

F. BASTENAIRE

Étude théorique du mode de génération des distributions granulométriques

Revue de statistique appliquée, tome 11, n° 1 (1963), p. 61-75

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1963__11_1_61_0

© Société française de statistique, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ETUDE THÉORIQUE DU MODE DE GÉNÉRATION DES DISTRIBUTIONS GRANULOMÉTRIQUES (*)

F. BASTENAIRE

Ingénieur au Service Statistique
Institut de Recherches de la Sidérurgie

AVANT-PROPOS

L'idée d'utiliser les concepts de la Statistique pour représenter la variété des dimensions des morceaux d'un produit n'est pas nouvelle mais, à l'heure présente, la bibliographie est beaucoup plus riche en études empiriques de la validité de telle ou telle fonction de distribution qu'en études théoriques expliquant ou justifiant les résultats énoncés. Certains auteurs, toutefois, se sont efforcés de représenter le bris d'un produit par un modèle mathématique et ont cherché à justifier certaines formes de distribution. Aubéry [1], par exemple, a suggéré la distribution log-normale sur la base des hypothèses classiques qui conduisent à cette loi. Epstein [2], en 1947, a cherché à en donner une démonstration rigoureuse en utilisant un modèle approprié de la dégradation d'un produit en morceaux.

Cependant, dans les travaux de ce genre que nous connaissons, la distinction entre la distribution granulométrique telle qu'elle est définie et employée dans l'industrie et la distribution statistique des dimensions des morceaux n'a jamais été posée avec netteté alors que cette distinction est, à notre avis, essentielle.

Les mémoires d'Epstein, par exemple, [2] [3] sont assez obscurs à ce sujet. En fait, les raisonnements d'Epstein sont justes lorsqu'on les interprète comme se rapportant à la dégradation globale de la population mais ils ne s'appliquent, ni à l'étude de la dégradation de chaque morceau, ni à celle de la relation entre ce dernier phénomène et la dégradation de la population.

Nous allons précisément montrer, dans ce travail, qu'il existe un moyen de décrire la dégradation d'un morceau et d'en déduire celle de la population.

A chaque système d'hypothèses relatives au processus de dégradation d'un morceau correspond alors une distribution granulométrique finale déterminée de la population.

(*) Mémoire présenté à la réunion commune de "Institute of Mathematical Statistics", "The Institute of Management Science" et "Econometric Society" à Dublin (Irlande) en Septembre 1962.

I - INTRODUCTION

Malgré leur analogie, les concepts de distribution statistique et de distribution granulométrique ne doivent pas être confondus. Cependant, malgré la différence entre ces deux concepts, on a souvent constaté que les fonctions mathématiques utilisées pour représenter des distributions statistiques conviennent aussi pour représenter des distributions granulométriques.

Nous allons donner une explication de ce fait d'expérience en montrant que l'on peut définir une variable aléatoire dont la distribution statistique est identique à la distribution granulométrique d'un produit donné.

Les raisonnements que nous aurons à faire étant assez délicats, il est nécessaire que nous commençons en donnant des définitions rigoureuses des termes que nous aurons à employer dans la suite.

II - DONNEES DU PROBLEME ET DEFINITIONS

Nous supposerons que la quantité de matière étudiée est illimitée afin de pouvoir raisonner sur des populations infinies.

On peut aussi bien supposer que cette matière est initialement compacte ou divisée. Elle est ensuite soumise, soit à une série d'opérations, soit, plus généralement, à un processus qui a pour effet de la réduire par des divisions successives en des morceaux de dimensions variables.

II.a - Définition de la population considérée

Lorsque le processus de division de la matière est achevé, celle-ci se présente en morceaux de formes et de dimensions bien déterminées. Chaque morceau sera considéré comme un individu et la totalité de la matière disponible, supposée illimitée, comme la population.

II.b - Caractères des individus

Certaines caractéristiques des morceaux sont définies sans ambiguïté : leurs poids et leurs volumes, par exemple.

Il est plus difficile de donner une définition précise de la dimension d'un morceau. Plusieurs définitions, d'ailleurs, sont possibles.

Dans la pratique industrielle, on détermine toujours la distribution granulométrique d'un produit en le faisant passer sur des passoirs (tôles percées de trous ronds) ou des tamis (formés de fils laissant entre eux des vides de forme carrée). Si l'on prend garde de ne pas le détériorer, un morceau donné ou bien passe, d'une certaine façon, dans un trou de diamètre donné ou bien n'y passe d'aucune façon. S'il y passe, il passe aussi dans n'importe quel trou de diamètre plus grand et, s'il n'y passe pas, il ne passe dans aucun trou plus petit. Il existe donc un trou de diamètre minimum au travers duquel un morceau donné peut passer. Ce diamètre est un caractère quantitatif bien défini pour tout morceau.

