formules du paragraphe III. 2°/

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \left[ \pi - \text{Arc cotg} \left( \frac{\frac{1}{n} - r}{\sqrt{1-r^2}} \right) + \text{Arc cotg} \left( \frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} \right) \right]$$

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \text{arctg} \frac{(1-mn)\sqrt{1-r^2}}{m+n-r(1+mn)} \text{ à } \frac{k}{2} \text{ près}$$

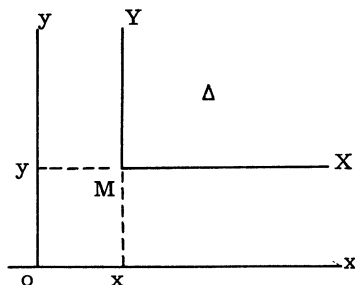
Si la pente de la droite (D<sub>2</sub>) était positive :

$$F_{\Delta} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}}x\right) dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{\frac{1}{n}-r}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx$$

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \left[ \text{Arc cotg} \left( \frac{m-r}{\sqrt{1-r^2}} \right) - \text{Arc cotg} \left( \frac{\frac{1}{n}-r}{\sqrt{1-r^2}} \right) \right]$$

et on obtient la même formule.

3 - Le domaine est un angle droit, dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.



Il suffit de faire  $m = n = 0$  dans la formule de l'angle, les paramètres deviennent alors :

$$\begin{cases} s = 1 \\ a = p = y \\ \alpha = \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = 1 \\ b = q = x \\ \beta = \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \end{cases}$$

$$F_{\Delta} = R\left(y, \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right) + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

Si  $y$  était nul, on appliquerait la formule valable lorsque  $(D_1)$  passe par l'origine.

$$F_{\Delta} = R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \text{ si } \underline{x} \text{ est positif et } F_{\Delta} = \frac{1}{2} + R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \text{ si } \underline{x} \text{ est négatif,}$$

Si  $x$  était nul :

$$F_{\Delta} = R\left(y, \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right) \text{ si } \underline{y} \text{ est positif et } F_{\Delta} = \frac{1}{2} + R\left(y, \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right) \text{ si } \underline{y} \text{ est négatif.}$$

Si enfin  $x$  et  $y$  étaient nuls simultanément la formule générale de l'angle ayant son sommet à l'origine donne pour  $m = n = 0$  :

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \arctg \left( -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \right) = \frac{1}{2\pi} \text{Arc cos} (-r)$$

- Appréciation d'un coefficient de corrélation.

La formule précédente donne un moyen d'évaluer  $r$  :

$$r = - \cos 2 \pi F_{\Delta}$$

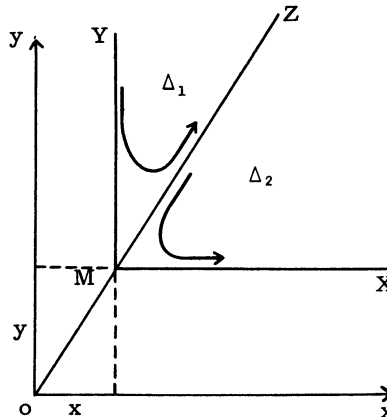
Or  $F_{\Delta}$  est la probabilité, pour que le point aléatoire se trouve dans le premier quadrant. On retrouve une formule classique de la loi de Gauss, qui permet un calcul rapide et sommaire du coefficient de corrélation, à partir d'un nuage de points expérimentaux. Cette formule est plus facilement utilisable sous la forme :

$$r = \sin \frac{\pi}{2} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

$N_1$  désignant le nombre de points situés dans les premier et troisième quadrants,

$N_2$  le nombre de points dans les second et quatrième quadrants.

- Les résultats de l'angle droit peuvent s'obtenir directement à partir des intégrales curvilignes du premier paragraphe. 2)



- La première, prise sur le contour (YMZ) est nulle à l'infini et sur  $\overrightarrow{MZ}$  le long duquel  $v$  est constant. Elle a donc pour valeur sur  $\overrightarrow{YM}$  le long duquel  $x$  est constant :

$$- \frac{\varepsilon(x)}{2\pi} \int_{\infty}^v \frac{e^{-\frac{1}{2} x^2 (1+v^2)}}{1+v^2} dv$$

ou bien :

$$\frac{\varepsilon(x)}{2\pi} \int_v^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} x^2 (1+v^2)}}{1+v^2} dv$$

c'est-à-dire  $R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)$  et elle mesure l'intégrale de Gauss dans le domaine  $\Delta_1$ .

- La seconde, prise sur le contour ( $\overrightarrow{ZMX}$ ) est nulle sur  $\overrightarrow{MZ}$  ( $u = \text{constante}$ ) ainsi qu'à l'infini et vaut sur  $\overrightarrow{MX}$ , le long duquel  $y$  est constant :

$$\frac{\varepsilon(y)}{2\pi} \int_u^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2(1+u^2)}}{1+u^2} du$$

c'est-à-dire :  $R\left(y, \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)$  et mesure l'intégrale de Gauss dans le domaine  $\Delta_2$ .

Or, le domaine  $\Delta$ , défini par l'angle  $YMX$  est égal à la somme ou à la différence des domaines  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , selon que  $y$  est positif ou négatif, ce qui correspond bien à la convention de signe imposée à la fonction  $R$ , et l'intégrale de Gauss  $F_\Delta$  est, par suite, égale à la somme algébrique des deux fonctions  $R$  :

$$R\left(x, \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) + R\left(y, \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

On démontrerait aisément que la propriété reste vraie, lorsque  $x$  est négatif. La probabilité pour que les coordonnées du point figuratif soient simultanément supérieures à  $x$ , et  $y$  - fonction dépendant de 3 paramètres  $x$ ,  $y$  et  $r$  - peut ainsi être calculée au moyen d'une fonction de deux variables seulement.

#### VI - REMARQUE GENERALE -

Les longs développements, par lesquels nous avons tenté d'établir la théorie avec un peu de rigueur, risquent de masquer le caractère assez intuitif des formules.

Prenons, par exemple, le cas traité plus haut, d'un angle  $\Delta$  de côtés quelconques  $D_2MD_1$ . Si on effectue sur l'intégrale le changement de variables :

$$\begin{cases} x = x \\ \eta = \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \end{cases}$$

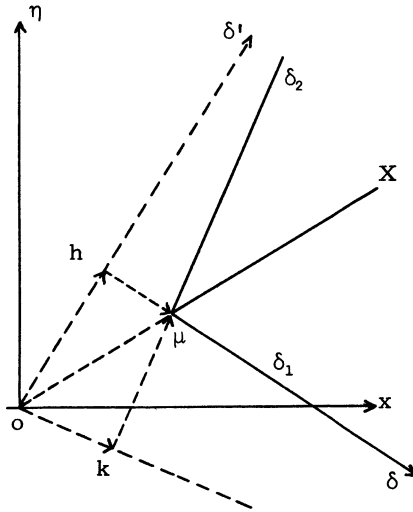
Les nouvelles variables  $x$  et  $\eta$  sont indépendantes et relèvent d'une loi canonique de Gauss. Quant au domaine  $D_2MD_1$ , il se transforme en un angle  $\delta_2\mu\delta_1$ , qui est la somme - ou la différence - des deux domaines  $X\mu\delta_1$  et  $\delta_2\mu X$ . On introduit l'axe  $\delta$  porteur de la demi-droite  $\mu\delta_1$  et orienté vers les  $x$  positifs et l'axe  $\delta'$  directement perpendiculaire à  $\delta$ . Si on effectue une rotation de centre  $O$ , laquelle n'altère pas la loi canonique de Gauss, telle qu'elle amène  $\delta$  à être équipollent avec  $o\eta$ , le domaine  $\delta\mu X$  relève exactement de la définition  $R(\overline{o\eta}, \overline{h\mu})$  que donne l'interprétation géométrique du III. Reste à évaluer  $\overline{o\eta}$  et  $\overline{h\mu}$ .

Si  $(D_1)$  a pour équation :  $y = mx + p$ ,  $\delta_1$  a pour équation dans le système de coordonnées  $(x, \eta)$  :

$$(r - m)x + \sqrt{1 - r^2} \eta - p = 0$$

et les paramètres directeurs principaux des axes  $\delta$  et  $\delta'$  sont, en posant comme plus haut :

$$s^2 = \sqrt{m^2 - 2rm + 1}$$



$$\delta \begin{cases} \frac{\sqrt{1-r^2}}{s} \\ \frac{m-r}{s} \end{cases} \quad \delta' \begin{cases} \frac{r-m}{s} \\ \frac{\sqrt{1-r^2}}{s} \end{cases}$$

d'où :

$$\overline{oh} = \text{proj}_{\delta}, \overrightarrow{o\mu} = \frac{(r-m)x + \eta\sqrt{1-r^2}}{s} = \frac{p}{s} = a \quad \text{et} \quad \overline{h\mu} = \text{proj}_{\delta'} \overrightarrow{o\mu} = \frac{x\sqrt{1-r^2} + (m-r)\eta}{s}$$

Mais en introduisant, la seconde variable réduite  $\xi = \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}$  des relations :

$$\begin{cases} \eta\sqrt{1-r^2} = y - rx \\ \xi\sqrt{1-r^2} = x - ry \end{cases} \quad \text{on déduit :} \quad x\sqrt{1-r^2} = \xi + r\eta$$

d'où :

$$\overline{oh} = a = \frac{p}{s} \quad \text{et} \quad \overline{h\mu} = \alpha = \frac{\xi + m\eta}{s}$$

On retrouve l'expression, donnée au paragraphe II, des paramètres  $a$  et  $\alpha$  associés au couple  $(MD_1)$ . La valeur de l'intégrale canonique de Laplace-Gauss dans le domaine  $X\mu\delta_1$  est  $R(a, \alpha)$ , expression qui ne dépend que de deux paramètres.

