

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. AGARD

Estimateurs et intervalles de confiance de l'écart-type d'une loi normale et de la moyenne d'une loi exponentielle

Revue de statistique appliquée, tome 9, n° 2 (1961), p. 27-35

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1961__9_2_27_0

© Société française de statistique, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATEURS ET INTERVALLES DE CONFIANCE DE L'ÉCART-TYPE D'UNE LOI NORMALE ET DE LA MOYENNE D'UNE LOI EXPONENTIELLE

J. AGARD

Docteur ès-Sciences

C'est un fait bien connu que les moments d'ordre 1 et 2 sont des estimateurs à variance minimum formant un résumé exhaustif de la moyenne m et de l'écart-type σ d'une loi normale. Il en est de même du moment d'ordre 1 pour la moyenne $\frac{1}{\lambda}$ de la loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x}$.

En étudiant divers estimateurs de σ et de λ on peut cependant constater que les estimateurs classiques peuvent être remplacés par d'autres sans élargir beaucoup l'intervalle de confiance. En particulier, le moment absolu d'ordre 1 est un estimateur sans biais du σ de la loi normale ayant une dispersion à peine supérieure à celle de l'estimateur fourni par le moment d'ordre 2. Cette remarque nous paraît utile car le calcul de $E(|X - m|)$ est plus facile que celui de $E[(X - m)^2]$ et il peut être associé au calcul de $E(X)$.

Nous calculons ici les estimateurs de σ et de λ par les moments absolus d'ordre α , ainsi que les écarts types de ces estimateurs. Lorsque le nombre d'observations n de l'échantillon observé est grand, la distribution d'échantillonnage des divers estimateurs est la loi normale. Le principe du calcul consiste à partir du moment absolu d'ordre α , puis à calculer l'écart-type du moment absolu d'ordre α et, connaissant cet écart-type, à en déduire l'écart-type de l'estimateur.

Dans le cas de la loi normale, nous supposons la moyenne connue et nous nous ramenons à la variable aléatoire centrée. Si la moyenne n'est pas connue, on peut l'estimer par $E(X)$, mais la démonstration qui suit n'est plus rigoureuse, quoique ses résultats nous semblent encore valables.

I - ESTIMATION DE L'ECART-TYPE σ DE LA LOI NORMALE.

$$\begin{aligned} E(|X|^\alpha) &= 2 \int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = \int_0^\infty \frac{(\sqrt{2}\sigma)^\alpha}{\sqrt{\pi}} X^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} e^{-X} dX \\ &= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

La variance de ce moment absolu d'ordre α :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha}^2 &= \mathbf{E} \left[\left(|\mathbf{X}|^{\alpha} - \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \right] = \mathbf{E} (|\mathbf{X}|^{2\alpha}) - \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{2\alpha}}{\pi} \Gamma^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= (\sqrt{2}\sigma)^{2\alpha} \left[\frac{\Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\Gamma^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)}{\pi} \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi estimer σ par l'intermédiaire du moment d'ordre α :

$$\hat{\sigma}_{\alpha} = \left[\frac{\sqrt{\pi} \mathbf{E} [|\mathbf{X}|^{\alpha}]}{\Gamma \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma$$

Lorsque pour la population normale considérée, on a mesuré un nombre n d'observations suffisamment grand, on sait que la probabilité que $\mathbf{E} [|\mathbf{X}|^{\alpha}]$ soit compris entre $\frac{(\sqrt{2}\sigma)^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) \pm t \Sigma_{\alpha}$ est fournie par la probabilité $\mathbf{P}(t)$ (1)

que la variable aléatoire normée réduite \mathbf{T} soit comprise entre $\pm t$. On a ainsi une probabilité $\mathbf{P}(t)$ que, avec n observations, $\hat{\sigma}_{\alpha}$ soit compris entre :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{t}{\sqrt{n}} (\sqrt{2}\sigma)^{\alpha} \left[\frac{\Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\Gamma^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

ou :

$$\sigma \left\{ 1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

Si n est assez grand, $\hat{\sigma}_{\alpha} - \sigma$ aura approximativement $\mathbf{P}(t)$ chances d'être compris entre :

$$\pm \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \frac{1}{|\alpha|} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque n est grand, l'écart-type $\hat{\Sigma}_{\alpha}$ de l'estimateur $\hat{\sigma}_{\alpha}$ est donc approximativement :

$$\hat{\Sigma}_{\alpha} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{1}{|\alpha|} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(1) Dans toute la suite $\mathbf{P}(t)$ sera la loi de Laplace Gauss d'une variable aléatoire centrée et normée.