Ce caractère, bien qu'il ne soit pas aisément mesurable sur chaque morceau, est souvent l'objet d'une étude car il est facile, avec une passoire, de séparer les morceaux dont le diamètre ci-dessus défini est supérieur à une valeur donnée de ceux dont le diamètre est inférieur à cette valeur.

Le raisonnement que nous avons fait pour des trous ronds s'applique

sans changement à des trous carrés et s'appliquerait aussi à des trous de forme plus complexe (polygonale, elliptique d'excentricité donnée, rectangulaire, etc.).

Les morceaux d'un produit divisé possèdent donc de nombreux caractères dont il est possible de donner des définitions précises et, du point de vue du statisticien, le tirage d'un morceau au hasard dans une population de morceaux définit une variable aléatoire à plusieurs dimensions dont on peut très bien ne considérer d'ailleurs que certaines distributions marginales.

II. c - Distributions de fréquences et distributions granulométriques

Nous allons définir, en langage statistique, ce qu'il faut entendre par "distribution granulométrique".

1er Cas - La population de morceaux est finie

Considérons d'abord une population finie de n morceaux et un caractère X de ces morceaux. On sait que la variable aléatoire X peut être entièrement caractérisée par sa fonction de répartition. En désignant par $k(x)$ le nombre des morceaux de la population dont le caractère X est inférieur ou égal à x , cette fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \frac{k(x)}{n} \quad (1)$$

Voyons maintenant comment est définie la distribution granulométrique de X .

En pratique, lorsque X est la grosseur, par exemple, les morceaux pour lesquels $X > x$ sont séparés des morceaux pour lesquels $X \leq x$ et, au lieu de compter les morceaux, on pèse chacune des deux fractions ainsi séparées. La fraction granulométrique en poids est définie par le rapport du poids de la fraction constituée par les morceaux tels que $X \leq x$ au poids de tous les morceaux.

Du point de vue statistique, chaque morceau est un individu qui présente deux caractères : X et son poids P . En désignant par x_i et p_i les valeurs de X et de P se rapportant aux différents individus de la population, la fraction granulométrique en poids des individus tels que $X \leq x$ est donnée par :

$$G_p(x) = \frac{\sum_{x_i \leq x} p_i}{\sum p_i} \quad (2)$$

On voit que la notion de fraction granulométrique est aisément généralisable puisque, une variable aléatoire à deux dimensions U, V , étant donnée, on peut définir la répartition granulométrique de U par rapport à V (on peut dire, plus brièvement, "la répartition de U par rapport à V ") par la fonction suivante de u :

$$\frac{\sum_{u \leq u} v_i}{\sum v_i}$$

En pratique, évidemment, aucune répartition granulométrique n'est aussi commode à déterminer expérimentalement que celle en poids. (La répar-

tition en volume serait toutefois facile à déterminer en immergeant ensemble les morceaux représentant chaque fraction granulométrique dans un liquide convenable et en mesurant le volume de liquide déplacé).

Remarque 1 :

Considérons l'une quelconque des valeurs u_i et soit s_i le nombre des morceaux de la population pour lesquels $U = u_i$. En u_i , la fonction de répartition de U croît de $\frac{s_i}{n}$. Pour que la répartition de U par rapport à V soit identique à la fonction de répartition de U , il faut que :

$$\frac{\sum_{U \leq u} v_i}{\sum v_i}$$

croisse de la même quantité en u_i . Il faut donc que :

$$\frac{\sum_{U=u_i} v_i}{\sum v_i} = \frac{s_i}{n} \quad (3)$$

En particulier, si $s_i = 1$, c'est-à-dire si u_i est une valeur isolée, il faut que :

$$v_i = \frac{\sum v_i}{n}$$

Ainsi donc, les valeurs de V correspondant à des valeurs de U isolées doivent être toutes égales entre elles. Si toutes les valeurs de U sont isolées, il faut que V soit une variable aléatoire certaine pour que la répartition de U par rapport à V soit identique à la répartition de probabilité de U . Si toutes les valeurs de U ne sont pas isolées, les valeurs de V restent toutefois soumises à la condition (3).