Comme, dans le problème, les droites  $(D_1)$   $y = mx + p$  prise sous forme directe et  $(D_2)$   $x = ny + q$  prise sous forme inverse jouent des rôles rigoureusement symétriques, on obtient les paramètres  $b$  et  $\beta$  associés au couple  $(MD_2)$  : (L'axe porté par  $\mu\delta_2$  est orienté vers les  $y > 0$ , l'autre s'en déduit par rotation de  $-\frac{\pi}{2}$ ) :

$$\overline{ok} = b = \frac{q}{\sigma} \quad \overline{k\mu} = \beta = \frac{\eta + n\xi}{\sigma} \quad (\sigma = \sqrt{n^2 - 2rn + 1})$$

et la valeur  $R(b, \beta)$  de l'intégrale canonique de Gauss dans le domaine  $\delta_2 \mu X$ . D'où la valeur de l'intégrale de Laplace-Gauss dans l'angle formé par les demi-droites  $D_1$  et  $D_2$  :  $R(a, \alpha) + R(b, \beta)$ .

$a$  et  $\alpha$ ,  $b$  et  $\beta$  mesurent les projections, sur deux systèmes d'axes rectangulaires, du vecteur  $\vec{o\mu}(x, \eta)$  de module  $o\mu = \sqrt{x^2 + \eta^2} = \sqrt{Q(x, y)}$ . Il en résulte la relation :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = o\mu^2 = Q(x, y)$$

Le signe - imposé à la fonction  $R$  lorsque  $p$  ou  $q$  est négatif est là pour traduire une soustraction de domaines. Il n'y a pas de difficulté particulière et la formule continue à s'appliquer lorsque  $p$  ou  $q$  tend vers zéro.

°  
°   °

## VII - LES MOMENTS DE LA DISTRIBUTION DANS UN DOMAINE POLYAGONAL -

On désigne toujours par  $F_\Delta$  l'intégrale de Laplace-Gauss prise dans le domaine polygonal  $\Delta$  :

$$F_\Delta = \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2} Q(x, y)}}{2\pi \sqrt{1-r^2}} dx dy$$

Nous allons nous efforcer de calculer, ou plutôt de déduire par récurrence, des intégrales de la forme :

$$M_i^j = \iint_{\Delta} \frac{x^i y^j e^{-\frac{1}{2} Q(x, y)}}{2\pi \sqrt{1-r^2}} dx dy \quad \underline{i \text{ et } j \text{ entiers positifs ou nuls}}$$

$M_i^j$  n'est pas exactement le moment d'ordre  $(i, j)$  de la distribution, mais le produit de celui-ci par  $F_\Delta$ .

- On peut mettre en évidence la possibilité de calculer, théoriquement du moins, tous les moments par dérivation, en introduisant la fonction  $\Phi(\lambda, \mu)$  qui joue à peu près le rôle d'une fonction caractéristique, l'intégrale suivante étant prise dans le domaine  $\Delta$ .

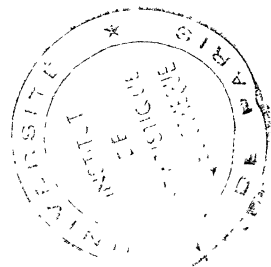
$$\Phi(\lambda, \mu) = \iint_{\Delta} e^{\lambda x + \mu y} \frac{e^{-\frac{1}{2} Q(x, y)}}{2\pi \sqrt{1-r^2}} dx dy$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(\lambda, \mu) = e^{\frac{1}{2} (\lambda^2 + 2r\lambda\mu + \mu^2)} \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2} Q(x-\lambda r\mu, y-\mu-r\lambda)}}{2\pi \sqrt{1-r^2}} dx dy$$

$$\Phi(\lambda, \mu) = e^{\frac{1}{2} (\lambda^2 + 2r\lambda\mu + \mu^2)} \iint_{\Delta(\lambda, \mu)} \frac{e^{-\frac{1}{2} Q(x, y)}}{2\pi \sqrt{1-r^2}} dx dy$$

$$\Phi(\lambda, \mu) = e^{\frac{1}{2} (\lambda^2 + 2r\lambda\mu + \mu^2)} F_{\Delta(\lambda, \mu)}$$



elle est égale, à un facteur près, à l'intégrale de Laplace Gauss prise dans un domaine  $\Delta(\lambda, \mu)$  déduit du domaine  $\Delta$  par la translation :

$$\xrightarrow{T} \begin{cases} -(\lambda + r\mu) \\ -(\mu + r\lambda) \end{cases}$$

Si  $\Delta$  est un polygone, on pourra calculer  $\Phi(\lambda, \mu)$ , au moyen de fonctions élémentaires et de fonctions R.

On sera en mesure de calculer les dérivées successives de  $\Phi(\lambda, \mu)$  par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  en utilisant l'expression donnée plus haut de la différentielle d'une fonction  $R(z, \zeta)$ , qui s'exprime au moyen de fonctions élémentaires.

On notera que les pentes  $m$  des droites  $y = mx + p$  sont invariantes dans la translation, que les  $p$ , par contre, sont des fonctions linéaires de  $\lambda$  et  $\mu$ . On pourrait obtenir ainsi, du moins théoriquement tous les moments :

$$M_i^j = \left[ \frac{\partial^{i+j} \Phi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^i \partial \mu^j} \right]_{\lambda = \mu = 0}$$

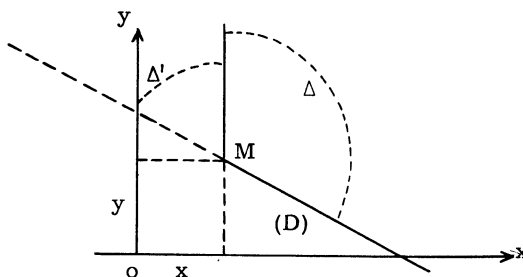
On voit facilement que seuls les moments où  $i$  et  $j$  ont la même parité introduisent des fonctions R, les moments où  $i$  et  $j$  ont des parités contraires s'expriment au moyen de fonctions élémentaires. En effet le coefficient de  $F_\Delta$ , c'est-à-dire des fonctions R, est :

$$\left[ \frac{\partial^{i+j}}{\partial \lambda^i \partial \mu^j} \left( e^{\frac{1}{2}(\lambda^2 + 2r\lambda\mu + \mu^2)} \right) \right]_{\lambda = \mu = 0}$$

qui est nulle lorsque  $i + j$  est impair.

- Formules de récurrence entre moments de même parité dans un angle dont un côté est parallèle à oy.

La méthode précédente a permis de mettre en évidence deux familles bien distinctes de moments, les moments à parité paire ( $i + j$  pair) qui contiennent des fonctions R et les moments à parité impaire ( $i + j$  impair) qui n'en contiennent pas. Nous allons donner, dans le cas d'un domaine  $\Delta$ , défini dans la portion "à droite et en haut" d'un angle dont un côté est parallèle à oy et l'autre quelconque, des relations de récurrence entre moments de la même famille.



La méthode consiste à faire des intégrations par parties : prenons par exemple :

$$M_i^0 = \iint_{\Delta} \frac{x^i e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy = \int_x^{\infty} x^i \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) dx \quad \text{avec } y = mx + p$$

En associant un  $x$  à  $e^{-\frac{1}{2}x^2}$  et intégrant par parties :

$$M_i^0 = x^{i-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) + \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} d\left[x^{i-1} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right]$$

$$M_i^0 = (i-1) M_{i-2}^0 + x^{i-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) - \int_x^{\infty} \frac{x^{i-1} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} d(y-rx)$$

La dernière intégrale s'exprime au moyen de fonctions eulériennes incomplètes. Nous ne poursuivrons pas les calculs. Avant de donner les formules de récurrence, rappelons les notations introduites au début de cette note.

$$\begin{aligned} \text{D) } y = mx + p \quad M(x,y) \quad \eta = \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \quad \xi = \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \\ s = \sqrt{m^2 - 2rm + 1} \quad a = \frac{p}{s} \quad \alpha = \frac{\xi + m\eta}{s} \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} i \geq 1 \quad M_i^0 = (i-1) M_{i-2}^0 + x^{i-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) \\ + \frac{(r-m)e^{-\frac{1}{2}a^2}}{2\pi s^i} \int_a^{\infty} [t\sqrt{1-r^2} + (r-m)a]^{i-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j \geq 1 \quad M_0^j = (j-1) M_0^{j-2} + \frac{re^{-\frac{1}{2}x^2}}{2\pi} \int_{\eta}^{\infty} [t\sqrt{1-r^2} + rx]^{j-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ + \frac{(1-rm)e^{-\frac{1}{2}a^2}}{2\pi s^j} \int_a^{\infty} [mt\sqrt{1-r^2} + (1-rm)a]^{j-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \geq 0, j \geq 1 \quad M_i^j = rM_{i+1}^{j-1} + (j-1)(1-r^2) M_i^{j-2} \\ + \frac{(1-r^2)e^{-\frac{1}{2}a^2}}{2\pi s^{i+j}} \int_a^{\infty} [t\sqrt{1-r^2} + (r-m)a]^i [mt\sqrt{1-r^2} + (1-rm)a]^{j-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

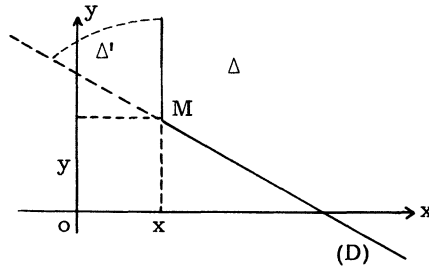
On peut ainsi calculer tous les moments d'ordre pair ( $i+j$  pair) à partir de  $M_0^0 = F_{\Delta} = R(x, \eta) + R(a, \alpha)$ .

