F. CHARTIER

De nouvelles tables permettant des tests sur variances bilatéraux et sans distorsion

Revue de statistique appliquée, tome 8, n° 1 (1960), p. 61-75

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_1_61_0>

DE NOUVELLES TABLES PERMETTANT DES TESTS SUR VARIANCES BILATÉRAUX ET SANS DISTORSION

F. CHARTIER
Institut National de la Statistique et des Études Économiques

Tables dues à K. V. Ramachandran, Demographic Training and Research Center, Bombay, présentées sous le titre A Test of Variances, dans Journal of the American Statistical Association, Volume 53 - N° 283, September 1958 -

Soient deux variables aléatoires x_1 et x_2 suivant des lois de Laplace-Gauss de variances σ_1^2 et σ_2^2 respectivement.

On dispose de n_1 observations de la première variable à l'aide desquelles on forme :

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} S_i\, x_{1i} \quad , \qquad s_1^2 = \frac{1}{\nu_1} S_i\, (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \ , \quad \nu_1 = n_1 - 1,$$

et de n_2 observations de la seconde variable avec lesquelles on forme de façon analogue $\bar{x}_2$, puis s_2^2 avec le diviseur $\nu_2 = n_2 - 1$. Les deux aléatoires s_1^2 et s_2^2 sont des estimateurs sans biais de σ_1^2 et σ_1^2 respectivement grâce aux diviseurs ν_1 et ν_2.

Les deux tests envisagés sont alors :

- pour <u>une seule</u> variable, disons x_1 :

$$\text{test de } \sigma_1^2 = \sigma^2 \quad \text{contre } \sigma_1^2 \neq \sigma^2 \quad (< \text{ou} > \sigma^2) ,$$

σ^2 étant une valeur hypothétique donnée indépendamment des observations,

- pour <u>deux</u> variables x_1 et x_2 :

$$\text{test de } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{contre } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad (< \text{ou} > \sigma_2^2) .$$

Ce sont là deux tests classiques dont la solution est la suivante.

<u>Pour une variable :</u>

Etant donné la valeur observée de $S(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = \nu_1 s_1^2$ y a-t-il lieu d'accepter l'hypothèse que la variance vraie de x_1, σ_1^2, a telle valeur σ^2 donnée indépendamment des observations ou convient-il de rejeter cette hypothèse ?

On sait que la variable aléatoire χ^2, définie avec la variance vraie σ_1^2 :

$$\chi^2 = \frac{S(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{\sigma_1^2} = \frac{\nu_1 s_1^2}{\sigma_1^2}$$

est distribuée suivant la loi dite de χ^2 à ν_1 degrés de liberté :

$$p(\chi^2)\,d\chi^2 = \frac{1}{2^{\nu_1/2}\,\Gamma(\frac{\nu_1}{2})}\,e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\,(\chi^2)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\,d\chi^2,\quad 0 \leqslant \chi^2 < \infty.$$

χ^2 a pour moyenne (espérance mathématique) ν_1. Les valeurs les plus probables sont celles voisines de ν_1, comme le montre la courbe représentative de la densité de probabilité, $p(\chi^2)$, sur la fig. 1. La loi de χ^2 ne dépendant que du paramètre ν_1, non de σ_1^2, nous pouvons définir un intervalle central, χ_1^2 à χ_2^2, tel qu'il y ait une probabilité donnée $1 - \alpha$, par exemple 0,95, d'y trouver χ^2.

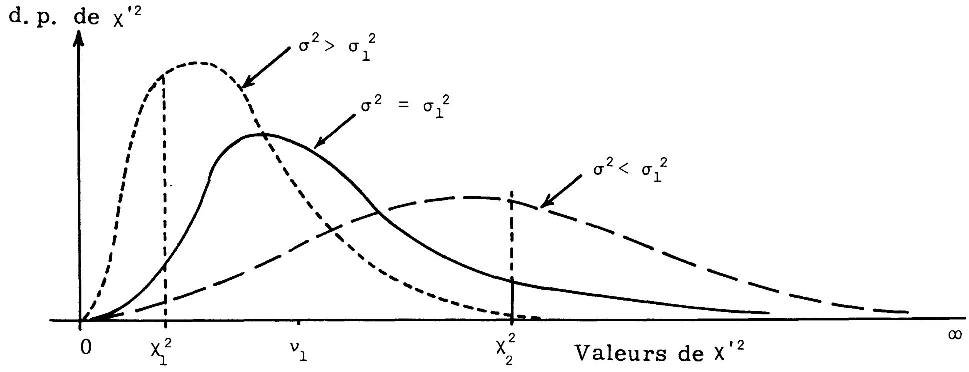


Fig. 1 - Courbes représentatives de la densité de probabilité de χ'^2 suivant que σ^2 est inférieur, égal ou supérieur à σ_1^2.