Remarque 2 :

La répartition de U par rapport à elle-même existe et est définie par :

$$\frac{\sum_{U \leq u} u_i}{\sum u_i}$$

2ème cas - La population est infinie

Supposons qu'un échantillon d'effectif m ait été tiré au hasard dans une population infinie et soit $k(x)$ le nombre des individus de cet échantillon dont le caractère X est inférieur ou égal à x . On sait que la fréquence relative $\frac{k(x)}{m}$ est une estimation de $\Pr (X \leq x)$ c'est-à-dire de la valeur $F(x)$ de la fonction de répartition de X en x . On a d'ailleurs :

$$E \left[\frac{k(x)}{m} \right] = F(x) \quad (4)$$

De plus, $\frac{k(x)}{m}$ converge en probabilité et en moyenne quadratique vers $F(x)$ lorsque m tend vers l'infini.

Parallèlement aux notions de fréquence et de probabilité, il faut que soient définies les notions de fraction granulométrique dans un échantillon et dans la population. Dans un échantillon, cette fraction granulométrique doit être définie comme dans une population finie par :

$$\frac{\sum_{x \leq x} p_i}{\sum p_i}$$

(en supposant qu'il s'agisse de la fraction en poids). Dans la population, il est légitime, par analogie avec ce qui a lieu pour les notions de fréquence et de probabilité, de la définir par la valeur limite, si elle existe, de $\frac{\sum_{x \leq x} p_i}{\sum p_i}$ lorsque l'effectif m de l'échantillon tiré dans la population tend vers l'infini.

Nous ne nous engagerons pas ici dans une recherche approfondie des conditions d'existence de cette limite et nous nous contenterons d'en mentionner une condition suffisante.

Soit $G_p^m(x)$ la fraction granulométrique dans un échantillon d'effectif m . On a évidemment :

$$G_p^m(x) = \frac{\frac{1}{m} \sum_{x \leq x} p_i}{\frac{1}{m} \sum p_i} \quad (5)$$

Supposons alors que le moment du second ordre de la variable aléatoire P existe. Dans ce cas, $\frac{1}{m} \sum p_i$ tend en moyenne quadratique (donc, en probabilité) vers $E[P]$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

D'autre part, $\frac{1}{m} \sum_{x \leq x} p_i$ est la moyenne de m variables aléatoires égales à P si $X \leq x$ et à 0 si $X > x$. Comme les variables ainsi définies possèdent aussi un moment d'ordre deux $(\int_0^x \int_0^\infty p^2 f(x, p) dx dp)$, la moyenne de ces m variables converge, en moyenne quadratique et en probabilité, vers l'espérance mathématique de chacune d'elle qui est :

$$\int_0^x \int_0^\infty p f(x, p) dx dp \quad (6)$$

$f(x, p)$ désignant la densité de probabilité du couple X, P .

$G_p^m(x)$ étant le rapport de deux quantités qui convergent en probabilité, $G_p^m(x)$ converge lui-même en probabilité vers :

$$\Phi_p(x) = \frac{\int_0^x \int_0^\infty p f(x, p) dx dp}{\int_0^\infty \int_0^\infty p f(x, p) dx dp} \quad (7)$$

En effet, on sait que toute fonction R de variables x, y, \dots, z qui convergent en probabilité vers des limites x_0, y_0, \dots, z_0 respectivement

converge elle-même, si elle est continue en x_0, y_0, \dots, z_0 , vers $R(x_0, y_0, \dots, z_0)$. (H. Cramer en a donné la démonstration pour toute fonction rationnelle dans (4) chapitre 20 p. 254, mais on peut facilement généraliser la démonstration à toute fonction continue).

Remarque 3 :

La variable aléatoire P étant supposée positive, on peut noter que, d'après la définition même de $G_p^m(x)$:

$$0 \leq G_p^m(x) \leq 1 \quad (8)$$

Il résulte de cette double inégalité que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $G_p^m(x)$ existe et nous allons chercher si $E[G_p^m(x)]$ possède une limite lorsque $m \rightarrow \infty$.

Puisque $G_p^m(x)$ converge en probabilité vers $\Phi_p(x)$, il existe un nombre M tel que pour $m \geq M$ on ait :

$$\Pr \{ |G_p^m(x) - \Phi_p(x)| < \varepsilon \} > 1 - \eta \quad (9)$$

$G_p^m(x)$ ne peut donc être extérieur à l'intervalle $\Phi_p(x) - \varepsilon, \Phi_p(x) + \varepsilon$ qu'avec la probabilité η au plus. Comme $G_p^m(x)$ ne peut, d'autre part, être inférieur à zéro, il est facile de minorer l'intégrale qui définit $E[G_p^m(x)]$ et on trouve :