Les intégrales du second membre, après développement des binômes figurant sous le signe d'intégration s'expriment par les fonctions eulériennes incomplètes de Pearson, que l'on peut trouver dans les tables.



Les formules de récurrence valent aussi pour les "moments à gauche" - pris dans un domaine d'intégration  $\Delta'$  situé au-dessus de la droite (D) et à gauche de l'abscisse  $x$  à condition de changer le signe des termes en  $e^{-\frac{1}{2}x^2}$  et de prendre la dernière intégrale entre les limites  $-\infty$  et  $\alpha$ . Ce dernier résultat peut être obtenu en retranchant chaque relation de récurrence de l'expression qu'elle prend pour  $x$  égal à moins l'infini.

Voici l'expression détaillée des moments des deux premiers ordres :



$$M_0^0 = R(x, \eta) + R(a, \alpha)$$

$$M_1^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + (r-m) \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s\sqrt{2\pi}} G(\alpha)$$

$$M_0^1 = r \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + (1-rm) \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s\sqrt{2\pi}} G(\alpha)$$

$$M_2^0 = R(x, \eta) + R(a, \alpha) + x \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + a(r-m)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s^2\sqrt{2\pi}} G(\alpha) + (r-m)\sqrt{1-r^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi s^2}$$

$$M_0^2 = R(x, \eta) + R(a, \alpha) + r^2 x \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + a(1-rm)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s^2\sqrt{2\pi}} G(\alpha)$$

$$+ [r(1-rm) + m(1-r^2)]\sqrt{1-r^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi s^2}$$

$$M_1^1 = r[R(x, \eta) + R(a, \alpha)] + rx \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + a(r-m)(1-rm) \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s^2\sqrt{2\pi}} G(\alpha)$$

$$+ (1-rm)\sqrt{1-r^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi s^2}$$

En particulier les moments dans la totalité du demi-plan situé au-dessus de la droite (D) :

$$M_0^0 = G(a) \quad M_1^0 = \frac{r-m}{s} \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{\sqrt{2\pi}} \quad M_0^1 = \frac{1-rm}{s} \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

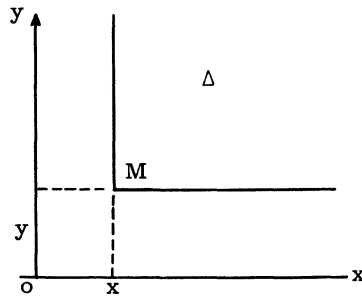
$$M_2^0 = G(a) + a(r-m)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s^2 \sqrt{2\pi}} \quad M_0^2 = G(a) + a(1-rm)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s^2 \sqrt{2\pi}}$$

$$M_1^1 = rG(a) + a(r-m)(1-rm) \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{s^2 \sqrt{2\pi}}$$

Il s'en déduit aisément que les expressions des "moments à gauche" c'est-à-dire pris dans le domaine  $\Delta'$  situé au-dessus de la droite (D) et à gauche de l'abscisse  $x$  se déduisent des précédentes en changeant  $\alpha$  en  $-\alpha$  dans  $G(\alpha)$  et  $R(a, \alpha)$  et le signe devant tous les autres termes. On peut ainsi calculer les moments du second ordre dans un angle de côtés quelconques (D) et (D') en ajoutant les moments à droite relatifs à la droite (D) et les moments à gauche relatifs à (D').

L'expression des moments des deux premiers ordres dans un angle droit dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées s'obtient en faisant dans les formules précédentes :

$$\begin{aligned} m &= 0, & a &= y \\ s &= 1 & \alpha &= \xi \end{aligned}$$



$$M_0^0 = R(x, \eta) + R(y, \xi)$$

$$M_1^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + r \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\xi)$$

$$M_0^1 = r \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\xi)$$

$$M_2^0 = x \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + r^2 y \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\xi) + r \sqrt{1-r^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}0(x,y)}}{2\pi} + R(x, \eta) + R(y, \xi)$$

$$M_0^2 = r^2 x \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + y \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\xi) + r \sqrt{1-r^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}0(x,y)}}{2\pi} + R(x, \eta) + R(y, \xi)$$

$$M_1^1 = rx \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\eta) + ry \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} G(\xi) + \sqrt{1-r^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}0(x,y)}}{2\pi} + r [R(x, \eta) + R(y, \xi)]$$

VIII - APPLICATION A UNE LOI LOG-NORMALE A DEUX VARIABLES -

Nous voudrions montrer comment se traduisent certaines des questions précédentes lorsque ce ne sont pas les variables elles-mêmes qui suivent une loi de Laplace-Gauss, mais leurs logarithmes népériens.

Soit donc  $(u, v)$  un couple de variables log-normales, dont les moyennes des logarithmes sont  $\text{Log } \gamma_u$  et  $\text{Log } \gamma_v$  ( $\gamma_u$  et  $\gamma_v$  sont les médianes de  $u$  et de  $v$ ) et dont les variances et covariances des logarithmes sont  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  et  $\sigma_{uv}$  ( $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  et  $\sigma_{uv}$  sont dites variances et covariances logarithmiques).

On démontre que les moyennes arithmétiques  $m_u$  et  $m_v$  des variables  $u$  et  $v$  sont liées aux médianes par les relations :

$$m_u = \gamma_u e^{\frac{1}{2}\sigma_u^2}$$

$$m_v = \gamma_v e^{\frac{1}{2}\sigma_v^2}$$

Si les variables  $u$  et  $v$  suivent une loi log-normale à deux variables de médianes  $\gamma_u$  et  $\gamma_v$ , de variances logarithmiques  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_v^2$  et de coefficient de corrélation logarithmique  $r = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_u \sigma_v}$ , les variables réduites ainsi définies :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sigma_u} \text{Log } \frac{u}{\gamma_u} = \frac{1}{\sigma_u} \text{Log } \frac{u}{m_u} + \frac{1}{2} \sigma_u \\ y = \frac{1}{\sigma_v} \text{Log } \frac{v}{\gamma_v} = \frac{1}{\sigma_v} \text{Log } \frac{v}{m_v} + \frac{1}{2} \sigma_v \end{cases}$$

obéissent à une loi de Laplace-Gauss centrée et normée :

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

Des formules précédentes, on déduit :

$$\begin{cases} u = m_u e^{x\sigma_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2} \\ v = m_v e^{y\sigma_v - \frac{1}{2}\sigma_v^2} \end{cases}$$

Ceci posé, soit à calculer le moment d'ordre  $(i, j)$  dans un certain domaine ;  $i$  et  $j$  peuvent ici à la différence du paragraphe VII, être quelconques réels :

$$M_i^j = \iint_{\Delta} u^i v^j \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

et d'après la formule précédente :

$$M_i^j = (m_u)^i (m_v)^j e^{-\frac{1}{2}(i\sigma_u^2 + j\sigma_v^2)} \iint_{\Delta} e^{ix\sigma_u + jy\sigma_v} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

soit, en absorbant la forme linéaire de l'exponentielle dans la forme quadratique :

$$M_i^j = (m_u)^i (m_v)^j e^{\frac{1}{2} [i(i-1)\sigma_u^2 + 2ijr\sigma_u\sigma_v + j(j-1)\sigma_v^2]} \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x-i\sigma_u-rj\sigma_v, y-j\sigma_v-ri\sigma_u)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

ou encore :

$$M_i^j = (m_u)^i (m_v)^j e^{\frac{1}{2} [i(i-1)\sigma_u^2 + 2ijr\sigma_u\sigma_v + j(j-1)\sigma_v^2]} \iint_{\Delta'} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy$$

L'intégrale étant prise dans un domaine  $\Delta'$  déduit du domaine  $\Delta$  par la translation :

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{T} \left\{ \begin{array}{l} - (i \sigma_u + r j \sigma_v) \\ - (j \sigma_v + r i \sigma_u) \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi donc, un calcul de moment dans une loi log-normale se ramène à un calcul de probabilité (le domaine  $\Delta'$  étant déduit du domaine  $\Delta$  des variables réduites par une translation) et s'exprime par suite au moyen de fonctions R.