Résumons sur un tableau les caractéristiques de quelques estimateurs :

$E(X) = m$	\hat{X} a pour écart-type :	σ
$E(X) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2)$	$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E(X)$	$\sigma_{\hat{\sigma}_1} = \sigma \sqrt{\frac{\pi - 2}{2n}} = \frac{0,75\sigma}{\sqrt{n}}$
$E(X^2) = \sigma^2$	$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{E(X^2)}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{0,705\sigma}{\sqrt{n}}$
$E(X^4) = 3\sigma^4$	$\hat{\sigma}_4 = \left[\frac{E(X^4)}{3} \right]^{\frac{1}{4}}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_4} = \sigma \sqrt{\frac{2}{3n}} = \frac{0,814\sigma}{\sqrt{n}}$
$E(X ^{\frac{1}{2}}) = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$	$\hat{\sigma}_{\frac{1}{2}} = 1,48 E(X ^{\frac{1}{2}})^2$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{\frac{1}{2}}} = \sigma \frac{0,85}{\sqrt{n}}$
$E(X ^{\frac{1}{10}}) = (\sqrt{2}\sigma)^{\frac{1}{10}} \Gamma\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2}\right)$	$\hat{\sigma}_{\frac{1}{10}} = 1,78 E(X ^{\frac{1}{10}})^{10}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{\frac{1}{10}}} = \sigma \frac{1,03}{\sqrt{n}}$
$E(X ^{-\frac{1}{10}}) = (\sqrt{2}\sigma)^{-\frac{1}{10}} \Gamma\left(\frac{19}{20}\right)$	$\hat{\sigma}_{-\frac{1}{10}} = 2 E(X ^{-\frac{1}{10}})^{-10}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{-\frac{1}{10}}} = \sigma \frac{1,23}{\sqrt{n}}$
$E(X ^{-1}) = (\sqrt{2}\sigma)^{-1} \Gamma(0)$	$\hat{\sigma}_{-1} = \infty$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{-1}} = \sigma \frac{\infty}{\sqrt{n}}$

(les moments d'ordre $\alpha \leq -1$ ne sont pas bornés
l'écart-type des moments $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ n'est pas borné)

On vérifie bien que le moment d'ordre 2 est le meilleur estimateur de σ . En effet, si nous prenons la dérivée de $\hat{\sigma}_\alpha$ par rapport à α , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sigma \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)} \left[\psi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) \right] \right]$$

où :

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)}$$

On peut vérifier que si nous prenons $\alpha = 2$, on a :

$$\frac{0,705}{\sqrt{n}} \sigma \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{\pi 3}{4} - \frac{\pi}{4}} [\psi(1,5) - \psi(0,5)] \right]$$

Comme :

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

(1) (Voir Tables Universelles de Marcel Boll p.571 Dunod).

(2) (Voir Mathematical Methods of Statistics. Cramer p.485 Princeton).

On a :
$$\psi(1,5) - \psi(0,5) = \frac{2}{3}$$

et la dérivée est bien nulle.

Sur le graphique joint nous avons tracé la courbe du coefficient de $E[|X|^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'estimateur $\hat{\sigma}_{\alpha}$ de σ (courbe I) et la courbe du coefficient de σ dans $\hat{\sigma}_{\alpha}$ (courbe II). On peut remarquer que la courbe (II) a un minimum très plat, de sorte que l'écart-type de l'estimateur σ_{α} varie peu entre $\frac{1}{2} < \alpha < 4$.

Lorsque $\alpha = 0$, il faut calculer le développement de $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ au voisinage de

x pour trouver la limite de
$$\frac{1}{|\alpha|\sqrt{n}} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$
 = qui prend pour $\alpha = \frac{1}{2}$

une forme indéterminée.