Toutefois, ce que nous savons calculer n'est pas χ^2 puisque nous ne connaissons pas σ_1^2, mais χ'^2 formé uniquement à partir d'éléments connus, les observations et la valeur hypothétique σ^2 :

$$\chi'^2 = \frac{S\,(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{\sigma^2} = \frac{\nu_1\, s_1^2}{\sigma^2}$$

Si la valeur donnée pour σ^2 est égale à la valeur inconnue de σ_1^2, les deux quantités χ'^2 et χ^2 suivent la même loi de probabilité. Il y aura alors la probabilité $1 - \alpha$ que χ'^2 se trouve dans l'intervalle central χ_1^2 à χ_2^2 et seulement la probabilité α que χ'^2 soit à l'extérieur (entre 0 et χ_1^2 ou entre χ_2^2 et l'infini).

En revanche, si la valeur testée σ^2 est inférieure à la valeur vraie σ_1^2, pour une même valeur de $S\,(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$, χ'^2 sera supérieur à χ^2 (puisque son dénominateur est inférieur à celui de χ^2). χ'^2 sera supérieur en moyenne (en espérance mathématique) à ν_1. Il aura tendance à sortir de l'intervalle central χ_1^2 à χ_2^2, à se trouver au delà de χ_2^2, cela d'autant plus que σ^2 est plus inférieur à σ_1^2. De façon analogue, si la valeur testée σ^2 est supérieure à la valeur vraie σ_1^2, χ'^2 aura tendance à sortir de l'intervalle central χ_1^2 à χ_2^2 pour se trouver entre 0 et χ_1^2.

Par suite, le test consiste à calculer χ'^2 à partir des observations et de σ^2 puis à situer la valeur obtenue par rapport à χ_1^2 et χ_2^2. Si χ'^2 est entre χ_1^2 et χ_2^2 on accepte l'hypothèse que σ^2 est égal à la valeur vraie σ_1^2. Si χ'^2 est entre 0 et χ_1^2 on entre χ_2^2 et l'infini, on rejette cette hypothèse.

Il est bien évident que l'application de cette règle nous fait courir deux risques :

- risque d'erreur de $1^{\text{ère}}$ espèce : rejeter la valeur hypothétique σ^2 alors qu'elle est bien égale à σ^2. Même formé avec une valeur de σ^2 égale à σ_1^2, χ'^2 peut se trouver hors de l'intervalle central χ_1^2 à χ_2^2. Ce sera le cas si la somme $S\,(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$ est exceptionnellement petite ou grande, mais la probabilité d'une telle erreur est seulement α (p. ex. 0,05) ;

- risque d'erreur de $2^{\text{ème}}$ espèce : conserver la valeur hypothétique σ^2 bien qu'elle soit différente de σ_1^2. La considération d'une valeur de σ^2 trop petite, par exemple, peut être compensée par une valeur exceptionnellement petite de $S\,(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$, la valeur de χ'^2 étant alors entre χ_1^2 et χ_2^2 et conduisant à l'acceptation de σ^2. De même une valeur hypothétique σ^2 trop grande, peut être compensée par une valeur exceptionnellement grande de $S\,(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$. Mais de telles compensations risquent d'autant moins de se produire que σ^2 est plus différent de σ_1^2.

Précisons la relation entre loi de probabilité de χ'^2 et de χ^2 en fonction du rapport entre σ^2 et σ_1^2.

Comme :

$$\chi'^2 = \frac{\nu_1\, s_1^2}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \chi^2 = \frac{\nu_1\, s_1^2}{\sigma_1^2},$$

on peut écire :

$$\chi'^2 = h\,\chi^2 \quad \text{avec } h = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}.$$

Soit χ_P^2 le fractile de χ^2 tel que :

$$\text{Prob.}\,(0 < \chi^2 < \chi_P^2) = \int_0^{\chi_P^2} p\,(\chi^2)\, d\chi^2 = P.$$

La constante h étant essentiellement positive, le fractile correspondant de χ'^2, c'est-à-dire $\chi_P'^2$ tel que :