En particulier, si on intègre dans tout l'espace des valeurs positives :

$$\iint_{\Delta'} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} = 1$$

$$M_i^j = (m_u)^i (m_v)^j e^{\frac{1}{2} [i(i-1)\sigma_u^2 + 2ijr\sigma_u\sigma_v + j(j-1)\sigma_v^2]}$$

Un certain nombre de questions font intervenir la loi log-normale à deux variables, particulièrement dans le cas où  $u$  et  $v$  ont même moyenne arithmétique.

$$m_u = m_v = m$$

et où de plus, la moyenne arithmétique des  $v_u$  ( $v$  à  $u$  donné) est précisément égale à  $u$ . Ces conditions impliquent une droite de régression de  $y$  en  $x$  de pente 1 dans le plan des logarithmes et par suite un coefficient de corrélation logarithmique :

$$r = \frac{\sigma_u}{\sigma_v}$$

et une variance logarithmique liée.

$$\sigma^2 = \sigma_{v \cdot u}^2 = \sigma_v^2 - \sigma_u^2$$

Evaluons, dans cette hypothèse, la probabilité pour que le point  $M$  soit dans un angle droit de côtés parallèles aux axes de coordonnées ayant pour sommet le point  $(u,v)$ . Les paramètres de calcul des fonctions  $R$  sont :

$$x \text{ et } \eta = \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}} \text{ d'une part} \quad y \text{ et } \xi = \frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} \text{ d'autre part}$$

Ils prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sigma_u} \text{Log } \frac{u}{m} + \frac{1}{2} \sigma_u \\ \eta = \frac{1}{\sigma} \text{Log } \frac{v}{u} + \frac{1}{2} \sigma \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{\sigma_v} \text{Log } \frac{v}{m} + \frac{1}{2} \sigma_v \\ \xi = \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sigma} \left( \frac{1}{\sigma_u^2} \text{Log } \frac{u}{m} - \frac{1}{\sigma_v^2} \text{Log } \frac{v}{m} \right) \end{array} \right.$$

Les paramètres de calcul du moment  $M_i^j$  s'en déduisent en faisant subir au domaine  $\Delta$  la translation  $\vec{T}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sigma_u} \text{Log } \frac{u}{m} + \frac{1}{2} \sigma_u - (p+q) \sigma_u \\ \eta = \frac{1}{\sigma} \text{Log } \frac{v}{u} + \frac{1}{2} \sigma - q \sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{\sigma_v} \text{Log } \frac{v}{m} + \frac{1}{2} \sigma_v - p \frac{\sigma_u^2}{\sigma_v} - q \sigma_v \\ \xi = \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sigma} \left( \frac{1}{\sigma_u^2} \text{Log } \frac{u}{m} - \frac{1}{\sigma_v^2} \text{Log } \frac{v}{m} \right) - p \frac{\sigma \sigma_u}{\sigma_v} \end{array} \right.$$

avec :  $\sigma^2 = \sigma_v^2 - \sigma_u^2$

d'où l'expression du moment :

$$M_i^j = [R(x, \eta) + R(y, \xi)] m^{i+j} e^{\frac{1}{2} [i(i-1)\sigma_u^2 + 2ijr\sigma_u\sigma_v + j(j-1)\sigma_v^2]}$$

On obtient la probabilité pour que le point M soit dans ce même domaine en faisant dans l'expression des paramètres et dans la dernière formule  $i = j = 0$ .



## IX - APPLICATION A UN PROBLEME DE STATISTIQUE DES GISEMENTS -

La présente étude nous a été suggérée par un problème de statistique des gisements. Dans un gisement, les teneurs sont des grandeurs indissolublement liées aux volumes qu'elles concernent. Ceci posé, on considère un gisement (G), que l'on découpe, par la pensée, en volumes égaux (V), eux-mêmes subdivisés en volumes égaux et plus petits (v) ; et on adopte le schéma statistique<sup>(1)</sup> suivant, qui est assez satisfaisant pour beaucoup de gisements filoniens :

- Les teneurs  $u$  des volumes (V) se distribuent dans (G) autour de la teneur moyenne  $m$  du gisement, avec une variance logarithmique  $\sigma_u^2 = \sigma_{(G/V)}^2$ .

- Les teneurs  $v_u$  des volumes (v) se distribuent au sein d'un volume (V) autour de la teneur  $u$  de (V), avec une variance logarithmique, identique pour tous les (V),  $\sigma^2 = \sigma_{(V/v)}^2$ .

- Les teneurs  $v$  des volumes (v) se distribuent dans (G), autour de  $m$ , avec une variance logarithmique  $\sigma_v^2 = \sigma_{(G/v)}^2$  égale à la somme :

-----

(1) cf. Traité de Géostatistique appliquée de G. Matheron, 4ème partie.

$$\sigma_{(G/V)}^2 = \sigma_{(G/V)}^2 + \sigma_{(V/V)}^2 = \sigma_u^2 + \sigma^2 = \sigma_v^2$$

- Les trois distributions envisagées sont log-normales.

- Le couple (u,v) suit, en coordonnées logarithmiques, une loi de Laplace-Gauss à deux variables, dont les variances marginales sont  $\sigma_{(G/V)}^2$  et  $\sigma_{(G/V)}^2$ , dont la droite de régression de y en x a pour pente 1, car la moyenne des  $v_u$  liés par u est précisément égale à u, ce qui entraîne un coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\sigma_{(G/V)}}{\sigma_{(G/V)}}$$

et une variance des  $-v_u$  liés par u égale à :

$$\sigma_{(G/V)}^2 - \sigma_{(G/V)}^2 = \sigma_{(V/V)}^2 = \sigma^2$$

Le problème se pose désormais ainsi :

Lors de l'exploitation du gisement en vue de l'enrichir, on souhaite n'exploiter que les volumes (V) dont la teneur u est supérieure à une certaine valeur critique  $u_0$  et ne conserver, au sein des volumes (V) retenus, que les volumes (v) dont la teneur  $v_u$  est supérieure à la valeur  $v_0$ .

Quelle proportion de minerai, et quelle quantité de métal contenu recueillera-t-on ?

Le problème est résolu par la question traitée au paragraphe précédent :

La proportion de minerai est donnée par :

$$M_0^o = R(x, \eta) + R(y, \xi)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sigma_u} L \frac{u_0}{m} + \frac{1}{2} \sigma_u \\ \eta = \frac{1}{\sigma} L \frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2} \sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{\sigma_v} L \frac{v_0}{m} + \frac{1}{2} \sigma_v \\ \xi = \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sigma} \left( \frac{1}{\sigma_u^2} L \frac{u_0}{m} - \frac{1}{\sigma_v^2} L \frac{v_0}{m} \right) \end{array} \right.$$

Quant à la quantité de métal, elle est égale à :

$$M_0^1 = [R(x', \eta') + R(y', \xi')] m$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sigma_u} L \frac{u_0}{m} - \frac{1}{2} \sigma_u \\ \eta' = \frac{1}{\sigma} L \frac{v_0}{u_0} - \frac{1}{2} \sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \frac{1}{\sigma_v} L \frac{v_0}{m} - \frac{1}{2} \sigma_v \\ \xi' = \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sigma} \left( \frac{1}{\sigma_u^2} L \frac{u_0}{m} - \frac{1}{\sigma_v^2} L \frac{v_0}{m} \right) \end{array} \right.$$

X - EXEMPLE D'APPLICATION EMPRUNTE A UNE CONFERENCE FAITE PAR M. F. BASTENAIRE LE 23 MAI 1952. (Chaire de Calcul des Probabilités et de Physique Mathématique) -

"Un test d'échantillonnage double de la moyenne d'une population normale, dont l'écart-type est connu".

Après avoir traité en détail le cas où les deux séries de prélèvements comportent le même nombre  $n = n'$  d'observations, M. Bastenaire conclut : "Dans le cas où les  $n'$  observations de la 2ème série sont en nombre différent de  $n$ , le problème se ramène au calcul d'une intégrale double dans le plan  $(x,y)$ , les deux variables étant encore normales et indépendantes, mais le domaine d'intégration étant limité par une droite parallèle à l'axe des  $y$  et une autre droite quelconque".

La première série comporte  $n$  observations de moyenne  $\bar{x}$ , la seconde série  $n'$  observations de moyenne  $\bar{y}$ . Les frontières du domaine d'intégration défini par M. Bastenaire sont caractérisées, dans le cas général, par les conditions :

- moyenne des  $n$  échantillons de la 1ère série égale à une constante  $L$  :

$$\bar{x} = L$$

- moyenne  $\bar{x}'$  de l'ensemble des  $n + n'$  échantillons des deux séries égale à la même constante  $L$  :

$$\bar{x}' = \frac{nx + n'y}{n + n'} = L$$

On interprète le problème en variables centrées et réduites à leur écart-type, et on forme l'hypothèse que les prélèvements sont tirés d'une population de moyenne  $M_1$  et de variance  $\sigma^2$  :

$$u = \frac{\bar{x} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad v = \frac{\bar{y} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n'}}$$

et on pose :

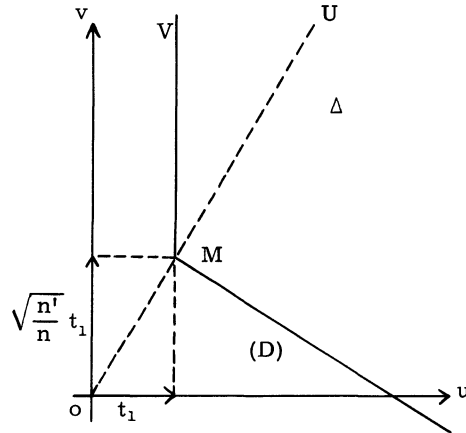
$$t_1 = \frac{L - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Les frontières du domaine, sont alors en variables centrées et réduites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = t_1 \\ v - \sqrt{\frac{n'}{n}} t_1 = - \sqrt{\frac{n}{n'}} (u - t_1) \end{array} \right. \quad \text{MV} \quad (D)$$

La solution du test dans le cas général fait intervenir le calcul de l'intégrale de Gauss sous forme canonique ( $r = 0$  : les variables  $u$  et  $v$  sont indépendantes) dans un angle  $\Delta$  tel que, par exemple, V M D.

Nous pourrions appliquer brutalement, en y faisant  $r = 0$ , les formules du § V, 2°.