Pour vérifier la validité de la méthode, nous avons tiré plusieurs échantillons de populations normales de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma = \frac{1}{2}$, et nous avons estimé σ par les moments absolus d'ordre $\frac{1}{2}$, 1 et 2 ; les résultats de ces calculs sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Expérience	Moyenne observée	$\hat{\sigma}_{\frac{1}{2}}$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	n	$\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$
1	0,0038	0,592	0,589	0,596	250	0,022
2	0,029	0,478	0,507	0,509	100	0,035
3	0,050	0,468	0,476	0,481	100	0,035

n = nombre d'observations.

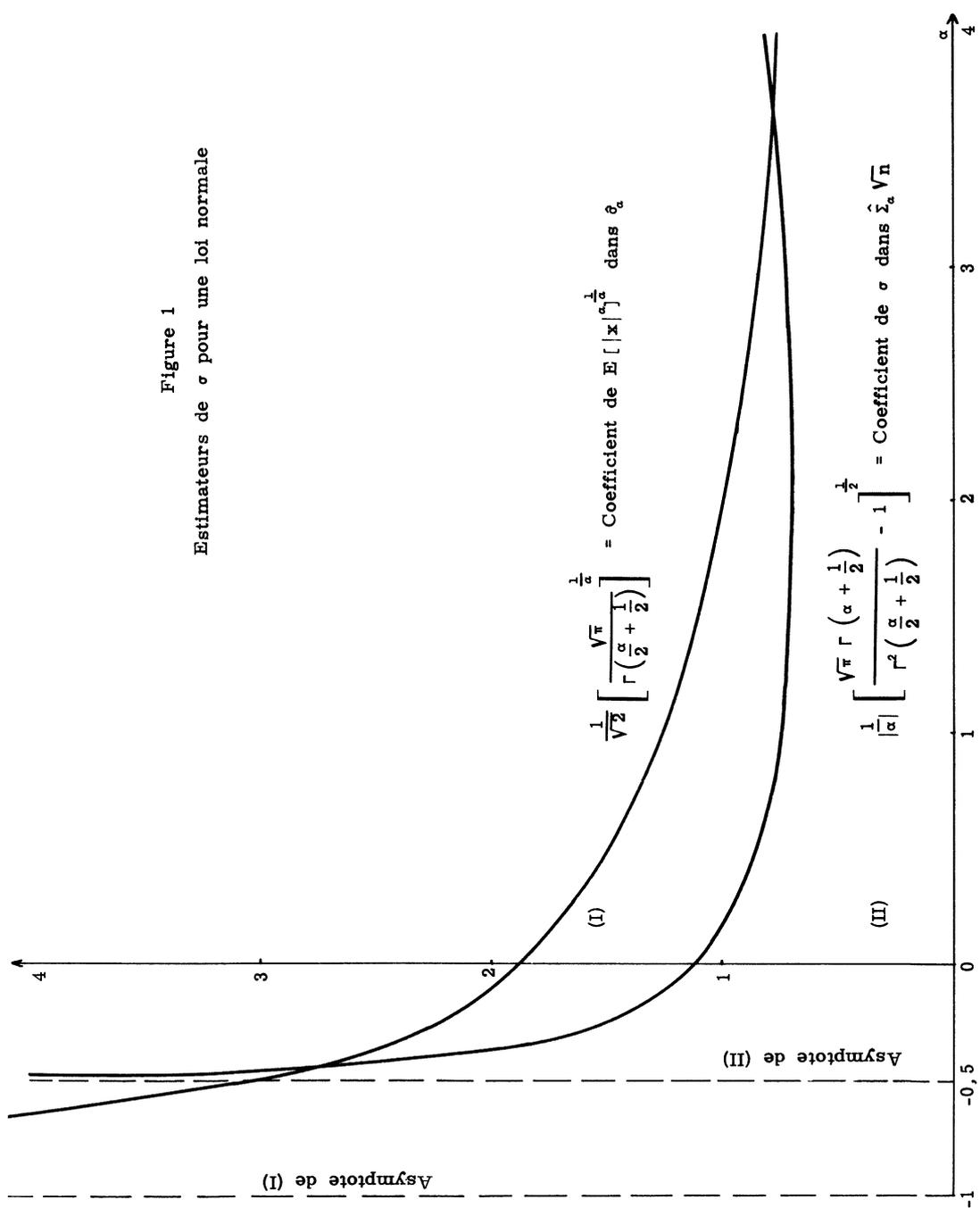
Le premier échantillon est mauvais et le test χ^2 rejette l'hypothèse de sa normalité. Néanmoins, pour cet échantillon comme pour les autres, on constate que les trois estimateurs de σ sont cohérents et leurs différences sont inférieures à $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$. A l'exception du premier exemple, les trois estimateurs sont à moins de $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ de $\sigma = \frac{1}{2}$ valeur théorique de l'écart-type.

