REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

PHILIPPE FORMERY

Probabilité pour que simultanément (X soit superieur à A - Y soit supérieur à B) dans une loi de Laplace-Gauss à deux variables X et Y

Revue de statistique appliquée, tome 8, nº 2 (1960), p. 87-98
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_2_87_0>

PROBABILITÉ POUR QUE SIMULTANÉMENT
(X soit superieur à A – Y soit supérieur à B)
DANS UNE LOI DE LAPLACE-GAUSS A DEUX VARIABLES X ET Y

par Philippe FORMERY

ingénieur civil des mines

I - POSITION DU PROBLEME -

On se propose de calculer la probabilité pour que le point aléatoire (x,y) se trouve dans le domaine : x supérieur à a, y supérieur à b.

Afin de simplifier les notations, prenons l'origine des axes au centre de la distribution. La loi de probabilité de Laplace-Gauss est alors de la forme :

$$d^2P = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{s_x^2} - \frac{2rxy}{s_x s_y} + \frac{y^2}{s_y^2}\right]}\ \frac{dx}{s_x}\cdot\frac{dy}{s_y}$$

que l'on peut écrire :

$$d^2P = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2s_x^2}}\ e^{-\frac{1}{2s_y^2(1-r^2)}\left(y - r\frac{s_y}{s_x}x\right)^2}\ \frac{dx}{s_x}\cdot\frac{dy}{s_y}$$

Faisons le changement de variables défini par la droite de régression de y en x :

$$X = \frac{x}{s_x}\,; \quad Y = \left(y - r\frac{s_y}{s_x}x\right)\frac{1}{s_y\sqrt{1-r^2}}$$

Le nouvel élément d'aire est :

$$dX\,dY = \frac{dx\,dy}{s_x\,s_y\sqrt{1-r^2}}$$

et la fonction devient :

$$d^2P = \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi}\quad dX\,dY$$

à intégrer dans le domaine défini par les deux droites :

$$\begin{cases} X = \dfrac{a}{s_x} & \text{(D)} \\[2ex] Y = (b - r\,s_y\,X)\dfrac{1}{s_y\sqrt{1-r^2}} & \text{(D')} \end{cases}$$

II - DEFINITION DU DOMAINE D'INTEGRATION -

Soit OX' le demi-axe orienté d'angle polaire i. Définissons la droite D par $\overline{OH}$:

$$\boxed{\overline{OH} = \frac{a}{s_x}}$$

et la droite D' par i et $\overline{OK}$:

$$\boxed{r = \cos i}$$

L'équation de D' peut s'écrire :

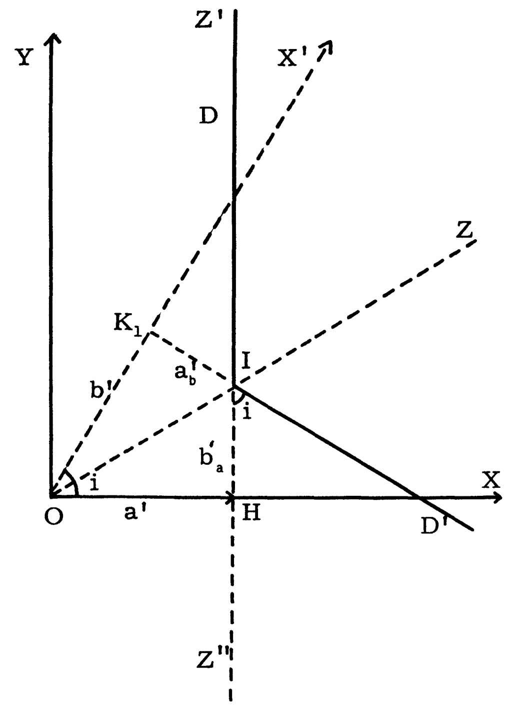
$$X \cos i + Y \sin i - \frac{b}{s_y} = 0 \qquad \text{(D')}$$