On peut aussi remarquer que le point M d'intersection de (D) et de MV a pour coordonnées  $(t_1, \sqrt{\frac{n'}{n}} t_1)$  et que la droite (D) de pente  $-\sqrt{\frac{n}{n'}}$  est perpendiculaire à OM. Il en résulte que l'intégrale de Gauss dans l'angle droit UMD est égale à :

$$\frac{1}{2} G(OM) = \frac{1}{2} G\left(\sqrt{\frac{n+n'}{n}} t_1\right)$$

et on reconnaît dans le domaine VMU le domaine de définition de la fonction (cf. § III) :

$$R\left(t_1, \sqrt{\frac{n'}{n}} t_1\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sqrt{\frac{n'}{n}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}t_1^2(1+w^2)}}{1+w^2} dw = \int_{t_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} G\left(\sqrt{\frac{n'}{n}} x\right) dx$$

L'intégrale de Laplace-Gauss dans le domaine VMD est donc égale à :

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} G\left(\sqrt{\frac{n+n'}{n}} t_1\right) + R\left(t_1, \sqrt{\frac{n'}{n}} t_1\right)$$

On peut lire  $R\left(t_1, \sqrt{\frac{n'}{n}} t_1\right)$  dans la table que nous joignons à ce texte :

Si  $n = n'$   $R(t_1, t_1) = \frac{1}{2} G^2(t_1)$

et :

$$F_{\Delta} = \frac{G^2(t_1) + G(t_1\sqrt{2})}{2}$$



TABLE des VALEURS de la FONCTION  $R(z, \zeta)$

$\zeta$ positif			$\zeta$ négatif		
$\zeta^2 \backslash z^2$	0.0001	0.0005	$\zeta^2 \backslash z^2$	0.0001	0.0005
0	0.2480	0.2455	0	0.2480	0.2455
0.0001	0.1230	0.1786	0.0001	0.3730	0.3125
0.0005	0.0649	0.1206	0.0005	0.4311	0.3705
0.001	0.0468	0.0936	0.001	0.4492	0.3975
0.002	0.0331	0.0694	0.002	0.4630	0.4217
0.003	0.0268	0.0573	0.003	0.4692	0.4338
0.004	0.0230	0.0497	0.004	0.4730	0.4413
0.005	0.0204	0.0444	0.005	0.4756	0.4467
0.006	0.0185	0.0404	0.006	0.4775	0.4507
0.007	0.0170	0.0373	0.007	0.4790	0.4538
0.008	0.0158	0.0347	0.008	0.4802	0.4564
0.009	0.0148	0.0325	0.009	0.4812	0.4585
0.01	0.0139	0.0307	0.01	0.4821	0.4604
0.02	0.0094	0.0207	0.02	0.4867	0.4703
0.04	0.0061	0.0136	0.04	0.4899	0.4775
0.06	0.0047	0.0105	0.06	0.4913	0.4806
0.08	0.0039	0.0086	0.08	0.4922	0.4825
0.1	0.0033	0.0073	0.1	0.4927	0.4837
0.5	0.0008	0.0018	0.5	0.4952	0.4893
1	0.0003	0.0007	1.0	0.4957	0.4903
2	0.0001	0.0002	2	0.4969	0.4909
3	0.0000	0.0001	3	0.4960	0.4910
4	0.0000	0.0000	4	0.4960	0.4910
			6	0.4960	0.4911
			8	0.4960	0.4911
			10	0.4960	0.4911

TABLE des VALEURS de la FONCTION B(z, ζ) — ζ positif

$\frac{\zeta^2}{z^2}$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	0.2437	0.2411	0.2391	0.2374	0.2359	0.2346	0.2333	0.2322	0.2311
0.0001	0.1950	0.2061	0.2104	0.2125	0.2136	0.2142	0.2145	0.2145	0.2145
0.0005	0.1458	0.1674	0.1775	0.1834	0.1873	0.1900	0.1919	0.1934	0.1944
0.001	0.1188	0.1433	0.1559	0.1638	0.1692	0.1731	0.1760	0.1783	0.1801
0.002	0.0918	0.1162	0.1303	0.1367	0.1464	0.1515	0.1555	0.1587	0.1613
0.003	0.0772	0.1003	0.1143	0.1241	0.1313	0.1369	0.1414	0.1451	0.1482
0.004	0.0676	0.0893	0.1029	0.1127	0.1201	0.1260	0.1307	0.1347	0.1380
0.005	0.0608	0.0811	0.0943	0.1039	0.1113	0.1172	0.1221	0.1262	0.1297
0.006	0.0556	0.0747	0.0874	0.0968	0.1041	0.1100	0.1150	0.1191	0.1227
0.007	0.0514	0.0695	0.0817	0.0908	0.0981	0.1040	0.1089	0.1131	0.1167
0.008	0.0480	0.0652	0.0769	0.0858	0.0929	0.0987	0.1036	0.1078	0.1115
0.009	0.0451	0.0615	0.0728	0.0815	0.0884	0.0941	0.0990	0.1032	0.1068
0.01	0.0427	0.0584	0.0693	0.0776	0.0844	0.0901	0.0949	0.0990	0.1027
0.02	0.0291	0.0403	0.0485	0.0550	0.0605	0.0652	0.0693	0.0729	0.0762
0.03	0.0229	0.0319	0.0386	0.0440	0.0486	0.0526	0.0561	0.0593	0.0622
0.04	0.0192	0.0268	0.0325	0.0371	0.0411	0.0446	0.0477	0.0505	0.0531
0.05	0.0166	0.0233	0.0283	0.0323	0.0359	0.0390	0.0418	0.0443	0.0466
0.06	0.0147	0.0207	0.0252	0.0288	0.0320	0.0348	0.0373	0.0396	0.0418
0.07	0.0133	0.0187	0.0227	0.0261	0.0290	0.0315	0.0338	0.0359	0.0379
0.08	0.0121	0.0170	0.0207	0.0236	0.0265	0.0288	0.0310	0.0329	0.0347
0.09	0.0112	0.0157	0.0191	0.0220	0.0244	0.0266	0.0286	0.0304	0.0321
0.1	0.0103	0.0146	0.0177	0.0204	0.0227	0.0247	0.0266	0.0283	0.0299
0.2	0.0060	0.0085	0.0104	0.0120	0.0133	0.0146	0.0157	0.0167	0.0177
0.4	0.0032	0.0045	0.0055	0.0063	0.0071	0.0077	0.0083	0.0089	0.0094
0.6	0.0020	0.0029	0.0035	0.0041	0.0045	0.0050	0.0054	0.0057	0.0061
0.8	0.0014	0.0020	0.0025	0.0028	0.0032	0.0035	0.0038	0.0040	0.0042
1	0.0011	0.0015	0.0018	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0029	0.0031
2	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009
3	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
4	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$\chi^2$  positif

$\chi^2$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.	0.2301	0.2219	0.2156	0.2104	0.2058	0.2016	0.1978	0.1943	0.1910
0.0001	0.2143	0.2108	0.2066	0.2026	0.1988	0.1953	0.1920	0.1889	0.1860
0.0005	0.1953	0.1972	0.1955	0.1930	0.1903	0.1876	0.1849	0.1823	0.1797
0.001	0.1816	0.1872	0.1873	0.1859	0.1840	0.1818	0.1796	0.1773	0.1751
0.002	0.1635	0.1736	0.1760	0.1761	0.1751	0.1737	0.1721	0.1704	0.1685
0.003	0.1508	0.1637	0.1676	0.1687	0.1685	0.1677	0.1665	0.1651	0.1636
0.004	0.1408	0.1557	0.1608	0.1626	0.1630	0.1626	0.1618	0.1607	0.1595
0.005	0.1327	0.1489	0.1549	0.1574	0.1583	0.1583	0.1577	0.1569	0.1559
0.006	0.1258	0.1430	0.1498	0.1528	0.1541	0.1544	0.1541	0.1535	0.1526
0.007	0.1199	0.1378	0.1451	0.1486	0.1503	0.1508	0.1508	0.1504	0.1497
0.008	0.1147	0.1331	0.1410	0.1448	0.1468	0.1476	0.1478	0.1476	0.1470
0.009	0.1100	0.1289	0.1372	0.1414	0.1436	0.1446	0.1450	0.1449	0.1445
0.01	0.1059	0.1250	0.1337	0.1382	0.1406	0.1419	0.1424	0.1424	0.1422
0.02	0.0792	0.0985	0.1086	0.1146	0.1185	0.1210	0.1226	0.1236	0.1242
0.03	0.0648	0.0828	0.0930	0.0995	0.1039	0.1070	0.1092	0.1107	0.1117
0.04	0.0555	0.0721	0.0819	0.0885	0.0931	0.0965	0.0989	0.1008	0.1021
0.05	0.0488	0.0641	0.0736	0.0800	0.0847	0.0881	0.0908	0.0928	0.0943
0.06	0.0437	0.0579	0.0669	0.0732	0.0778	0.0813	0.0840	0.0861	0.0878
0.07	0.0397	0.0530	0.0615	0.0675	0.0721	0.0755	0.0783	0.0804	0.0822
0.08	0.0364	0.0488	0.0569	0.0628	0.0672	0.0706	0.0733	0.0755	0.0773
0.09	0.0337	0.0453	0.0530	0.0586	0.0629	0.0663	0.0690	0.0712	0.0730
0.1	0.0313	0.0423	0.0497	0.0551	0.0592	0.0625	0.0652	0.0674	0.0692
0.2	0.0186	0.0256	0.0304	0.0342	0.0373	0.0398	0.0420	0.0438	0.0454
0.3	0.0131	0.0181	0.0217	0.0245	0.0268	0.0288	0.0305	0.0320	0.0333
0.4	0.0099	0.0138	0.0165	0.0188	0.0206	0.0222	0.0236	0.0248	0.0258
0.5	0.0078	0.0109	0.0131	0.0149	0.0164	0.0177	0.0189	0.0199	0.0208
0.6	0.0064	0.0089	0.0107	0.0122	0.0135	0.0145	0.0155	0.0163	0.0171
0.7	0.0053	0.0074	0.0089	0.0102	0.0112	0.0121	0.0130	0.0137	0.0143
0.8	0.0045	0.0062	0.0075	0.0086	0.0095	0.0103	0.0110	0.0116	0.0122
0.9	0.0038	0.0053	0.0065	0.0074	0.0081	0.0088	0.0094	0.0099	0.0104
1.0	0.0033	0.0046	0.0056	0.0064	0.0070	0.0076	0.0081	0.0086	0.0090
1.5	0.0017	0.0024	0.0029	0.0033	0.0037	0.0040	0.0043	0.0046	0.0048
2.0	0.0010	0.0014	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0025	0.0026	0.0028
3.0	0.0004	0.0005	0.0007	0.0008	0.0008	0.0009	0.0010	0.0010	0.0011
4.0	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005
6.0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
8.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