Remarque : Nous indiquons ici l'estimateur de σ obtenu à partir de $E[\text{Log}|x|]$ et son écart-type :

$$E[\text{Log}|x|] = 2 \int_0^{\infty} \text{Log } x \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \left(\text{Log } \sqrt{2}\sigma + \frac{\text{Log } y}{2} \right) dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \text{Log } \sqrt{2}\sigma + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \text{Log } y \, dy$$

Figure 1
 Estimateurs de σ pour une loi normale



Or :
$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \text{Log } y \, dy = \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} \, dy \quad \text{pour } \alpha = -\frac{1}{2}$$

Donc :
$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \text{Log } y \, dy = \Gamma'(1 - \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}) \psi(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{\pi} [C + 2 \text{Log } 2]$$

$$E[\text{Log } |x|] = \text{Log } \sqrt{2} \sigma - \frac{C + 2 \text{Log } 2}{2}$$

C = constante d'Euler
= 0,5772...

28

d'où :

$$\hat{\sigma}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{[E[\text{Log } |x|] + \frac{C}{2} + \text{Log } 2]}$$

$$\begin{aligned} E[\text{Log}^2|x|] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} \left[\text{Log } \sqrt{2} \sigma + \frac{\text{Log } y}{2} \right]^2 y^{-\frac{1}{2}} \, dy \\ &= [\text{Log } \sqrt{2} \sigma]^2 - [\text{Log } \sqrt{2} \sigma] (C + 2 \text{Log } 2) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \text{Log}^2 y \, dy. \end{aligned}$$

Or :
$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \text{Log}^2 y \, dy = \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} \, dy \quad \text{pour } \alpha = -\frac{1}{2}$$

Donc :
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} \text{Log}^2 y \, dy &= \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left[\psi'\left(-\frac{1}{2}\right) + \psi^2\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\psi'\left(\frac{1}{2}\right) + \pi^2 + \psi^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 25,978 \end{aligned}$$

car :
$$\frac{\Gamma''(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} = \psi'(\alpha) + \left(\frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2 \quad \text{et } \psi(-x) = \psi(x) - \frac{\pi}{\text{tg } \pi x}$$

$$\text{Var} [\text{Log}(|x|)] = \frac{\pi^2 + \psi'\left(\frac{1}{2}\right)}{4} = 2,7005$$

Lorsqu'on dispose d'un très grand nombre d'observations, n, on aura P(t) chances que $\text{Log } |x| + \frac{C + 2 \text{Log } 2}{2}$ soit compris entre $\text{Log } \sqrt{2} \sigma \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{2,7}$

et de même pour que $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\text{Log } |x| + \frac{C + 2 \text{Log } 2}{2}}$ soit compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\text{Log } \sqrt{2} \sigma \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{2,7}}$

Donc, $\hat{\sigma}_L$ aura P(t) chances d'être compris entre $\sigma e^{\pm \frac{t\sqrt{2,7}}{\sqrt{n}}}$ soit $\sigma \left(1 \pm \frac{t\sqrt{2,7}}{\sqrt{n}}\right)$

On peut donc dire que $\hat{\sigma}_L$ est un estimateur de σ dont l'écart-type est égal à $\sigma \sqrt{\frac{2,7}{n}} = \frac{1,65}{\sqrt{n}} \sigma$. Cet estimateur a un écart-type presque double de celui de variance minimum.