D'où :

$$\boxed{\overline{OK} = \frac{b}{s_y}}$$

On a en outre, en projetant le contour OHIK sur OX' :

$$\overline{OH} \cos i + \overline{HI} \sin i = \overline{OK}$$



$$\overline{HI} = \frac{1}{\sin i}\left(\frac{b}{s_y} - \frac{a}{s_x}\cos i\right)$$

$$\boxed{\overline{HI} = \frac{1}{s_y\sqrt{1 - r^2}}\left(b - ar\frac{s_y}{s_x}\right)}$$

et en projetant le contour OHIK sur OX :

$$\overline{OH} + \overline{IK} \sin i = \overline{OK} \cos i$$

$$\overline{IK} = \frac{1}{\sin i}\left(\frac{b}{s_y}\cos i - \frac{a}{s_x}\right)$$

$$\boxed{\overline{KI} = \frac{1}{s_x\sqrt{1 - r^2}}\left(a - br\frac{s_x}{s_y}\right)}$$

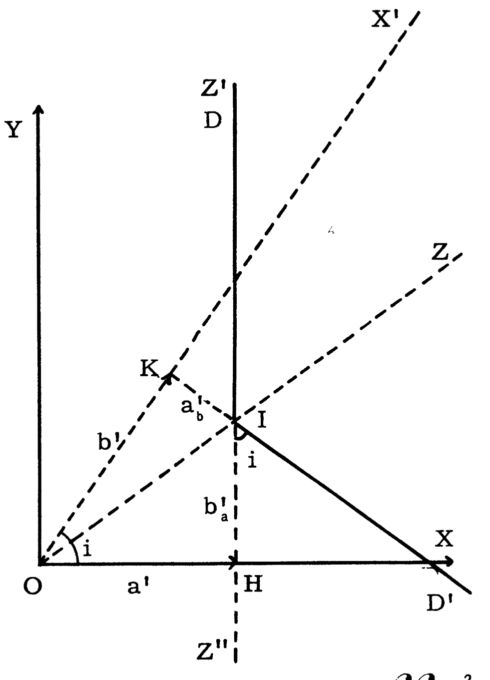
On remarque que :

$\overline{OH}$ est la valeur réduite de a dans la loi marginale des x, soit a'

$\overline{OK}$ est la valeur réduite de b dans la loi marginale des y, soit b'

$\overline{HI}$ est la valeur réduite de b dans la loi marginale de y lié par x = a, soit :

$$\boxed{b'_a = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}(b' - ra')}$$



$\overline{KI}$ est la valeur réduite de a dans la loi de x lié par y = b, soit

$$\boxed{a'_b = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} (a' - r\, b')}$$

La probabilité pour que x soit supérieur à a, y supérieur à b s'exprime au moyen de trois paramètres seulement : les variables réduites a' et b' et le coefficient de corrélation r.

Ceci posé, la Probabilité pour que x soit supérieur à a, y supérieur à b dans la loi de Laplace-Gauss est mesurée par la valeur de l'intégrale :

$$\iint_{(D'ID)} \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi} \, dX\, dY$$

dans le domaine (D'ID) ou encore par la somme de l'intégrale de :

$$\iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi} \, dX\, dY$$

dans le domaine (ZIZ') et de l'intégrale de :

$$\iint_{(D'IZ)} \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi} \, dX\, dY$$