z positif

$\frac{z}{2}$ $z^2$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.1880	0.1637	0.1460	0.1318	0.1199	0.1096	0.1007	0.0928	0.0857
0.0001	0.1832	0.1605	0.1435	0.1297	0.1181	0.1081	0.0994	0.0916	0.0846
0.0005	0.1779	0.1565	0.1404	0.1272	0.1160	0.1062	0.0977	0.0900	0.0833
0.001	0.1729	0.1535	0.1381	0.1253	0.1143	0.1048	0.0965	0.0890	0.0823
0.002	0.1667	0.1493	0.1348	0.1226	0.1120	0.1028	0.0947	0.0874	0.0809
0.004	0.1581	0.1435	0.1302	0.1188	0.1088	0.1000	0.0922	0.0852	0.0789
0.006	0.1516	0.1390	0.1267	0.1159	0.1064	0.0979	0.0904	0.0836	0.0774
0.008	0.1463	0.1353	0.1238	0.1135	0.1043	0.0961	0.0888	0.0822	0.0762
0.01	0.1417	0.1321	0.1213	0.1114	0.1025	0.0945	0.0874	0.0809	0.0751
0.02	0.1245	0.1197	0.1115	0.1032	0.0955	0.0884	0.0820	0.0761	0.0707
0.03	0.1124	0.1107	0.1042	0.0971	0.0902	0.0836	0.0779	0.0725	0.0675
0.04	0.1031	0.1035	0.0983	0.0921	0.0859	0.0800	0.0746	0.0695	0.0647
0.05	0.0955	0.0974	0.0933	0.0878	0.0822	0.0768	0.0716	0.0669	0.0624
0.06	0.0890	0.0922	0.0889	0.0841	0.0789	0.0739	0.0691	0.0645	0.0603
0.07	0.0835	0.0876	0.0850	0.0807	0.0760	0.0713	0.0667	0.0624	0.0584
0.08	0.0787	0.0834	0.0815	0.0777	0.0733	0.0689	0.0646	0.0605	0.0567
0.09	0.0745	0.0797	0.0783	0.0749	0.0708	0.0667	0.0626	0.0587	0.0551
0.1	0.0707	0.0763	0.0753	0.0723	0.0686	0.0647	0.0608	0.0571	0.0536
0.2	0.0467	0.0536	0.0548	0.0539	0.0520	0.0498	0.0473	0.0448	0.0424
0.3	0.0344	0.0408	0.0426	0.0426	0.0416	0.0402	0.0385	0.0367	0.0349
0.4	0.0268	0.0324	0.0344	0.0347	0.0343	0.0333	0.0321	0.0308	0.0294
0.5	0.0216	0.0264	0.0284	0.0289	0.0287	0.0281	0.0273	0.0262	0.0252
0.6	0.0178	0.0220	0.0238	0.0245	0.0245	0.0240	0.0234	0.0226	0.0217
0.7	0.0149	0.1086	0.0203	0.0209	0.0210	0.0208	0.0203	0.0197	0.0190
0.8	0.0127	0.0159	0.0174	0.0181	0.0182	0.0181	0.0177	0.0172	0.0166
0.9	0.0109	0.0137	0.0151	0.0158	0.0159	0.0158	0.0156	0.0152	0.0147
1	0.0094	0.0120	0.0132	0.0138	0.0140	0.0140	0.0137	0.0134	0.0130
1.5	0.0054	0.0064	0.0072	0.0076	0.0078	0.0079	0.0078	0.0077	0.0075
2	0.0029	0.0038	0.0043	0.0046	0.0047	0.0048	0.0047	0.0047	0.0046
3	0.0011	0.0015	0.0017	0.0018	0.0019	0.0019	0.0020	0.0019	0.0019
4	0.0005	0.0007	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009
6	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$\zeta$  positif

$\frac{\zeta^2}{n^2}$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0	0.0793	0.0736	0.0683	0.0636	0.0592	0.0552	0.0515	0.0481	0.0449	0.0420
0.001	0.0763	0.0708	0.0658	0.0612	0.0571	0.0532	0.0497	0.0464	0.0434	0.0406
0.005	0.0725	0.0674	0.0627	0.0584	0.0545	0.0508	0.0475	0.0444	0.0415	0.0389
0.01	0.0697	0.0649	0.0604	0.0563	0.0525	0.0491	0.0458	0.0429	0.0401	0.0376
0.02	0.0658	0.0613	0.0572	0.0533	0.0498	0.0466	0.0435	0.0407	0.0382	0.0357
0.04	0.0604	0.0564	0.0527	0.0492	0.0460	0.0431	0.0403	0.0378	0.0354	0.0332
0.06	0.0564	0.0527	0.0493	0.0461	0.0432	0.0405	0.0379	0.0366	0.0344	0.0313
0.08	0.0531	0.0497	0.0465	0.0436	0.0409	0.0383	0.0359	0.0337	0.0317	0.0297
0.1	0.0502	0.0471	0.0442	0.0414	0.0389	0.0365	0.0342	0.0321	0.0302	0.0284
0.2	0.0400	0.0377	0.0355	0.0335	0.0315	0.0297	0.0279	0.0263	0.0248	0.0233
0.3	0.0331	0.0314	0.0297	0.0280	0.0265	0.0250	0.0236	0.0223	0.0210	0.0198
0.4	0.0280	0.0266	0.0253	0.0239	0.0227	0.0214	0.0203	0.0192	0.0181	0.0171
0.5	0.0240	0.0229	0.0218	0.0207	0.0196	0.0186	0.0176	0.0167	0.0158	0.0150
0.6	0.0208	0.0199	0.0190	0.0181	0.0172	0.0163	0.0155	0.0147	0.0139	0.0132
0.7	0.0182	0.0174	0.0167	0.0159	0.0151	0.0144	0.0137	0.0130	0.0123	0.0117
0.8	0.0160	0.0154	0.0147	0.0141	0.0134	0.0128	0.0122	0.0116	0.0110	0.0104
0.9	0.0142	0.0136	0.0131	0.0125	0.0119	0.0114	0.0108	0.0103	0.0098	0.0093
1.0	0.0126	0.0121	0.0116	0.0111	0.0107	0.0102	0.0097	0.0093	0.0088	0.0084
1.5	0.0073	0.0071	0.0069	0.0066	0.0063	0.0061	0.0058	0.0056	0.0053	0.0051
2.0	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0038	0.0037	0.0035	0.0034	0.0032
3.0	0.0019	0.0018	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014
4.0	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
6.0	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
8.0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$\zeta$  positif

V.-

$\frac{\zeta^2}{z^2}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
0	0.0393	0.0345	0.0303	0.0267	0.0236	0.0208	0.0184	0.0163
$\frac{0.001}{0.01}$	0.0380	0.0334	0.0294	0.0259	0.0228	0.0202	0.0178	0.0158
$\frac{0.01}{0.05}$	0.0352	0.0309	0.0273	0.0240	0.0212	0.0188	0.0166	0.0147
0.1	0.0302	0.0266	0.0235	0.0208	0.0184	0.0163	0.0144	0.0128
0.2	0.0267	0.0236	0.0208	0.0185	0.0164	0.0145	0.0129	0.0114
0.4	0.0220	0.0195	0.0173	0.0154	0.0136	0.0121	0.0108	0.0096
0.6	0.0162	0.0144	0.0129	0.0115	0.0102	0.0091	0.0082	0.0073
0.8	0.0125	0.0112	0.0100	0.0090	0.0080	0.0072	0.0064	0.0058
1	0.0099	0.0089	0.0080	0.0072	0.0064	0.0058	0.0052	0.0046
$\frac{1}{2}$	0.0080	0.0072	0.0065	0.0058	0.0052	0.0047	0.0042	0.0038
3	0.0031	0.0028	0.0026	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016
4	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007
6	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
8	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$\frac{\zeta^2}{z^2}$	4.0	4.4	4.8	5.2	6.0	7.0	8.0	10.0
0	0.0114	0.0090	0.0071	0.0056	0.0036	0.0020	0.0012	0.0004
$\frac{0.001}{0.01}$	0.0110	0.0087	0.0069	0.0055	0.0035	0.0020	0.0011	0.0004
$\frac{0.01}{0.1}$	0.0103	0.0081	0.0065	0.0051	0.0033	0.0019	0.0011	0.0004
1	0.0081	0.0064	0.0051	0.0040	0.0026	0.0015	0.0009	0.0003
$\frac{1}{2}$	0.0028	0.0022	0.0018	0.0014	0.0009	0.0005	0.0003	0.0001
3	0.0012	0.0009	0.0008	0.0006	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001
4	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
6	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
8	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TABLE des VALEURS de la FONCTION R(  $z_0$ ,  $\zeta$  ) négatif