$$E[G_p^m(x)] > (1 - \eta) (\Phi_p(x) - \varepsilon) \quad (10)$$

De même, comme $G_p^m(x)$ ne peut être supérieur à 1, on peut majorer cette même intégrale et il vient :

$$E[G_p^m(x)] < (1 - \eta) (\Phi_p(x) + \varepsilon) + \eta \quad (11)$$

Il suffit alors de poser $\varepsilon = \eta = \frac{\zeta}{2}$ pour tirer de (10) et (11) la double inégalité :

$$\Phi_p(x) - \zeta < E[G_p^m(x)] < \Phi_p(x) + \zeta \quad (12)$$

Ainsi donc $E[G_p^m(x)]$ tend, lorsque m tend vers l'infini, vers $\Phi_p(x)$.

En résumé, la variable aléatoire $G_p^m(x)$, fraction granulométrique dans un échantillon de m morceaux tirés au hasard dans une population de morceaux, tend en probabilité vers une limite $\Phi_p(x)$ dont nous avons donné l'expression et $E[G_p^m(x)]$ tend aussi vers $\Phi_p(x)$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

Il est donc légitime de regarder $\Phi_p(x)$ comme la fraction granulométrique relative à la population.

Remarque 4 :

On peut démontrer que, pour que la distribution granulométrique de X par rapport à P , caractérisée par $\Phi_p(x)$, soit identique à la distribution de probabilité de X , il faut et il suffit que l'espérance mathématique conditionnelle de P par rapport à X soit constante, ce qu'on peut écrire :

$$E[P | X = x] = E[P]$$

La constante devant évidemment être égale à $E [P]$. On peut noter que la condition énoncée dans la remarque (1) pour les populations finies possède exactement la même signification.

III - DEFINITION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DE DISTRIBUTION DE PROBABILITE IDENTIQUE A LA DISTRIBUTION GRANULOMETRIQUE

Supposons qu'on prélève un échantillon par un procédé quelconque (donc, pas nécessairement au hasard) dans une population finie ou infinie de morceaux d'un produit.

Soient x_i, v_i les valeurs de deux caractères X et V des morceaux de l'échantillon (taille et volume par exemple), i servant à désigner les morceaux et variant de 1 à l.

Choisissons au hasard un point R dans la totalité de la matière constituant l'échantillon avec une probabilité uniformément répartie en volume et soient X et V la taille et le volume du morceau contenant le point R.

La probabilité pour qu'un morceau donné, de volume v_i , contienne le point R est, par hypothèse $\frac{v_i}{\sum v_i}$ et la probabilité pour que le point R appartienne à l'un quelconque des morceaux dont la taille X est inférieure ou égale à x est, d'après l'axiome des probabilités totales, $\frac{\sum_{x \leq x} v_i}{\sum v_i}$.

Cette probabilité est donc égale, quel que soit x, à la fraction granulométrique en volume, dans l'échantillon, des morceaux de taille inférieure ou égale à x. En d'autres termes, la fonction de répartition du caractère X du morceau contenant le point R est identique à la répartition granulométrique de X par rapport au volume.

Remarque 5 :

Le lecteur vérifiera aisément que, pour obtenir une variable aléatoire dont la fonction de répartition serait la répartition granulométrique en poids de cette même variable, il suffirait que le point R fût choisi au hasard dans le volume mais avec une densité de probabilité proportionnelle à la densité physique ponctuelle du matériau.

Il faut noter toutefois que le fait qu'on ait défini une variable aléatoire de fonction de répartition identique à la répartition granulométrique n'explique nullement la forme de cette dernière car la distribution de probabilité en question est en fait construite à partir de la répartition granulométrique donnée.

Pour vraiment expliquer la forme d'une distribution granulométrique, il faut montrer comment cette forme résulte du processus qui donne à cette distribution granulométrique son existence, c'est-à-dire du processus de bris ou, plus généralement, de division. Or, la variable aléatoire de fonction de répartition $F(x) = \frac{\sum_{x \leq x} v_i}{\sum v_i}$ n'a été définie qu'une fois ce processus achevé.

Cette remarque va nous amener à rechercher la loi de probabilité a priori du caractère X du morceau qui, le processus de division achevé, con-

tient un point R choisi dans le matériau antérieurement à ce processus c'est-à-dire avant l'épreuve de division.

Considérons donc la matière dans l'un de ses états de division antérieurs à l'état final et soit M un morceau choisi au hasard dans la matière lorsqu'elle est en cet état.