$$\text{Prob.}\,(0 < \chi'^2 < \chi_P'^2) = P,$$

est

$$\chi_P'^2 = h\,\chi_P^2 .$$

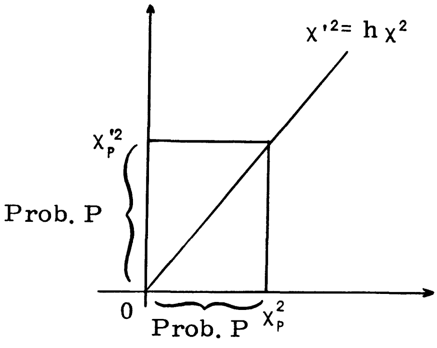
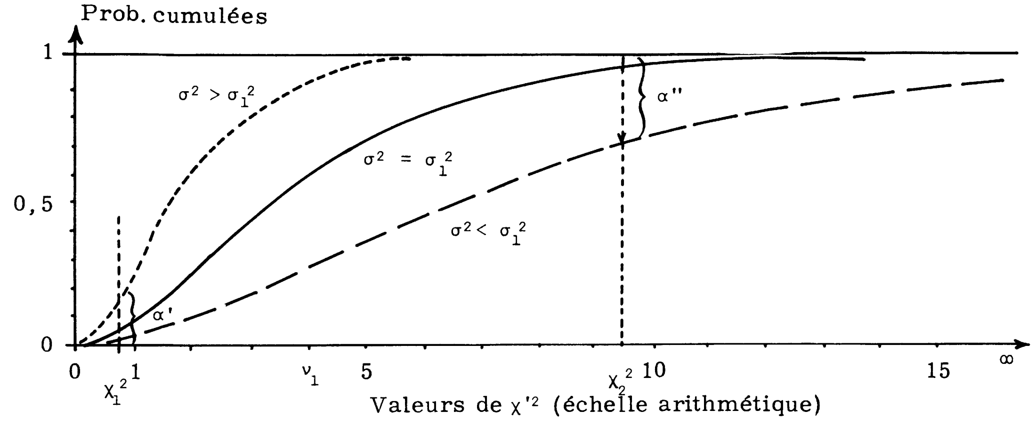


Fig. 2 - Correspondance entre χ_P^2 et $\chi_P'^2$.

Cette relation est évidente quand on considère le schéma de la fig. 2. Comme elle est valable quelle que soit la probabilité P $(0 \leqslant P \leqslant 1)$, la fonction de répartition ou des probabilités totales de χ'^2 se déduit de celle de χ^2 par une transformation par affinité des abscisses : dilatation si $h > 1$ (valeur hypothétique $\sigma^2 < \sigma_1^2$), contraction si $h < 1$ ($\sigma^2 > \sigma_1^2$). Cette transformation par affinité devient évidemment une transformation par translation si on utilise une échelle logarithmique pour l'axe des abscisses. C'est ce qu'illustre la fig. 3 établie pour $\nu_1 = 4$ et $\alpha = 0,10$.

On retrouve, en le précisant, le résultat annoncé ci-dessus, à savoir que, lorsque la valeur hypothétique σ^2 est égale à σ_1^2, χ'^2 suit la loi de χ^2. Lorsque σ^2 est inférieur à σ_1^2, χ'^2 prend des valeurs plus grandes que s'il suivait la loi de χ^2 tandis qu'il prend des valeurs plus petites si σ^2 est supérieure à σ_1^2. Par suite, pour avoir une probabilité non négligeable de rejeter une valeur hypothétique aussi bien trop petite que trop grande, il convient de définir le domaine de



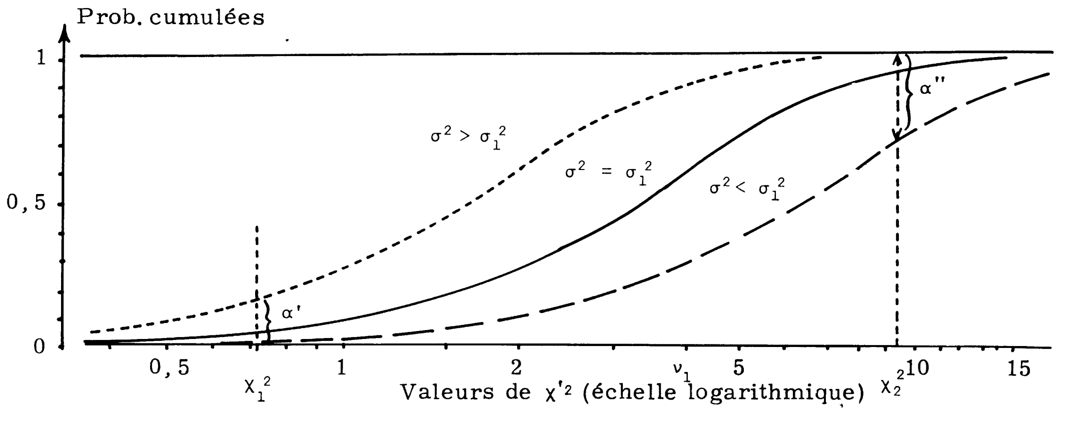


Fig. 3 - Fonction de répartition de χ'^2 suivant que σ^2 est supérieur, égal ou inférieur à σ_1^2.
α', prob. $(0 < \chi'^2 < \chi_1^2)$; α'', prob. $(\chi_2^2 < \chi'^2 < \infty)$. $\alpha' = \alpha'' = 0,05$ si $\sigma^2 = \sigma_1^2$.

rejet comme l'ensemble des deux intervalles 0 à χ_1^2 et χ_2^2 à l'infini, χ_1^2 et χ_2^2 étant tels que la probabilité d'accepter une valeur hypothétique σ^2 égale à σ_1^2 soit $1 - \alpha$ donné :

$$\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} p(\chi^2)\, d\chi^2 = 1 - \alpha$$