$\frac{z}{z_0}$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	0.2437	0.2411	0.2391	0.2374	0.2359	0.2346	0.2333	0.2322	0.2311
0.0001	0.2924	0.2761	0.2678	0.2623	0.2582	0.2549	0.2522	0.2498	0.2477
0.0005	0.3416	0.3148	0.3007	0.2914	0.2845	0.2792	0.2747	0.2710	0.2678
0.001	0.3686	0.3389	0.3223	0.3110	0.3027	0.2961	0.2906	0.2860	0.2821
0.002	0.3956	0.3659	0.3479	0.3351	0.3254	0.3176	0.3112	0.3057	0.3009
0.003	0.4102	0.3819	0.3638	0.3507	0.3405	0.3322	0.3252	0.3192	0.3140
0.004	0.4197	0.3929	0.3752	0.3621	0.3517	0.3432	0.3359	0.3297	0.3242
0.005	0.4266	0.4011	0.3839	0.3709	0.3605	0.3519	0.3445	0.3382	0.3325
0.006	0.4318	0.4075	0.3908	0.3780	0.3677	0.3591	0.3517	0.3452	0.3395
0.007	0.4360	0.4127	0.3965	0.3840	0.3738	0.3652	0.3578	0.3513	0.3455
0.008	0.4394	0.4170	0.4012	0.3890	0.3790	0.3704	0.3630	0.3565	0.3507
0.009	0.4422	0.4206	0.4053	0.3933	0.3834	0.3750	0.3677	0.3612	0.3554
0.01	0.4447	0.4238	0.4089	0.3971	0.3874	0.3791	0.3718	0.3653	0.3595
0.02	0.4583	0.4418	0.4297	0.4198	0.4113	0.4039	0.3974	0.3914	0.3860
0.03	0.4645	0.4503	0.4396	0.4308	0.4232	0.4166	0.4106	0.4051	0.4006
0.04	0.4682	0.4554	0.4457	0.4376	0.4307	0.4245	0.4189	0.4138	0.4091
0.05	0.4708	0.4589	0.4499	0.4424	0.4359	0.4301	0.4249	0.4200	0.4156
0.06	0.4726	0.4615	0.4530	0.4460	0.4398	0.4343	0.4293	0.4247	0.4205
0.07	0.4741	0.4635	0.4554	0.4487	0.4429	0.4376	0.4328	0.4284	0.4243
0.08	0.4753	0.4651	0.4574	0.4510	0.4453	0.4403	0.4357	0.4314	0.4275
0.09	0.4762	0.4665	0.4590	0.4528	0.4474	0.4425	0.4381	0.4340	0.4301
0.1	0.4770	0.4676	0.4604	0.4544	0.4491	0.4444	0.4401	0.4361	0.4324
0.2	0.4814	0.4737	0.4678	0.4628	0.4585	0.4546	0.4510	0.4476	0.4445
0.4	0.4842	0.4777	0.4727	0.4685	0.4647	0.4614	0.4583	0.4553	0.4528
0.6	0.4853	0.4793	0.4746	0.4707	0.4673	0.4642	0.4613	0.4586	0.4562
0.8	0.4860	0.4807	0.4757	0.4719	0.4686	0.4657	0.4629	0.4604	0.4580
1	0.4863	0.4807	0.4763	0.4727	0.4695	0.4666	0.4639	0.4614	0.4591
2	0.4871	0.4817	0.4776	0.4742	0.4711	0.4684	0.4658	0.4635	0.4613
3	0.4873	0.4820	0.4779	0.4745	0.4715	0.4688	0.4663	0.4640	0.4618
4	0.4873	0.4821	0.4781	0.4747	0.4717	0.4690	0.4665	0.4642	0.4621
6	0.4874	0.4821	0.4781	0.4748	0.4718	0.4691	0.4666	0.4643	0.4622
8	0.4874	0.4822	0.4782	0.4748	0.4718	0.4691	0.4667	0.4644	0.4622
10	0.4874	0.4822	0.4782	0.4748	0.4718	0.4691	0.4667	0.4644	0.4622

χ - négatif

χ <sup>2</sup>	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.2301	0.2219	0.2156	0.2104	0.2058	0.2016	0.1978	0.1943	0.1910
0.0001	0.2459	0.2330	0.2247	0.2182	0.2127	0.2079	0.2036	0.1997	0.1961
0.0005	0.2649	0.2466	0.2358	0.2277	0.2212	0.2157	0.2108	0.2064	0.2024
0.001	0.2786	0.2565	0.2439	0.2348	0.2276	0.2215	0.2161	0.2113	0.2070
0.002	0.2967	0.2701	0.2552	0.2447	0.2364	0.2295	0.2236	0.2183	0.2136
0.003	0.3094	0.2801	0.2636	0.2521	0.2430	0.2356	0.2292	0.2236	0.2185
0.004	0.3193	0.2881	0.2705	0.2581	0.2485	0.2406	0.2339	0.2286	0.2226
0.005	0.3275	0.2949	0.2763	0.2633	0.2533	0.2450	0.2379	0.2318	0.2262
0.006	0.3344	0.3008	0.2815	0.2680	0.2575	0.2489	0.2416	0.2352	0.2295
0.007	0.3403	0.3060	0.2861	0.2721	0.2613	0.2524	0.2449	0.2383	0.2324
0.008	0.3455	0.3106	0.2903	0.2759	0.2648	0.2556	0.2479	0.2411	0.2351
0.009	0.3501	0.3149	0.2941	0.2794	0.2680	0.2586	0.2507	0.2437	0.2376
0.01	0.3543	0.3187	0.2976	0.2826	0.2709	0.2614	0.2533	0.2462	0.2399
0.02	0.3810	0.3453	0.3227	0.3061	0.2930	0.2822	0.2730	0.2650	0.2579
0.03	0.3954	0.3610	0.3383	0.3212	0.3076	0.2963	0.2865	0.2780	0.2703
0.04	0.4047	0.3717	0.3493	0.3322	0.3184	0.3068	0.2967	0.2879	0.2800
0.05	0.4114	0.3796	0.3577	0.3407	0.3269	0.3151	0.3049	0.2959	0.2879
0.06	0.4165	0.3858	0.3643	0.3476	0.3337	0.3219	0.3117	0.3025	0.2943
0.07	0.4205	0.3908	0.3698	0.3532	0.3395	0.3277	0.3174	0.3082	0.2999
0.08	0.4238	0.3949	0.3743	0.3580	0.3444	0.3326	0.3223	0.3131	0.3048
0.09	0.4265	0.3984	0.3782	0.3621	0.3486	0.3369	0.3266	0.3174	0.3091
0.1	0.4289	0.4014	0.3816	0.3657	0.3523	0.3407	0.3305	0.3213	0.3129
0.2	0.4416	0.4182	0.4008	0.3865	0.3742	0.3634	0.3537	0.3449	0.3367
0.3	0.4471	0.4257	0.4096	0.3962	0.3847	0.3744	0.3652	0.3567	0.3488
0.4	0.4503	0.4300	0.4147	0.4020	0.3909	0.3811	0.3721	0.3639	0.3563
0.5	0.4523	0.4329	0.4181	0.4058	0.3951	0.3855	0.3768	0.3688	0.3613
0.6	0.4538	0.4349	0.4205	0.4085	0.3981	0.3887	0.3802	0.3723	0.3650
0.7	0.4549	0.4364	0.4223	0.4106	0.4003	0.3911	0.3827	0.3750	0.3678
0.8	0.4557	0.4375	0.4237	0.4121	0.4020	0.3930	0.3847	0.3771	0.3699
0.9	0.4564	0.4384	0.4248	0.4134	0.4034	0.3944	0.3863	0.3787	0.3717
1.0	0.4569	0.4392	0.4257	0.4144	0.4045	0.3956	0.3875	0.3801	0.3731
1.5	0.4584	0.4414	0.4283	0.4174	0.4078	0.3992	0.3914	0.3841	0.3773
2	0.4592	0.4424	0.4296	0.4188	0.4094	0.4009	0.3932	0.3860	0.3793
3	0.4598	0.4432	0.4306	0.4200	0.4107	0.4023	0.3947	0.3876	0.3810
4	0.4600	0.4435	0.4310	0.4204	0.4112	0.4029	0.3952	0.3882	0.3816
6	0.4601	0.4437	0.4312	0.4207	0.4114	0.4032	0.3956	0.3885	0.3820
8	0.4602	0.4438	0.4312	0.4207	0.4115	0.4032	0.3956	0.3886	0.3821
10	0.4602	0.4438	0.4312	0.4207	0.4115	0.4032	0.3957	0.3886	0.3821