Choisissons encore un point R au hasard dans M avec une probabilité uniformément répartie en volume et considérons maintenant la matière dans son état final : le morceau M est alors divisé en l morceaux de tailles x et de volumes v_i tandis que le point R se trouve dans un certain morceau de taille X et de volume V. Appelons alors E l'événement qui consiste dans le choix du morceau M et dans le fait que M s'est fragmenté en les l morceaux x_i, v_i . Conditionnellement à E, la probabilité que X soit inférieur ou égal à

x est donnée, comme précédemment, par $\frac{\sum_{x \leq x} v_i^{(*)}}{\sum v_i}$. On peut donc écrire :

$$\Pr \{X \leq x \mid E\} = \frac{\sum_{x \leq x} v_i}{\sum v_i} \quad (13)$$

L'équation (13) permet de calculer la probabilité à priori que $X \leq x$ car la probabilité à priori d'un événement quelconque est égale à l'espérance mathématique de sa probabilité conditionnelle(**).

En prenant les espérances mathématiques des deux membres de (13), il vient ainsi :

(*) Nous supposons que la division de M se fait sans aucun changement de volume des parties. Tout fragment occupe, après la division, un volume égal à celui qu'il occupait avant.

(**) Soit en effet Z une variable aléatoire égale à 1 si $X \leq x$ et égale à 0 si $X > x$. D'après la définition même de l'espérance mathématique $E [Z] = \Pr (X \leq x)$. De même, $E [Z/E] = \Pr (X \leq x/E)$. De l'égalité :

$$E [Z] = E [E [Z/E]]$$

valable pour toute variable aléatoire, on tire :

$$\Pr (X \leq x) = E [\Pr (X \leq x/E)]$$

Remarque : On peut aussi parvenir à ce résultat de la façon suivante. Soit A un événement quelconque et B_i des événements disjoints et tels que $\sum_i B_i$ est un événement certain. D'après l'axiome des probabilités composées :

$$\Pr (A B_i) = \Pr (A/B_i) \times \Pr (B_i)$$

L'événement A étant la réunion de tous les événements $A B_i$, l'application de l'axiome des probabilités totales donne :

$$\Pr (A) = \sum_i \Pr (A/B_i) \Pr (B_i)$$

et on voit que le second membre n'est autre que $E [\Pr (A/B_i)]$

$$\Pr \{X \leq x\} = E \left[\frac{\sum_{x \leq x} v_i}{\sum v_i} \right] \quad (14)$$

En fait, l'équation (14) est encore applicable si, au lieu de choisir un seul morceau M et un point R au hasard dans ce morceau, on choisit k morceaux dans la matière dans un état précédant l'état final et le point R au hasard dans le volume total de ces k morceaux. Il suffit, dans la démonstration précédente, de désigner par E l'événement consistant dans le choix de ces k morceaux.

Soit alors $A_j(x)$ la somme des volumes des morceaux de taille inférieure à x provenant de la division du j^{ème} des k morceaux prélevés à l'état initial :

$$A_j(x) = \sum_{x \leq x} v_{ij} \quad (15)$$

et B_j la somme des volumes de tous les morceaux provenant de la division de ce même morceau :

$$B_j = \sum_i v_{ij} \quad (16)$$

D'après l'équation (14), on a :

$$\begin{aligned} \Pr \{X \leq x\} &= E \left[\frac{\sum_j \sum_{x \leq x} v_{ij}}{\sum_j \sum_i v_{ij}} \right] \\ &= E \left[\frac{\sum_j A_j(x)}{\sum_j B_j} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$A_j(x)$ et B_j sont évidemment des variables aléatoires et on peut montrer, comme nous l'avons fait au paragraphe II.c. pour le rapport $\frac{\sum_{x \leq x} p_i}{\sum p_i}$ que

$\frac{\sum_j A_j(x)}{\sum_j B_j}$ converge en probabilité vers une limite égale à $\frac{E[A_j(x)]}{E[B_j]}$ lorsque

k tend vers l'infini, en supposant que $A_j(x)$ et B_j possèdent des moments du second ordre.

Or, il convient de remarquer que $\frac{\sum_j A_j(x)}{\sum_j B_j}$ est la fraction granulométrique en volume des morceaux tels que $X \leq x$ dans le lot de matière obtenu par division des k morceaux pris au hasard dans la matière à un stade antérieur.

La limite vers laquelle tend $\frac{\sum_j A_j(x)}{\sum_j B_j}$ lorsque k tend vers l'infini est la fraction granulométrique des morceaux tels que $X \leq x$ dans la population

obtenue par division d'un nombre infini de morceaux considérés au stade antérieur. C'est donc la fraction granulométrique dans la population considérée au stade final.