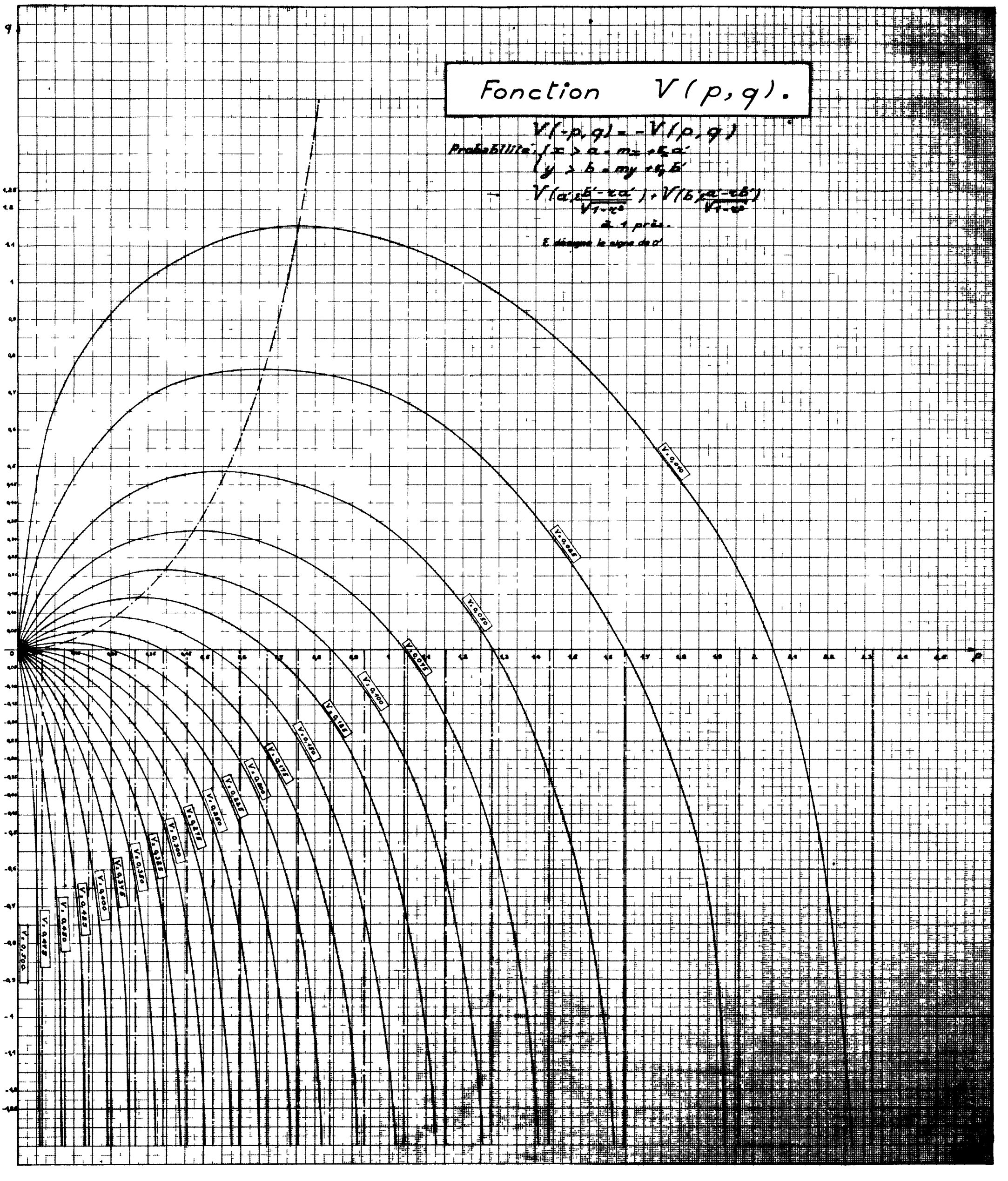
dans le domaine (D'IZ).