L'exécution du test consiste donc à calculer la valeur de χ'^2 à partir des observations et de la valeur hypothétique σ^2, puis :

- à accepter cette valeur σ^2 si $\chi_1^2 < \chi'^2 < \chi_2^2$
- à la rejeter si $0 < \chi'^2 < \chi_1^2$ ou si $\chi_2^2 < \chi'^2 < \infty$

Reste à fixer les deux limites χ_1^2 et χ_2^2 de l'intervalle d'acceptation. La condition que la probabilité d'acceptation soit $1 - \alpha$ si $\sigma^2 = \sigma_1^2$ ne définit pas un intervalle, mais une infinité. Comme il y a deux valeurs à déterminer, il faut deux conditions. L'existence de tables de la loi de probabilité de χ^2 qui donnent les fractiles symétriques χ_p^2 et χ_{1-p} conduit généralement à prendre :

pour χ_1, $\chi^2_{\alpha/2}$ tel que $\int_0^{\chi^2_{\alpha/2}} p(\chi^2)\, d\chi^2 = \alpha/2$

et pour χ_2^2, $\chi^2_{1-\alpha/2}$ tel que $\int_{\chi^2_{1-\alpha/2}}^{\infty} p(\chi^2)\, d\chi^2 = \alpha/2$

On pourrait évidemment envisager un autre partage de α en α' et α'' si l'on voulait détecter plus probablement l'un des deux cas $\sigma^2 < \sigma_1^2$ ou $\sigma^2 > \sigma_1^2$ que l'autre.

L'inconvénient de l'intervalle $\chi^2_{\alpha/2}$ à $\chi^2_{1-\alpha/2}$ est que la probabilité de rejeter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma^2$ n'est pas minimum quand elle correspond à la réalité (fig. 4). Pour s'en rendre compte il suffit de calculer la puissance du test, c'est-à-dire la probabilité de rejeter la valeur hypothétique σ^2 en fonction du rapport $h = \sigma_1^2/\sigma^2$, rapport de la variance vraie à sa valeur hypothétique. Soit $\pi(h)$ cette puissance:

$$\pi(h) = \text{Prob.}(0 < \chi'^2 < \chi_1^2) + \text{Prob.}(\chi_2^2 < \chi'^2 < \infty),$$

ce qui se récrit en remplaçant χ'^2 par $h\,\chi^2$ et en divisant les trois membres de chaque double inégalité par la constante positive h :

$$\pi(h) = \text{Prob.}\left(0 < \chi^2 < \frac{\chi_1^2}{h}\right) + \text{Prob.}\left(\frac{\chi_2^2}{h} < \chi^2 < \infty\right)$$

$$= \int_0^{\chi_1^2/h} p(\chi^2)\, d\chi^2 + \int_{\chi_2^2/h}^{\infty} p(\chi^2)\, d\chi^2$$

La dérivée par rapport à h est :

$$\frac{d\pi(h)}{dh} = -\frac{\chi_1^2}{h^2}\, p\left(\frac{\chi_1^2}{h}\right) + \frac{\chi_2^2}{h^2}\, p\left(\frac{\chi_2^2}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} \left[e^{-\frac{\chi_2^2}{2h}} \left(\frac{\chi_2^2}{2h}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} - e^{-\frac{\chi_1^2}{2h}} \left(\frac{\chi_1^2}{2h}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{h\,\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}\, e^{-\frac{\chi_1^2}{2h}} \left(\frac{\chi_2^2}{2h}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left[e^{\frac{\chi_1^2 - \chi_2^2}{2h}} - \left(\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \right]$$

Il est évident que seule la quantité entre crochets peut s'annuler par un choix convenable de χ_1^2 et χ_2^2, le facteur devant le crochet étant positif.

Si l'on prend $\chi_1^2 = \chi^2_{\alpha/2}$ et $\chi_2^2 = \chi^2_{1-\alpha/2}$, le minimum de $\pi(h)$ est obtenu pour h racine de l'équation :

$$e^{\frac{\chi^2_{\alpha/2} - \chi^2_{1-\alpha/2}}{2h}} - \left(\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} = 0,$$

soit :

$$h_o = \frac{1}{\nu_1}\, \frac{\chi^2_{1-\alpha/2} - \chi^2_{\alpha/2}}{\log_e \chi^2_{1-\alpha/2} - \log_e \chi^2_{\alpha/2}}$$

Par exemple, pour $\alpha = 0{,}05$ et $\nu_1 = 4$, $h_o = \frac{1}{4} \cdot \frac{11{,}14 - 0{,}48}{1{,}047 + 0{,}319} \cdot \frac{1}{2{,}303} = 0{,}847$, et $\pi(h) = 0{,}044$. Ainsi, ce n'est pas quand la valeur hypothétique σ^2 est égale à la valeur vraie σ_1^2 que l'on a la plus grande probabilité de la retenir, mais quand cette valeur testée est égale à $\sigma_1^2/0,847 = 1,181\ \sigma_1^2$ c'est-à-dire quand elle est supérieure de 18% à la valeur réelle σ_1^2.