$\zeta$  négatif

$\frac{z^2}{\zeta}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.1880	0.1637	0.1460	0.1318	0.1199	0.1096	0.1007	0.0928	0.0857
0.0001	0.1927	0.1669	0.1485	0.1338	0.1216	0.1112	0.1020	0.0940	0.0868
0.0005	0.1986	0.1709	0.1516	0.1364	0.1238	0.1130	0.1037	0.0954	0.0881
0.001	0.2030	0.1738	0.1539	0.1383	0.1254	0.1145	0.1049	0.0965	0.0891
0.002	0.2092	0.1780	0.1571	0.1414	0.1277	0.1164	0.1067	0.0981	0.0905
0.004	0.2178	0.1839	0.1617	0.1448	0.1309	0.1192	0.1092	0.1003	0.0924
0.006	0.2243	0.1884	0.1652	0.1476	0.1334	0.1214	0.1110	0.1020	0.0940
0.008	0.2296	0.1921	0.1681	0.1501	0.1354	0.1232	0.1126	0.1034	0.0952
0.01	0.2343	0.1953	0.1707	0.1522	0.1373	0.1248	0.1140	0.1046	0.0963
0.02	0.2514	0.2076	0.1805	0.1603	0.1443	0.1309	0.1194	0.1094	0.1007
0.03	0.2635	0.2166	0.1877	0.1664	0.1495	0.1355	0.1235	0.1131	0.1039
0.04	0.2728	0.2239	0.1936	0.1714	0.1538	0.1392	0.1268	0.1161	0.1066
0.05	0.2804	0.2299	0.1986	0.1757	0.1575	0.1425	0.1297	0.1187	0.1090
0.06	0.2869	0.2352	0.2030	0.1795	0.1608	0.1454	0.1323	0.1210	0.1111
0.07	0.2924	0.2398	0.2069	0.1828	0.1638	0.1480	0.1347	0.1231	0.1130
0.08	0.2972	0.2439	0.2105	0.1859	0.1664	0.1504	0.1368	0.1250	0.1147
0.09	0.3015	0.2476	0.2137	0.1887	0.1689	0.1526	0.1388	0.1268	0.1163
0.1	0.3053	0.2510	0.2166	0.1913	0.1712	0.1546	0.1406	0.1285	0.1178
0.2	0.3292	0.2738	0.2371	0.2097	0.1877	0.1695	0.1541	0.1407	0.1290
0.3	0.3450	0.2866	0.2493	0.2210	0.1981	0.1791	0.1629	0.1488	0.1365
0.4	0.3491	0.2950	0.2576	0.2288	0.2055	0.1860	0.1693	0.1547	0.1420
0.5	0.3544	0.3009	0.2636	0.2346	0.2110	0.1912	0.1741	0.1593	0.1462
0.6	0.3581	0.3053	0.2681	0.2391	0.2153	0.1952	0.1780	0.1629	0.1496
0.7	0.3610	0.3087	0.2717	0.2426	0.2187	0.1985	0.1811	0.1659	0.1524
0.8	0.3633	0.3114	0.2745	0.2455	0.2215	0.2012	0.1837	0.1683	0.1548
0.9	0.3651	0.3136	0.2768	0.2478	0.2238	0.2035	0.1858	0.1704	0.1567
1	0.3665	0.3154	0.2787	0.2497	0.2258	0.2053	0.1877	0.1721	0.1584
1.5	0.3709	0.3209	0.2847	0.2559	0.2319	0.2114	0.1936	0.1778	0.1639
2	0.3730	0.3236	0.2877	0.2590	0.2351	0.2145	0.1966	0.1808	0.1668
3	0.3748	0.3259	0.2902	0.2617	0.2378	0.2173	0.1994	0.1836	0.1695
4	0.3754	0.3267	0.2912	0.2627	0.2389	0.2184	0.2005	0.1847	0.1705
6	0.3758	0.3272	0.2918	0.2634	0.2396	0.2191	0.2012	0.1853	0.1712
8	0.3759	0.3273	0.2919	0.2635	0.2397	0.2192	0.2013	0.1855	0.1713
10	0.3759	0.3273	0.2919	0.2635	0.2397	0.2193	0.2014	0.1855	0.1714

$\chi^2$  négatif

$\chi^2$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0	0.0793	0.0736	0.0683	0.0636	0.0592	0.0552	0.0515	0.0481	0.0449	0.0420
0.001	0.0824	0.0763	0.0709	0.0659	0.0613	0.0571	0.0533	0.0497	0.0465	0.0434
0.005	0.0861	0.0797	0.0740	0.0687	0.0639	0.0595	0.0555	0.0518	0.0483	0.0452
0.01	0.0899	0.0823	0.0763	0.0708	0.0658	0.0613	0.0571	0.0533	0.0497	0.0465
0.02	0.0928	0.0858	0.0795	0.0738	0.0686	0.0638	0.0594	0.0554	0.0517	0.0483
0.04	0.0983	0.0908	0.0840	0.0779	0.0723	0.0673	0.0626	0.0584	0.0544	0.0508
0.06	0.1023	0.0944	0.0874	0.0810	0.0752	0.0699	0.0650	0.0606	0.0565	0.0527
0.08	0.1056	0.0974	0.0901	0.0835	0.0775	0.0720	0.0670	0.0624	0.0582	0.0543
0.1	0.1084	0.1000	0.0925	0.0857	0.0795	0.0739	0.0687	0.0640	0.0597	0.0557
0.2	0.1187	0.1094	0.1011	0.0936	0.0868	0.0807	0.0750	0.0698	0.0651	0.0607
0.3	0.1255	0.1158	0.1070	0.0991	0.0919	0.0853	0.0794	0.0739	0.0689	0.0642
0.4	0.1306	0.1205	0.1114	0.1032	0.0957	0.0889	0.0827	0.0770	0.0717	0.0669
0.5	0.1346	0.1242	0.1149	0.1064	0.0987	0.0917	0.0853	0.0794	0.0740	0.0691
0.6	0.1378	0.1272	0.1177	0.1090	0.1012	0.0940	0.0875	0.0815	0.0759	0.0708
0.7	0.1404	0.1297	0.1200	0.1112	0.1032	0.0959	0.0893	0.0831	0.0775	0.0723
0.8	0.1426	0.1318	0.1219	0.1130	0.1050	0.0976	0.0908	0.0846	0.0789	0.0736
0.9	0.1445	0.1335	0.1236	0.1146	0.1064	0.0990	0.0921	0.0858	0.0800	0.0747
1.0	0.1461	0.1350	0.1250	0.1160	0.1077	0.1002	0.0932	0.0869	0.0810	0.0757
1.5	0.1513	0.1400	0.1298	0.1205	0.1120	0.1042	0.0971	0.0906	0.0845	0.0789
2.0	0.1541	0.1427	0.1324	0.1230	0.1144	0.1065	0.0993	0.0926	0.0865	0.0808
3.0	0.1568	0.1453	0.1349	0.1254	0.1167	0.1087	0.1014	0.0946	0.0884	0.0826
4.0	0.1578	0.1463	0.1358	0.1263	0.1176	0.1096	0.1022	0.0954	0.0892	0.0834
6.0	0.1585	0.1469	0.1365	0.1269	0.1182	0.1102	0.1028	0.0960	0.0897	0.0839
8.0	0.1586	0.1471	0.1366	0.1271	0.1183	0.1103	0.1029	0.0961	0.0898	0.0840
10.0	0.1586	0.1471	0.1366	0.1271	0.1183	0.1103	0.1029	0.0961	0.0898	0.0840

V.-

$\zeta$  négatif

$\frac{2}{\zeta}$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
0	0.0393	0.0345	0.0303	0.0267	0.0236	0.0208	0.0184	0.0163
0.001	0.0406	0.0356	0.0313	0.0276	0.0243	0.0215	0.0190	0.0168
0.01	0.0435	0.0381	0.0334	0.0294	0.0259	0.0229	0.0202	0.0179
0.05	0.0484	0.0424	0.0371	0.0326	0.0287	0.0253	0.0224	0.0198
0.1	0.0520	0.0454	0.0398	0.0350	0.0308	0.0271	0.0239	0.0212
0.2	0.0567	0.0495	0.0434	0.0381	0.0335	0.0295	0.0260	0.0230
0.4	0.0625	0.0546	0.0478	0.0419	0.0369	0.0325	0.0287	0.0253
0.6	0.0662	0.0578	0.0506	0.0445	0.0391	0.0344	0.0304	0.0268
0.8	0.0688	0.0601	0.0527	0.0462	0.0407	0.0359	0.0316	0.0280
1.0	0.0707	0.0618	0.0542	0.0476	0.0419	0.0369	0.0326	0.0288
2	0.0756	0.0662	0.0581	0.0511	0.0450	0.0397	0.0351	0.0310
3	0.0773	0.0678	0.0595	0.0524	0.0462	0.0408	0.0360	0.0319
4	0.0780	0.0684	0.0601	0.0529	0.0467	0.0412	0.0364	0.0323
6	0.0785	0.0689	0.0605	0.0533	0.0470	0.0415	0.0367	0.0325
8	0.0786	0.0690	0.0606	0.0534	0.0471	0.0416	0.0368	0.0326
10	0.0786	0.0690	0.0607	0.0534	0.0471	0.0416	0.0368	0.0326

$\frac{2}{\zeta}$	4	4.4	4.8	5.2	6	7	8	10
0	0.0114	0.0090	0.0071	0.0056	0.0036	0.0020	0.0012	0.0004
0.001	0.0117	0.0093	0.0073	0.0058	0.0037	0.0021	0.0012	0.0004
0.01	0.0124	0.0098	0.0078	0.0062	0.0039	0.0022	0.0013	0.0004
0.1	0.0147	0.0116	0.0092	0.0072	0.0046	0.0026	0.0015	0.0005
1	0.0200	0.0158	0.0124	0.0099	0.0062	0.0035	0.0020	0.0007
2	0.0216	0.0170	0.0135	0.0107	0.0067	0.0038	0.0022	0.0007
3	0.0222	0.0175	0.0139	0.0110	0.0070	0.0040	0.0023	0.0008
4	0.0225	0.0178	0.0141	0.0112	0.0071	0.0040	0.0023	0.0008
6	0.0227	0.0179	0.0142	0.0113	0.0071	0.0041	0.0023	0.0008
8	0.0227	0.0180	0.0142	0.0113	0.0071	0.0041	0.0023	0.0008
10	0.0227	0.0180	0.0142	0.0113	0.0072	0.0041	0.0023	0.0008