On est donc amené à définir et à étudier l'intégrale de $\iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi} \, dX\, dY$

dans le domaine (ZIZ') défini par les coordonnées cartésiennes p et q de I, ou par l'abscisse p de I et l'angle polaire α de OI. On désignera par V(p, q) ou V(p, α)

la fonction du point I mesurant l'intégrale : $\iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi} \, dX\, dY$. Afin que soit

vraie, quel que soit le cas de figure, la formule énoncée plus bas, on envisagera toujours l'angle ZIZ' inférieur à π. On affectera du signe + la fonction V (p, q) ou V(p, α) si l'angle ZIZ' est direct, du signe - dans le cas contraire, ce qui revient à affecter la fonction du signe de p. D'où :


Fonction V(p,q).
V(-p,q) = -V(p,q)
à 1 près.
p
q

$$V(-p, q) = -V(p, q)$$

On notera en outre que :

$$V(p, q) + V(p, -q) = \int_p^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = S(p)$$

Moyennant ces hypothèses, et à l'aide de la remarque ci-dessus, on a, quels que soient les signes de a', b', b'_a et a'_b, l'expression :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Prob.}(x > a, y > b) &= V(a', b'_a) + V(b', a'_b) \\ &= V\left(a', \frac{b' - ra'}{\sqrt{1 - r^2}}\right) + V\left(b', \frac{a' - rb'}{\sqrt{1 - r^2}}\right) \text{ à 1 près} \end{aligned}}$$

III - EXPRESSION DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ OU $V(p, q)$ -

1/ $p > 0$.
On suppose tout d'abord $p > 0$.

$$V(p, q) \text{ ou } V(p, \alpha) = \iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}}{2\pi} dX\,dY = \iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi} r\,dr\,d\alpha$$

$$V(p, q) \text{ ou } V(p, \alpha) = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{\frac{p}{\cos\alpha}}^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2\cos^2\alpha}}}{2\pi} d\alpha = \int_{t=\frac{q}{p}}^\infty \frac{e^{-\frac{p^2(1+t^2)}{2}}}{2\pi(1+t^2)} dt$$

On a déjà noté que $V(p, -q) = S(p) - V(p, q)$.

2/ $p < 0$.
On attribue, par définition à $V(p, q)$ ou à $V(p, \alpha)$ le signe de p. En conséquence, si p est négatif, la fonction sera définie par :

$$V(p, q) = -V(-p, q) \quad \text{ou}$$

$$V(p, \alpha) = -V(-p, \alpha)$$

Nota - $V(p, q)$ et $V(p, \alpha)$ désignent la même fonction, à savoir la mesure du volume algébrique du secteur (ZIZ'), le point I étant caractérisé soit par ses coordonnées cartésiennes (p, q), soit par son abscisse p et son angle polaire α.

IV - METHODE D'ETABLISSEMENT NUMERIQUE DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ OU $V(p, q)$ $\quad q = p\,\mathrm{tg}\,\alpha$ -
(voir le faisceau de courbes joint à la note).

On utilisera constamment les fonctions:

$$Y(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad S(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

1/ $\alpha > 0$.
V(p, α) est défini par :

$$V(p,\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2\cos^2\alpha}}}{2\pi}\, d\alpha = \int_{t}^{\infty} \frac{e^{-\frac{p^2}{2}(1+t^2)}}{2\pi(1+t^2)}\, dt$$

$$\underline{V'_{\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, Y\left(\frac{p}{\cos\alpha}\right)$$

On note que $V(p, 0) = \frac{1}{2} S(p)$.

a) $\alpha < \pi/4$. La fonction est approximativement représentée (à 1/1 000 près) par les premiers termes de son développement (voir plus loin l'établissement du développement) (paragraphe V)

$$V(p,\alpha) \sim \frac{1}{2} S(p) - \alpha \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\alpha^3}{6} p^2 \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

b) $\alpha = \pi/4$. Une considération géométrique simple montre que :

$$V(p, \pi/4) = \frac{1}{2} S^2(p)$$

c) $\alpha > \pi/4$. Une remarque géométrique analogue permet de se rattacher au cas $\alpha < \pi/4$.

$$V(p,\alpha) = S(p).S(p\,\mathrm{tg}\,\alpha) - V(p\,\mathrm{tg}\,\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$$