Aussi semble-t-il préférable de définir χ_1^2 et χ_2^2 par les deux conditions que :

1/ le niveau de signification du test (c'est-à-dire la puissance quand h = 1) soit α :

$$\pi(1) = 1 - \int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} p(\chi^2)\, d\chi^2 = \alpha,$$

2/ le minimum de la puissance ait lieu pour h = 1 : $\left[\dfrac{d\pi(h)}{dh}\right]_{h=1} = 0$, soit :

$$e^{\frac{\chi_1^2-\chi_2^2}{2}} - \left(\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} = 0$$

On vérifie aisément que, χ_1^2 et χ_2^2 satisfaisant à ces deux conditions, $\pi(h)$ est fonction croissante de h quand h s'écarte de 1 pour tendre soit vers 0, soit vers 1 (voir fig. 4). Il suffit pour cela de montrer que $d\pi(h)/dh$ est négative pour tout h compris entre 0 et 1 et positive pour tout h compris entre 1 et l'infini.

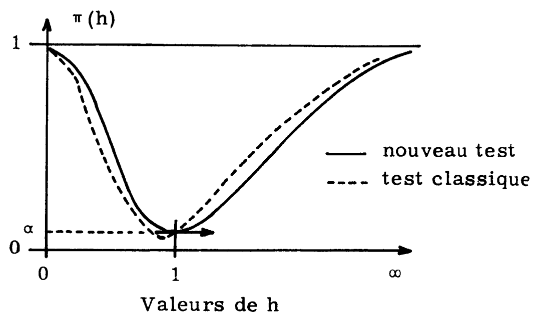


Fig. 4 - Courbe représentative de π (h)

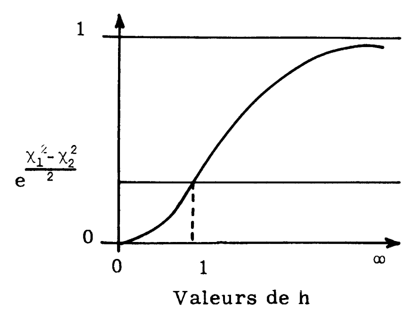


Fig. 5 - Courbe représentative de : $e^{\frac{\chi_1^2-\chi_2^2}{2h}}$

Or $d\pi(h)/dh$ est du signe de :

$$e^{\frac{\chi_1^2-\chi_2^2}{2}} - \left(\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}$$

ce qui s'écrit, eu égard à la seconde condition liant χ_1^2 et χ_2^2 :

$$e^{\frac{\chi_1^2-\chi_2^2}{2h}} - e^{\frac{\chi_1^2-\chi_2^2}{2}}$$

Comme $\chi_1^2 - \chi_2^2 < 0$, il s'agit là d'une fonction monotone croissante de h, négative pour $0 < h < 1$, nulle pour h = 1 (on a choisi χ_1^2 et χ_2^2 pour cela), positive pour $1 < h < \infty$ (voir fig. 5).

Les valeurs de χ_1^2 et χ_2^2 calculées par K. V. Ramachandran pour $\alpha = 0,05$ et ν_1 = 2 (1) 8 (2) 24, 30, 40 et 60 sont reproduites à la table 1 in fine.

Pour deux variables :

Etant donné les deux variances observées, s_1^2 et s_2^2, peut-on accepter l'hypothèse que les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont égales, ou doit-on rejeter cette hypothèse ?

Pour répondre à cette question, on considère le rapport $F' = s_1^2/s_2^2$.

Si l'hypothèse testée est vérifiée, c'est-à-dire si effectivement $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, les deux aléatoires s_1^2 et s_2^2 ont même valeur moyenne (même espérance mathématique) : la valeur commune de σ_1^2 et σ_2^2. Par suite elles seront probablement peu différentes l'une de l'autre, leur rapport F' restera probablement au voisinage de 1. De façon plus précise, F' est identique à la variable :

$$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$$

dont on sait qu'elle suit la loi de probabilité indépendante de σ_1^2 et σ_2^2 :

$$p(F)\,dF = \frac{1}{B(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2})} \frac{(\frac{\nu_1}{\nu_2}F)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\, d(\frac{\nu_1}{\nu_2}F)}{(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, \quad 0 \leqslant F < \infty$$

A partir de cette loi, on peut définir un intervalle "central", contenant 1, soit F_1 à F_2, dans lequel il y ait une probabilité donnée $1 - \alpha$ de trouver F'(fig. 6).