II - ESTIMATION DU PARAMETRE λ D'UNE LOI EXPONENTIELLE -

Soit la loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x}$. L'espérance mathématique de son moment d'ordre α est, à condition que $\alpha > -1$ pour que le moment ait un sens :

$$E [x^\alpha] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x^\alpha dx = \lambda^{-\alpha} \Gamma (\alpha + 1)$$

Le moment d'ordre α est donc un estimateur de λ avec :

$$\hat{\lambda}_\alpha = \Gamma (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} E [x^\alpha]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

L'écart-type du moment d'ordre α est :

$$\lambda^{-\alpha} [\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsqu'on dispose de n observations et que n tend vers l'infini, on sait que, t étant la variable normale centrée réduite, on a $P(t)$ chances que $E(x^\alpha)$ soit compris entre $\lambda^{-\alpha} \Gamma (\alpha + 1) \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha} [\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)]^{\frac{1}{2}}$.

Donc, on peut dire qu'il y a $P(t)$ chances que $\hat{\lambda}_\alpha$ soit compris entre :

$$\Gamma (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\lambda^{-\alpha} \Gamma (\alpha + 1) \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha} [\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)]^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

où :

$$\lambda \left[1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \left(\frac{\Gamma (2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, l'estimateur $\hat{\lambda}_\alpha$ suit une loi normale de moyenne λ et d'écart-type égal à :

$$\hat{\Sigma}_\alpha = \frac{\lambda}{|\alpha| \sqrt{n}} \left(\frac{\Gamma (2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous avons tracé les courbes du coefficient de $E(x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ dans $\hat{\lambda}_\alpha$ et de λ dans $\hat{\Sigma}_\alpha$.

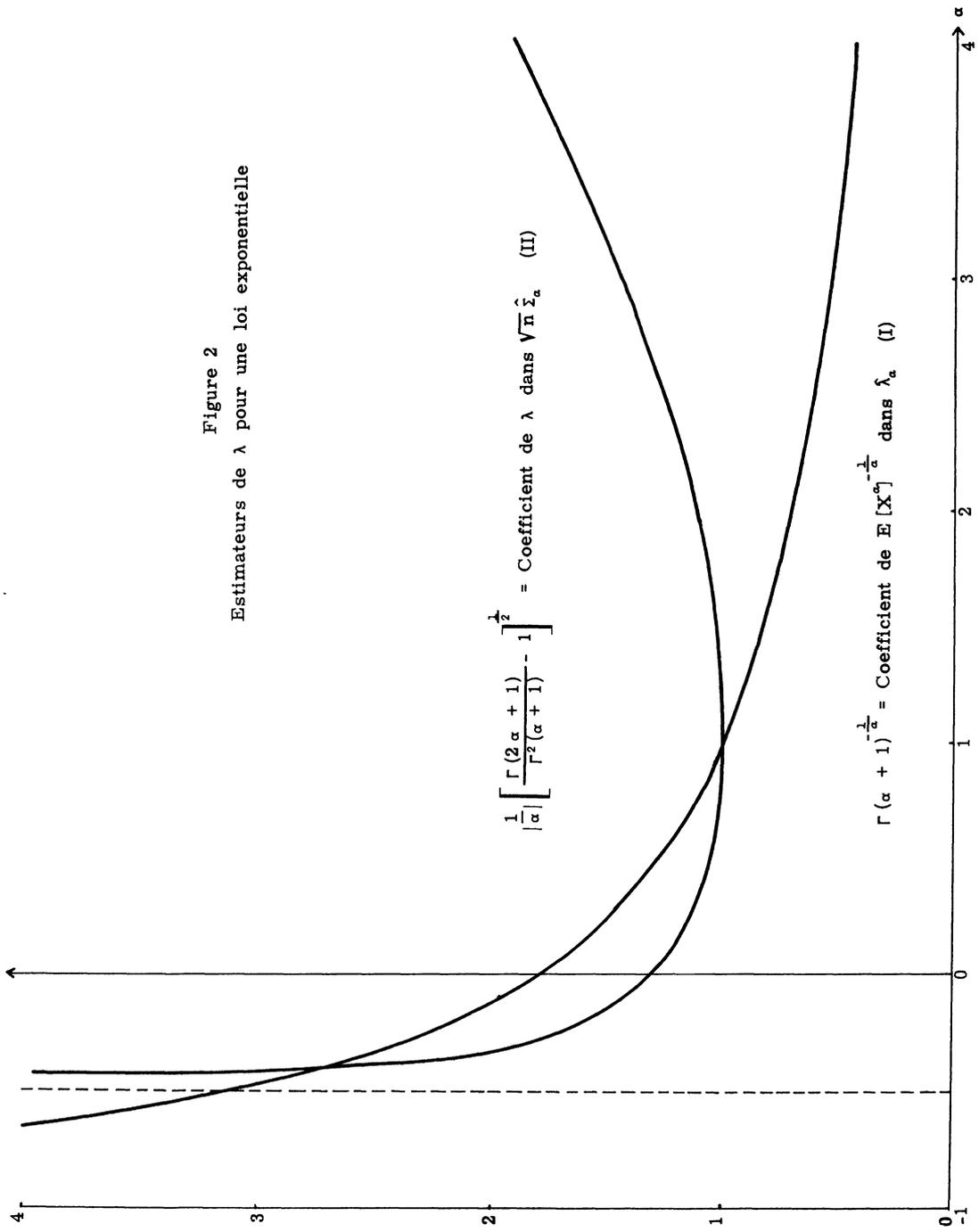
La dérivée de $\hat{\Sigma}_\alpha$ est :