Cependant, lorsque α est assez voisin de $\pi/2$, on obtient une expression approchée plus pratique, en assimilant cos α à $\pi/2 - \alpha$ et V(p, α) à l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2\cos^2\alpha}}}{2\pi} \sin\alpha\, d\alpha$$

que l'on sait exprimer au moyen des fonctions Y et S (par intégration par parties).

$$V(p,\alpha) \sim \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2\pi}}\, Y\left(\frac{p}{\cos\alpha}\right) - p\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, S\left(\frac{p}{\cos\alpha}\right)$$

avec une erreur relative positive et inférieure à 1 - sin α.

2/ $\alpha < 0$.
On définit V(p, α) par :

$$V(p,\alpha) = S(p) - V(p,-\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{e^{-\frac{p^2}{2\cos^2\alpha}}}{2\pi}\, d\alpha$$

V - DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION V(p, α) EN SERIE ENTIERE DE α -

Si on désigne par u' u'' $u^{(3)}$ $u^{(4)}$ ... les dérivées successives de tg α

$$
\begin{cases}
V'_\alpha = -\dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{p^2}{2}(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)} & \text{posant } z = \dfrac{p^2}{2} \\[2mm]
V'' = -z\,V'\,u'' & \\[2mm]
V^{(n)} = -z(V'u'')^{(n-2)} = -z(V^{(n-1)}u''+C^1_{n-2}V^{(n-2)}u'''+C^2_{n-2}V^{(n-3)}u^{(4)}\ldots+C^1_{n-2}V''u^{(n-1)}+V'u^{(n)}) &
\end{cases}
$$

Soit : $u'_o = 1$, $u_o^{(3)} = 2$, $u_o^{(5)} = 16$, $u_o^{(7)} = 272$, $u_o^{(9)} = 7\,936 \ldots$ les dérivées pour $\alpha = 0$, les dérivées successives d'ordre pair sont nulles.

$$V_o^{(3)} = -z\,V'_o\,u_o^{(3)}$$

$$V_o^{(5)} = -z(C_3^1V_o^{(3)}u_o^{(3)} + V'_o\,u_o^{(5)})$$

$$V_o^{(7)} = -z(C_5^1V_o^{(5)}u_o^{(3)} + C_5^3V_o^{(3)}u_o^{(5)} + V'_o\,u_o^{(7)})$$

$$V_o^{(9)} = -z(C_7^1V_o^{(7)}u_o^{(3)} + C_7^3V_o^{(5)}u_o^{(5)} + C_7^5V_o^{(3)}u_o^{(7)} + V'_o\,u_o^{(9)})$$

$$V_o^{(n)} = -z(C^1_{n-2}V_o^{(n-2)}u_o^{(3)} + C^3_{n-2}V_o^{(n-4)}u_o^{(5)} \ldots + C^2_{n-2}V_o^{(3)}u_o^{(n-2)} + V'_ou_o^{(n)})$$

<u>Les premiers coefficients sont</u> :

$$V'_o = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,Y(p)$$

$$V_o^{(3)} = +\frac{2z}{\sqrt{2\pi}}\,Y(p)$$

$$V_o^{(5)} = (-12z^2 + 16z)\,\frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$V_o^{(7)} = (120z^3 - 480z^2 + 272z)\,\frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$V_o^{(9)} = (-1\,680z^4 + 13\,440z^3 - 20\,384z^2 + 7\,936z)\,\frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\boxed{V(p,\alpha) = \frac{1}{2}\,S(p) - \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}\left[\alpha - \frac{p^2\alpha^3}{6} + \frac{3p^4 - 8p^2}{120}\,\alpha^5 - \frac{15p^6 - 120p^4 + 136p^2}{5\,040}\,\alpha^7 + \frac{105p^8 - 1\,680p^6 + 5\,096p^4 - 3\,968p^2}{362\,880}\,\alpha^9 - \ldots\right]}$$

On peut noter que $\dfrac{3p^4 - 8p^2}{120}\,\dfrac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$ est borné supérieurement par $4/1\,000$. Pour $\alpha = \pi/4$, l'erreur maxima est de l'ordre de $4/3\,000$.