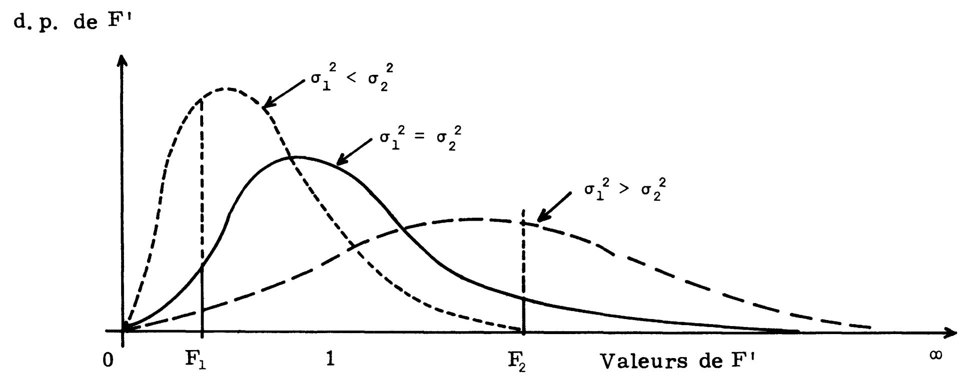


Fig. 6 - Courbes représentatives de la densité de probabilité de F' suivant que σ_1^2 est inférieur, égal ou supérieur à σ_2^2.

Au contraire, si l'hypothèse testée ne correspond pas à la réalité, si, par exemple, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, s_1^2 sera en moyenne supérieur à s_2^2, c'est-à-dire que F' sera probablement supérieur à ce que voudrait la loi de F. On aura une probabilité d'autant plus grande de trouver F' supérieur à F_2 que σ_1^2 sera plus supérieur à σ_2^2. A l'opposé, si $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, s_1^2 sera en moyenne inférieur à s_2^2, F' prendra des valeurs plus petites que le voudrait la loi de F. On aura une probabilité d'autant plus grande de trouver F' entre 0 et F_1 que σ_1^2 sera plus inférieur à σ_2^2.

D'où le principe du test : calculer F', s'il est entre F_1 et F_2, accepter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, s'il est entre 0 et F_1 ou entre F_2 et l'infini, rejeter cette hypothèse.

Ce test comporte encore deux risques d'erreur :

- risque d'erreur de $1^{ère}$ espèce : rejeter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ alors qu'elle est vérifiée, parce que les deux variances s_1^2 et s_2^2 sont exceptionnellement différentes et que F' est hors de l'intervalle F_1 à F_2. La probabilité d'une telle erreur est α.

- risque d'erreur de $2^{ème}$ espèce : accepter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ alors qu'elle est fausse. Il peut arriver que l'on ait, par exemple, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ mais que l'échantillon de x_1 soit exceptionnellement groupé et celui de x_2 exceptionnellement dispersé, ce qui rétablit une valeur de F' dans l'intervalle F_1 à F_2.

Ceci est d'autant moins probable que l'inégalité entre σ_1^2 et σ_2^2 est plus grande.

Pour former l'intervalle F_1 à F_2 et surtout pour calculer la probabilité que F' s'y trouve suivant la valeur du rapport σ_1^2/σ_2^2, précisons la relation entre la loi de F' et celle de F.

La variable $F = \dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ suit la loi indiquée plus haut, ne dépendant que de ν_1 et ν_2, indépendante en particulier de σ_1^2 et σ_2^2.

La variable F' peut être écrite, en introduisant le rapport $k = \sigma_1^2/\sigma_2^2$:

$$F' = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = k .\ F.$$

Si l'on note F_p le fractile de F tel que :

$$\text{Prob.}(0 < F < F_p) = \int_0^{F_p} p(F)\, dF = P,$$

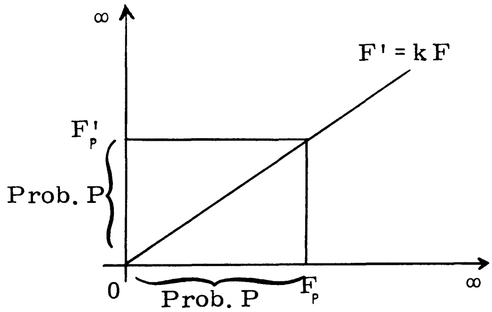


Fig. 7 - Correspondance entre F_p et F'_p.

il est évident d'après le schéma de la fig. 7 que le fractile F'_p de F', tel que :

$$\text{Prob.}(0 < F' < F'_p) = P$$

sera lié à F_p par :

$$F'_p = k\, F_p .$$

De cette relation, il résulte que la fonction de répartition des probabilités totales de F' se déduit de celle de F par une transformation par affinité des abscisses : contraction si $k < 1$, dilatation si $k > 1$, tandis que pour $k = 1$ les deux variables ont même loi. Si on utilise une échelle logarithmique pour les abscisses, la transformation par affinité devient évidemment une transformation par translation. C'est ce qu'illustre la fig. 8 établie pour $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 20$ et $\alpha = 0,10$.