Nous avons donné, au paragraphe II, l'expression de cette fraction granulométrique en poids mais tous nos raisonnements sont intégralement transposables à la fraction granulométrique en volume que nous appellerons $\Phi_v(x)$.

Celle-ci est donnée par une équation analogue à (7) :

$$\Phi_v(x) = \frac{\int_0^x \int_0^\infty v g(x, v) dx dv}{\int_0^\infty \int_0^\infty v g(x, v) dx dv} \quad (18)$$

$g(x, v)$ désignant la densité du couple de variables aléatoires X, V pour un morceau choisi au hasard dans la population finale.

On a donc :

$$\frac{E [A_j(x)]}{E [B_j]} = \Phi_v(x) \quad (19)$$

D'autre part, la démonstration de la Remarque 3 du paragraphe II.c. est applicable sans changement à $\frac{\sum_j A_j(x)}{\sum_j B_j}$.

Cette quantité étant nécessairement comprise entre 0 et 1 et convergeant en probabilité vers $\frac{E [A_j(x)]}{E [B_j]}$ lorsque $k \rightarrow \infty$, son espérance mathématique tend aussi vers une limite égale à $\frac{E [A_j(x)]}{E [B_j]}$. On a donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\frac{\sum_j A_j(x)}{\sum_j B_j} \right] = \frac{E [A_j(x)]}{E [B_j]} = \Phi_v(x) \quad (20)$$

En rapprochant les équations (17) et 20), il vient alors :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr \{X \leq x\} = \Phi_v(x)} \quad (21)$$

équation dont la signification est la suivante : En choisissant k morceaux au hasard dans la matière à un stade intermédiaire quelconque du processus de division et un point R au hasard à l'intérieur de ces k morceaux, la probabilité qu'un caractère X du morceau qui, une fois le processus de division achevé contient le point R , soit inférieur ou égal à x tend, lorsque k tend vers l'infini, vers la valeur de la fraction granulométrique en volume des morceaux tels que $X \leq x$ dans la population finale.

Remarque 6 :

On peut répéter ici la remarque 5. Pour obtenir une variable aléatoire dont la fonction de répartition serait la répartition granulométrique en poids, il suffirait de choisir le point R au hasard avec une densité de probabilité proportionnelle à la densité physique ponctuelle de la matière.

Il est donc clairement établi que la répartition granulométrique en volume ou en poids d'un caractère quelconque des morceaux de la population finale est identique à la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont la distribution est déterminée par le processus de division.

IV - RELATION ENTRE LA FORME D'UNE DISTRIBUTION GRANULOMETRIQUE ET LE PROCESSUS DE DIVISION QUI LUI A DONNE NAISSANCE

Nous avons dit que c'est dans le processus de division qu'il faut rechercher une explication de la forme des distributions granulométriques. Pour suivre ce processus, il semble qu'on devrait suivre les transformations d'un morceau déterminé mais, dès qu'un morceau se fragmente, il cesse d'exister et l'on se trouve en présence de deux ou de plusieurs morceaux présentant chacun des caractéristiques propres.

Une manière de définir à tout moment et sans ambiguïté le "descendant" d'un morceau initial est de choisir, comme nous l'avons fait, un point dans ce morceau et de ne s'intéresser qu'à celui de ses fragments qui contient ce point. Contrairement à ce que l'on pourrait craindre, cette méthode ne néglige pas réellement les autres fragments puisque le point est choisi au hasard et qu'il peut appartenir à n'importe lequel de ces fragments.

Nous allons donc considérer, comme au paragraphe III précédent, un point R choisi au hasard dans le volume de k morceaux eux-mêmes choisis au hasard dans la matière à un stade intermédiaire du processus de division qui sera pris comme stade initial.

Considérons un caractère donné des morceaux et des fragments auxquels ils donnent naissance (taille, poids etc.) et soit X la valeur de ce caractère pour celui des k morceaux qui contient R. A priori, la distribution de X peut dépendre de k mais on peut déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini. En effet, on peut vérifier que les équations (13) et (14) sont applicables, a fortiori, lorsqu'il n'y a pas fragmentation. On peut aisément démontrer ensuite, exactement comme nous l'avons fait au paragraphe II et à la remarque 3 de ce paragraphe pour $G_p^m(x)$, que le second membre l'équation (14), soit $E \left[\frac{\sum_{x \leq x} v_i}{\sum v_i} \right]$, tend, lorsque k tend vers l'infini, vers la valeur de la fraction granulométrique dans la matière en morceaux au stade initial (dans les démonstrations du paragraphe III on remplacera p_i par v_i et m par k).