Si l'on n'exige pas une très grande précision, on peut se limiter à :

$$V(p,\alpha) = \frac{1}{2}\,S(p) - \frac{\alpha\,Y(p)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\alpha^3p^2\,Y(p)}{6\sqrt{2\pi}}$$

VI - DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION $V(p,\alpha)$ EN SERIE ENTIERE DE $\frac{p^2}{2}=z$ -

Le développement de $V(p,\alpha)$ en série entière de $\frac{p^2}{2} = z$, peut-être moins pratique dans l'établissement des courbes, donne naissance cependant à une série plus remarquable. On a :

$$V(p,\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2\cos^2\alpha}}}{2\pi}\,d\alpha = \frac{1}{2}S(p) - \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{2\pi}\int_0^{\alpha} e^{-\frac{p^2}{2}tg^2\alpha}\,d\alpha$$

que l'on peut écrire en posant $\frac{p^2}{2} = z$ et en introduisant la fonction auxiliaire $\underline{A(z,t)}$.

$$A(z,t) = e^z \operatorname{Arc\,tg} t - \int_0^t \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2}\,dt$$

$$V(p,\alpha) = \frac{1}{2}S(\sqrt{2z}) - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{e^{-z}}{2\pi}A(z,t)$$

<u>Cherchons à développer en série entière la fonction $A(z,t)$.</u>

$$\begin{cases} A(z,t) = e^z \operatorname{Arc\,tg} t - \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2}\,dt \\ A'_z(z,t) = e^z \operatorname{Arc\,tg} t + \displaystyle\int_0^t \frac{t^2 e^{-zt^2}}{1+t^2}\,dt = A(z,t) + \int_0^t e^{-zt^2}\,dt \\ A_z^{(2)}(z,t) = \qquad = A'(z,t) - \displaystyle\int_0^t t^2 e^{-zt^2}\,dt \\ A_z^{(n)}(z,t) = \qquad = A^{(n-1)}(z,t) + (-1)^{n-1}\displaystyle\int_0^t t^{2n-2}e^{-zt^2}\,dt \end{cases}$$

D'où
$$A_z^{(n)} = e^z \operatorname{Arc\,tg} t + (-1)^{n-1}\int_0^t \frac{t^{2n}e^{-zt^2}}{1+t^2}\,dt$$

Donnant à z la valeur 0

$$\begin{cases} A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' = A + t & = t \\ A^{(2)} = A' - \dfrac{t^3}{3} & = t - \dfrac{t^3}{3} \\ A^{(n)} = A^{(n-1)} + (-1)^{n-1} \dfrac{t^{2n-1}}{2n-1} & = t - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} - \dots (-1)^{n-1} \dfrac{t^{2n-1}}{2n-1} \end{cases}$$

A', $A^{(2)}$, $A^{(n)}$ ne sont autres que les expressions du développement en série entière de Arc tg t limitées respectivement aux premier, second, n ième terme.

D'où le développement :

$$A(z, t) = A' \frac{z}{1} + \frac{A^{(2)} z^2}{2!} + \frac{A^{(3)} z^3}{3!} + \dots \frac{A^{(n)} z^n}{n!} + \dots$$

valable quels que soient t et z car le reste de la série de Mac Laurin tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (bien que le développement de Arc tg t ne soit convergent que pour $t < 1$). Il serait cependant préférable dans les applications de se borner au cas $t < 1$ puisque l'on sait, dans le calcul de V, ramener le cas $t > 1$ au cas $t < 1$ comme on a vu plus haut.

t étant inférieur à 1, on borne supérieurement $A^{(n+1)}$, $A^{(n+2)}$ etc. par t et le reste de la série exponentielle par $\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!} \left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{z}{n+1}} \right)$ et on obtient ainsi une limite supérieure de l'erreur sur la fonction $V(p, \alpha)$

$$0 < \text{erreur} < \frac{t z^{n+1} e^{-z}}{2\pi n! (n - z + 1)}$$

Conclusion. Si on désigne par A_n la somme des n premiers termes de la série $\alpha = \text{Arc tg } t$, on obtient pour $V(p, \alpha)$ le développement en série entière de $z = \dfrac{p^2}{2}$.