Autrement dit, plus σ_1^2 est inférieur à σ_2^2 ($k < 1$), plus F' prend de petites valeurs comparativement à la loi de F ($k = 1$). Inversement, plus σ_1^2 est supérieur à σ_2^2 ($k > 1$) plus F' prend de grandes valeurs par rapport à F.

Comme on veut déceler aussi bien l'inégalité $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ que l'inégalité contraire $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, on définira le domaine de rejet de l'hypothèse d'égalité comme l'ensemble des deux intervalles 0 à F_1 et F_2 à ∞, les deux limites F_1 et F_2 étant telles que la probabilité d'accepter l'hypothèse d'égalité alors qu'elle est vérifiée soit $1 - \alpha$:

$$\int_{F_1}^{F_2} p(F)\ dF = 1 - \alpha$$

Pratiquement, on calculera la valeur de F', puis :

on acceptera l'hypothèse : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ si $F_1 < F' < F_2$,

on la rejettera si : $0 < F' < F_1$ ou $F_2 < F' < \infty$

Les deux limites F_1 et F_2 de l'intervalle d'acceptation sont le plus souvent choisies telles qu'il y ait une même probabilité $\alpha/2$ que F' se trouve entre 0 et F_1 et entre F_2 et l'infini quand $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, c'est-à-dire que l'on prend :

$$F_1 = F_{\alpha/2} \quad \text{tel que} \int_0^{F_{\alpha/2}} p(F)\, dF = \alpha/2$$

et

$$F_2 = F_{1-\alpha/2} \quad \text{tel que} \int_{F_{1-\alpha/2}}^{\infty} p(F)\, dF = \alpha/2$$

Le fractile $F_{1-\alpha/2}$ est lu directement dans la table de F en y entrant avec ν_1 et ν_2 degrés de liberté. Le fractile $F_{\alpha/2}$ est égal à l'inverse du fractile $F^*_{1-\alpha/2}$ de la variable $F^* = 1/F$ dont la loi est de même forme que celle de F sauf permutation de ν_1 et ν_2. Ce fractile $F^*_{1-\alpha/2}$ est lu encore dans la table de F^* en y entrant avec $\nu_1^* = \nu_2$ et $\nu_2^* = \nu_1$ degrés de liberté.

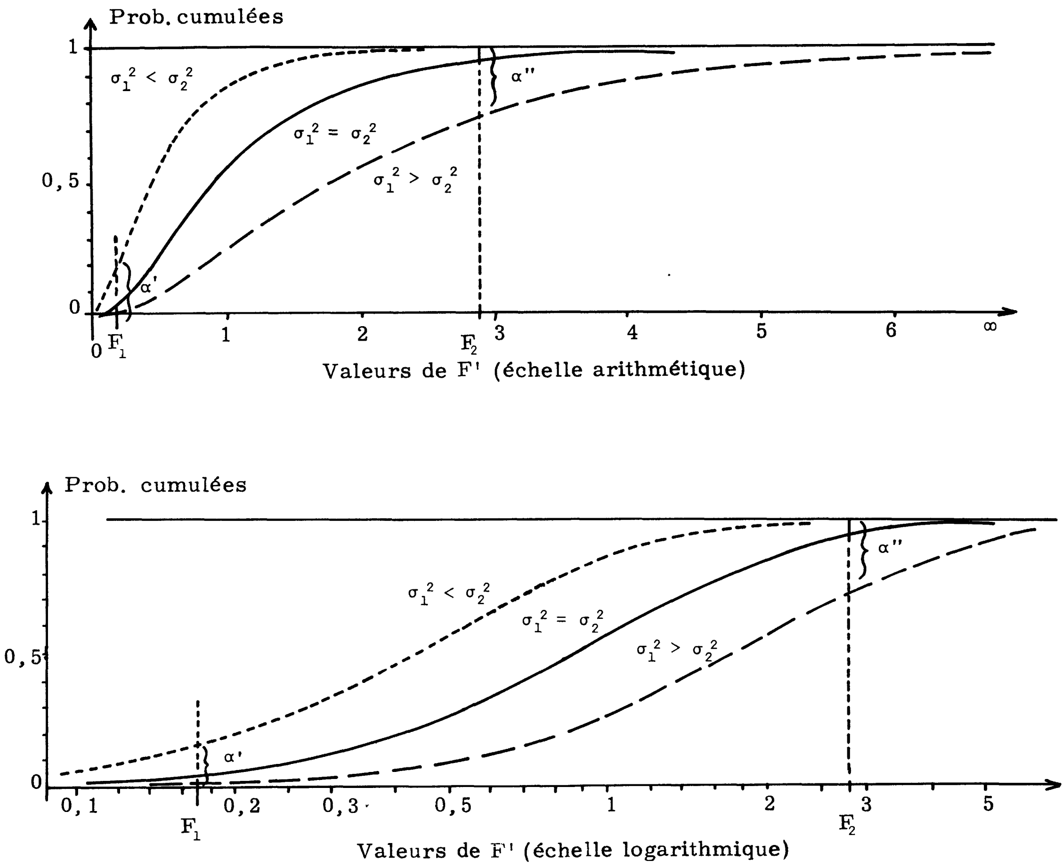


Fig. 8 - Fonction de répartition de F' suivant que σ_1^2 est inférieur, égal ou supérieur à σ_2^2. α', prob. $(O < F' < F_1)$; α'', prob. $(F_2 < F' < \infty)$. $\alpha' = \alpha'' = 0{,}05$ si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