La distribution de la variable aléatoire X tend donc, lorsque k tend vers l'infini, vers celle d'une variable aléatoire que nous désignerons par X_0 qui a pour fonction de répartition la répartition granulométrique de X dans la matière considérée en son état initial. Nous désignerons par $\Phi_0(x)$ cette fonction.

Considérons donc le morceau choisi parmi un très grand nombre de morceaux de la population initiale en prenant un point R au hasard en volume dans ces morceaux et en retenant celui qui contient R. Le caractère X de ce morceau est la variable aléatoire X_0 .

Examinons maintenant ce qui va se passer au cours du processus de division : ce morceau va se fragmenter et le point R va appartenir à un

fragment dont le caractère X est une nouvelle variable aléatoire X_1 . Le processus se poursuivant, ce dernier fragment va se diviser à nouveau et le point R va se retrouver dans un nouveau fragment dont le caractère X est une variable aléatoire X_2 . Si le processus de division continue, le point R va appartenir ainsi successivement à des fragments dont le caractère X est X_3, X_4, \dots, X_r .

La suite de variables $X_0, X_1, X_2, \dots, X_r$ caractérise les phases successives du processus de division. D'ailleurs, l'équation (21) appliquée à un processus consistant dans les i premières phases seulement du processus total montre que la fonction de répartition de la variable aléatoire X_i est identique, quel que soit i , à la répartition granulométrique de la matière à la fin de la $i^{\text{ème}}$ phase.

En général, les variables $X_0, X_1, X_2, \dots, X_r$ ne seront pas indépendantes. Si X est un caractère tel que le poids ou le diamètre minimum, on aura, en particulier :

$$X_0 \geq X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_r \quad (22)$$

Cependant, il se peut qu'un changement de variables permette de remplacer $X_0, X_1, X_2, \dots, X_r$ par un système de variables indépendantes. Il est toutefois impossible de prouver qu'un tel changement de variables existe toujours et nous entrons ici dans le domaine des hypothèses.

Posons, par exemple :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{X_1}{X_0} \\ t_2 &= \frac{X_2}{X_1} \\ &\text{-----} \\ t_{r-1} &= \frac{X_{r-1}}{X_{r-2}} \\ t_r &= \frac{X_r}{X_{r-1}} \end{aligned} \quad (23)$$

et supposons que $X_0, t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, t_r$ soient des variables aléatoires indépendantes. Du système des des équations (23), on déduit par multiplication membre à membre :

$$\frac{X_r}{X_0} = t_1 t_2 \dots t_{r-1} t_r \quad (24)$$

d'où

$$\log X_r = \log X_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \log t_i \quad (25)$$

On sait que, sous des conditions très larges, la distribution de probabilité de la somme d'un nombre de variable aléatoires qui tend vers l'infini tend vers une distribution normale. Si ces conditions sont remplies par X_0 et les variables t_i et si r est assez grand, $\log X_r$ possède une distribution normale et X_r une distribution log-normale.

Une autre hypothèse est possible. Posons :

$$\begin{array}{r}
X_0 - X_1 = \varepsilon_1 \\
X_1 - X_2 = \varepsilon_2 \\
\hline
X_{r-1} - X_r = \varepsilon_r
\end{array}
\tag{26}$$

et supposons que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ vérifient les conditions exigées pour que $\sum \varepsilon_i$ tende vers une variable normale lorsque $r \rightarrow \infty$. Par addition membre à membre des équations (26) on obtient :

$$X_0 - X_r = \sum_1^r \varepsilon_i \tag{27}$$

d'où

$$X_r = X_0 - \sum_1^r \varepsilon_i \tag{28}$$

X_r est alors distribué normalement si r est assez grand et si X_0 n'est pas prépondérant.

Ce schéma décrit la division d'un matériau dont les morceaux diminuent de grosseur par abrasion ou écaillage c'est-à-dire par la perte de particules de dimensions assez constantes mais petites devant celles des morceaux dont elles proviennent. Le matériau comprend alors, d'une part, des gros morceaux de dimensions diverses et d'autre part, de très nombreux et très petits fragments (poussière). Si, l'on considère un point R d'un morceau pris au stade initial, deux cas sont possibles, ou bien R appartiendra au stade final à un gros morceau, ou bien R passera dans la "poussière". Or il faut, dans l'équation (28), que tous les ε_i soient du même ordre de grandeur pour que X_r ait une distribution normale. Si l'on admet que chaque ε_i correspond à une particule, on admet implicitement, en écrivant l'équation (28), que le morceau dont on a suivi l'évolution n'a diminué de grosseur que par la perte de particules. Ce doit être un "gros morceau".