Pour $\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ $\quad V(p, \alpha) = \dfrac{1}{2} S(p) - \dfrac{\alpha}{2\pi} + \dfrac{e^{-z}}{2\pi} \sum\limits_1^n A_n \dfrac{z^n}{n!} + \dfrac{\varepsilon t z^{n+1} e^{-z}}{2\pi n! (n - z + 1)} \quad 0 < \varepsilon < 1$

si on se limite aux fonctions $p > 2$; les fonctions $p < 2$ étant toujours inférieures à 0,01

$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2} S(p) - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{e^{-z}}{2\pi} \sum_1^n A_n \frac{z^n}{n!} + \varepsilon . 0,043 \frac{2^n}{n!(n-1)}$$

Pour $\alpha > \dfrac{\pi}{4}$ on se ramène au cas précédent par la formule

$$V(p, \alpha) = S(p) S(p \text{ tg } \alpha) - V(p \text{ tg } \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$$

VII - UNE INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ -

$$V(p, \alpha) = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{z}{\cos^2 \alpha}}}{2\pi} d\alpha \qquad z = \frac{p^2}{2}$$

Si on effectue sur l'intégrale le changement de variable $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

$$V(p,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{\pi} e^{-\frac{2z}{(1+\cos\beta)}}\,d\beta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{\pi}\left[e^{-\frac{z}{1+\cos\beta}}\right]^2 d\beta$$

D'où $$V(p,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\,[\text{Aire}]_{2\alpha}^{\pi}$$

On voit sous cette forme que $2\pi\ V(p,\alpha)$ s'interprète comme l'aire du secteur défini par les rayons d'angles polaires 2α et π et la courbe :

$$r = e^{-\rho}$$

transformée de la parabole (ρ) foyer O et de paramètre z par une transformation exponentielle négative sur le rayon vecteur ρ.

En particulier, on pourra remarquer que cette courbe transformée a pour aire totale :

$$2\pi\, S(p)$$

L'aire des deux quadrants postérieurs est :

$$2\pi\, S^2(p)$$

VIII - APPLICATIONS -

1/ Calcul du volume compris entre le plan horizontal XOY et la surface de Laplace-Gauss à l'aplomb d'un domaine angulaire quelconque.

La solution découle immédiatement de la théorie précédente (§II). Le domaine étant défini par les deux droites D et D' dont les distances à l'origine sont :

$$\overline{OH} = a' \qquad \overline{OK} = b'$$

et dont l'angle est i, le volume est donné par la formule :

$$\boxed{V\left(a',\ \frac{b' - a'\cos i}{\sin i}\right) + V\left(b',\ \frac{a' - b'\cos i}{\sin i}\right)}$$

2/ Double discrimination dans une population d'individus gigognes.

On envisage une population d'individus désignés par (x), de valeur aléatoire x, normalement répartis autour d'une moyenne m(x) avec une variance s_x^2. On imagine ensuite que chaque individu (x) est constitué par une population d'éléments (y) de valeur aléatoire y normalement répartis au sein de l'individu (x) et assujettis aux deux conditions :

- la variance de y au sein de (x) est constante et égale à la différence de la variance de l'ensemble des y relatifs à tous les (x) et de la variance des x;

$$v_{y.x}^2 = s_y^2 - s_x^2$$

- la valeur moyenne des éléments (y) est égale à la valeur de (x) : moyenne liée

$$\bar{y}_x = x$$

On peut alors admettre que le couple (x, y) suit une loi de Laplace-Gauss à deux variables, ainsi définie.