$$\frac{1}{\alpha \sqrt{n}} \left[\frac{\Gamma (2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma (2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} (\psi(2\alpha) - \psi(\alpha)) \right]$$

où :

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}$$

Figure 2
Estimateurs de λ pour une loi exponentielle



On constate que cette dérivée s'annule en $\alpha = 1$, ce qui est connu : l'estimateur à variance minimum de λ dans la loi exponentielle est le moment d'ordre 1.

Estimation de λ par $E[\text{Log } x]$:

$$\begin{aligned} \text{On aura : } E[\text{Log } x] &= \int_0^{\infty} \lambda \text{Log } x e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} [\text{Log } X - \text{Log } \lambda] e^{-X} dX \\ &= \int_0^{\infty} e^{-X} \text{Log } X dX - \text{Log } \lambda \quad \text{avec } X = \lambda x \end{aligned}$$

La première intégrale est la dérivée de $\Gamma(\alpha + 1)$ en $\alpha = 0$.

$$\text{Donc : } E[\text{Log } x] = [\Gamma(\alpha + 1) \psi(\alpha) - \text{Log } \lambda]_{\alpha=0} = -C - \text{Log } \lambda$$

$$C = \text{constante d'Euler} = \psi(0)$$

On aura :

$$\hat{\lambda}_L = \frac{1}{e^{E[C + \text{Log } x]}}$$

La variance de $\text{Log } x$ sera $E[\text{Log}^2 x] - (C + \text{Log } \lambda)^2$

$$\begin{aligned} E[\text{Log}^2 x] &= \int_0^{\infty} [\text{Log } X - \text{Log } \lambda]^2 e^{-X} dX \quad (X = \lambda x) \\ &= \int_0^{\infty} \text{Log}^2 X e^{-X} dX - 2 \text{Log } \lambda \int_0^{\infty} \text{Log } X e^{-X} dX + \text{Log}^2 \lambda \\ &= [\Gamma''(\alpha + 1) - 2 \text{Log } \lambda \Gamma'(\alpha + 1)]_{\alpha=0} + \text{Log}^2 \lambda \\ &= \frac{\pi^2}{6} + C^2 + 2 C \text{Log } \lambda + \text{Log}^2 \lambda \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\text{Log } x) = \frac{\pi^2}{6}$$

Il y a $P(t)$ chances que $E[\text{Log}(x) + C]$ soit compris entre $-\text{Log}(\lambda) \pm \frac{t\pi}{\sqrt{6n}}$

avec un grand nombre n d'observations ou encore que $e^{-E[\text{Log}(x) + C]}$ soit compris entre :

$$e^{\text{Log}(\lambda) \pm \frac{t\pi}{\sqrt{6n}}} = \lambda \left(1 \pm \frac{t\pi}{\sqrt{6n}} \right)$$

On peut dire que $\hat{\lambda}_L$ est un estimateur d'écart-type $\lambda \frac{\pi}{\sqrt{6n}} = \frac{1,28\lambda}{\sqrt{n}}$. Il

est beaucoup moins satisfaisant que les estimateurs avec moments d'ordre α pour $0 < \alpha < 2,5$.