La distribution de probabilité du caractère X du morceau qui contient le point R à l'état final n'est donc normale que conditionnellement à ce que R appartienne à un gros morceau à l'état final. Or, désignant cet événement par H, on peut démontrer, en reprenant la démonstration du paragraphe III, que l'équation (21) admet la généralisation suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{Pr X \leq x/H\} = \Phi_v(x/H) \tag{29}$$

où $\Phi_v(x/H)$ représente la répartition granulométrique des gros morceaux. C'est donc la répartition granulométrique des gros morceaux supposés séparés de la poussière qui est normale.

Un troisième schéma est susceptible de représenter un processus de division : supposons qu'il existe une fonction Ψ telle que les différences $\Psi(X_0) - \Psi(X_1), \Psi(X_1) - \Psi(X_2), \dots, \Psi(X_{r-1}) - \Psi(X_r)$ soient des variables aléatoires indépendantes et qu'il n'y ait aucune de ces variables qui soit non négligeable par rapport à leur somme. La somme de ces variables $\Psi(X_0) - \Psi(X_r)$ suit alors une loi voisine de la normale si r est assez grand. Si $\Psi(X_0)$ n'a pas non plus un rôle prépondérant, $\Psi(X_r)$ est aussi distribué normalement.

Dans la pratique, on constate souvent que les petits morceaux se brisent beaucoup plus difficilement que les gros. La loi de probabilité de X_r dépend

donc de la valeur de X_{r-1} et un moyen de représenter cette dépendance entre les variables aléatoires $X_0, X_1, X_2, \dots, X_r$ serait encore d'admettre, par exemple, que cette suite forme une chaîne de Markov d'ordre 1. On se trouverait alors en présence d'un système défini par une variable continue changeant d'état de façon discontinue, ce qui est un cas de chaîne de Markov qui a déjà donné lieu à des études.

Ce qu'il faut noter, c'est que, dans tous les cas, X_r est fonction d'un grand nombre de variables aléatoires. On peut donc s'attendre à ce que moyennant des transformations diverses, la loi normale permette de décrire la plupart des distributions granulométriques.

V - APPLICATIONS

La notion de distribution granulométrique est d'un emploi très fréquent. En effet, nombreux sont les matériaux utilisés par l'industrie qui se présentent sous forme de morceaux d'inégales grosseurs résultant du bris de morceaux plus gros. C'est le cas par exemple des charbons, des cokes, des minerais, des matériaux de construction extraits du sol etc.

Dans la plupart des emplois qu'on en fait, les propriétés des matériaux divisés dépendent fortement de la répartition des grosseurs des morceaux qui les constituent. C'est pourquoi il est très important de connaître cette répartition que l'on décrit, en pratique, non par une distribution de fréquences comme celles que les statisticiens connaissent mais par une distribution granulométrique.

Cependant, on peut se demander si, en dehors de ces applications classiques, la notion de distribution granulométrique ne pourrait pas être employée dans d'autres cas.

D'un bout à l'autre de cette étude, nous avons employé les termes de "processus de division" avec l'idée d'atteindre une certaine généralité. La parenté que nous avons établie entre une distribution granulométrique et le mécanisme de division d'un matériau indique bien, en effet, que la notion de distribution granulométrique pourrait éventuellement servir dans les cas où les individus d'une population résultent d'un partage. Il en existe plusieurs exemples dans le domaine économique (répartition des fortunes, des revenus, des productions des entreprises etc.). Dans un tout autre domaine on peut encore mentionner comme exemple la structure d'un solide polycristallin. Il est intéressant de noter, à ce sujet, que certains expérimentateurs ont trouvé, pour la grosseur des grains d'un métal, des répartitions logarithmico-normales [5].

REFERENCES

- [1] J. AUBERY - La composition granulométrique des charbons - Ajustement mathématique. Revue de l'Industrie Minérale (1937) p. 178.
- [2] B. EPSTEIN - The mathematical description of certain breakage mechanisms leading to a logarithmico-normal distribution for particle size. Journal of the Franklin Institute (Décembre 1947) p. 471-477.
- [3] B. EPSTEIN - Logarithmico-normal distribution in breakage of solids. Industrial and engineering chemistry - Vol. 40, n° 12 (1948) p. 2289-91.

- [4] H. CRAMER - Mathematical methods of statistics. Princeton University Pres. (1957).
- [5] W. DICKENSCHIED - Une méthode de calcul des grains et son application. Métaux n° 341 (1954) p. 14.