$$\begin{cases} \text{valeurs moyennes } m_x = m_y = m \\ \text{variances } s_x^2 \text{ et } s_y^2 \\ \text{variance de y lié par x : } \boxed{v_{y.x}^2 = s_y^2 - s_x^2} \\ \text{droite de régression de y en x : } \bar{y}_x = x \\ \text{c'est-à-dire coefficient de corrélation } \boxed{r = \dfrac{s_x}{s_y}} \end{cases}$$

Ceci posé, on appellera double discrimination l'opération qui consiste à sélectionner les éléments (y) dont la valeur est supérieure à une grandeur b et qui soient en outre situés au sein d'individus (x) dont la valeur est supérieure à a.

Le résultat de cette opération de double discrimination n'est autre que la probabilité pour que x soit supérieur à a et y supérieur à b dans une loi Laplace-Gauss définie comme il précède.

En conséquence, désignant comme plus haut par a' et b' les variables réduites de a et b, le rendement de la double discrimination peut se calculer par la formule :

$$V(a', b'_a) + V(b', a'_b)$$

soit $$\boxed{V\left(a', \frac{b - a}{v_{y.x}}\right) + V\left(b', \frac{a's_y - b's_x}{v_{y.x}}\right)}$$

Corollaire -

Cas d'une répartition log-normale des individus (x) et d'une répartition log-normale des individus (y) au sein des individus (x).

Ce corollaire présente un certain intérêt en statistique des gisements :

Le raisonnement précédent subsiste intégralement, les variables réduites prennent toutefois la forme :

$$\begin{cases} a' = \dfrac{1}{s_x} L \dfrac{a}{m} + \dfrac{s_x}{2} \\ b' = \dfrac{1}{s_y} L \dfrac{b}{m} + \dfrac{s_y}{2} \\ b'_a = \dfrac{1}{V_{y.x}} L \dfrac{b}{a} + \dfrac{v_{y.x}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{V(a', b'_a) + V\left(b', \frac{a's_y - b's_x}{v_{y.x}}\right)}$$

Remarque - Si x et y désignent des teneurs en métal de masses de minerai, la proportion en métal contenu dans les wagonnets sélectionnées sera donnée par la formule précédente avec :

$$\left|\begin{array}{l} a' = \dfrac{1}{s_x} L \dfrac{a}{m} - \dfrac{s_x}{2} \\[2ex] b' = \dfrac{1}{s_y} L \dfrac{b}{m} - \dfrac{s_y}{2} \\[2ex] b'_a = \dfrac{1}{v_{y.x}} L \dfrac{b}{a} - \dfrac{v_{y.x}}{2} \end{array}\right.$$

Les variables réduites du métal contenu dans le minerai sont en effet inférieures d'un écart-type à celle du minerai.

3/ Calcul approximatif d'un coefficient de corrélation expérimentale.

En se reportant au deuxième paragraphe de cette note et à la première figure, on note que :

- la probabilité pour que (x supérieur à a et y inférieur à b) est donnée par le volume relatif au domaine (Z"IZ).

En particulier, la probabilité P_o pour que (x supérieur à sa moyenne m_x et y inférieur à sa moyenne m_y) est égale à $i/2\pi$.

$$P_o = \frac{i}{2\pi}$$

Or, on a vu dans le premier paragraphe que :

$$r = \cos i$$

D'où

$$\boxed{r = \cos 2\pi P_o}$$

On peut obtenir ainsi une évaluation rapide d'un coefficient de corrélation expérimentale à partir de la proportion P_o des points expérimentaux situés dans le quatrième quadrant ayant pour sommet le point moyen (m_x, m_y) de la distribution.

On a retrouvé une formule classique sous une forme un peu différente.