L'inconvénient de ce partage par moitié de α entre les deux parties du domaine de rejet est que le maximum de la probabilité d'accepter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ n'a pas lieu quand cette hypothèse est vérifiée, mais quand σ_1^2 est légèrement inférieur à σ_2^2 si ν_1 est inférieur à ν_2 ou légèrement supérieur si ν_1 est supérieur à ν_2. Autrement dit, la puissance du test, π (k), probabilité de rejeter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ quand effectivement $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = k$, n'est pas minimum pour $k = 1$.

Cette puissance a pour expression :

$$\pi(k) = \text{Prob.}(0 < F' < F_1) + \text{Prob.}(F_2 < F' < \infty) ,$$

soit en remplaçant F' par k F et en divisant les trois membres de chaque double inégalité par la constante positive k :

$$\pi(k) = \text{Prob.}\left(0 < F < \frac{F_1}{k}\right) + \text{Prob.}\left(\frac{F_2}{k} < F < \infty\right)$$

$$= \int_0^{F_1/k} p(F)\, dF + \int_{F_2/k}^{\infty} p(F)\, dF .$$

La dérivée par rapport à k est :

$$\frac{d\pi(k)}{dk} = -\frac{F_1}{k^2}\, p\left(\frac{F_1}{k}\right) + \frac{F_2}{k^2}\, p\left(\frac{F_2}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{kB\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \left[\frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_2}{k}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_2}{k}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} - \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_1}{k}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_1}{k}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \right]$$

$$= \frac{1}{k\,B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \; \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_2}{k}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_1}{k}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \left[\left(\frac{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_1}{k}}{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{F_2}{k}}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \right]$$

Les deux premiers facteurs, devant le crochet, sont essentiellement positifs. Seule la différence entre crochets peut s'annuler.

Si F_1 et F_2 correspondent à un partage quelconque de α entre les deux intervalles de rejet, 0 à F_1 et F_2 à l'infini, la dérivée de π (k) s'annule pour k_o racine de :

$$\left(\frac{k + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1}{k + \frac{1}{2} F_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} = \frac{F_1}{F_2}^{\frac{\nu_1}{2}}$$

soit, en posant $N = \nu_1/(\nu_1 + \nu_2)$:

$$k_o = \frac{\nu_1}{\nu_2}\, \frac{F_2\,(F_1)^N - F_1\,(F_2)^N}{(F_2)^N - (F_1)^N}$$

Dans le cas d'un partage égal de α, c'est-à-dire pour $F_1 = F_{\alpha/2}$ et $F_2 = F_{1-\alpha/2}$

- si $\nu_1 = \nu_2$, on a $k_o = 1$ car $F_1 = 1/F_2$
- si $\nu_1 < \nu_2$, on a $k_o < 1$ car $F_1 < 1/F_2$
- si $\nu_1 > \nu_2$, on a $k_o > 1$ car $F_1 > 1/F_2$

Par exemple, pour $\alpha = 0{,}05$, $\nu_1 = 4$ et $\nu_2 = 20$, on a :

$$F_1 = F_{0{,}025} = \frac{1}{8{,}56} = 0{,}117 \quad \text{et} \quad F_2 = F_{0{,}975} = 3{,}51$$

ce qui donne $k_o = 0{,}865 < 1$ et $\pi(k_o) = 0{,}047 < \alpha$

Pour fixer les limites F_1 et F_2 de l'intervalle d'acceptation, K. V. Ramachandran se donne les deux conditions :

1/ Le niveau de signification du test, c'est-à-dire sa puissance pour $k = 1$, est égal à α;.

$$\pi(1) = 1 - \int_{F_1}^{F_2} p(F)\, dF = \alpha,$$

2/ Le minimum de la puissance a lieu pour $k = 1$: $\left[\frac{d\,\pi(k)}{dk}\right]_{k=1} = 0$, soit :

$$\left(\frac{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1}{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}.$$

On vérifie alors que $\pi(k)$ croît lorsque k s'écarte de 1 vers 0 ou vers l'infini, sa dérivée étant négative pour $0 < k < 1$, nulle pour $k = 1$ et positive pour $1 < k < \infty$. Le signe de $d\pi(k)/dk$ est en effet celui de la différence entre crochets qui s'écrit, eu égard à la seconde condition imposée à F_1 et F_2 :

$$\left(\frac{k + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1}{k + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} - \left(\frac{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1}{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$$

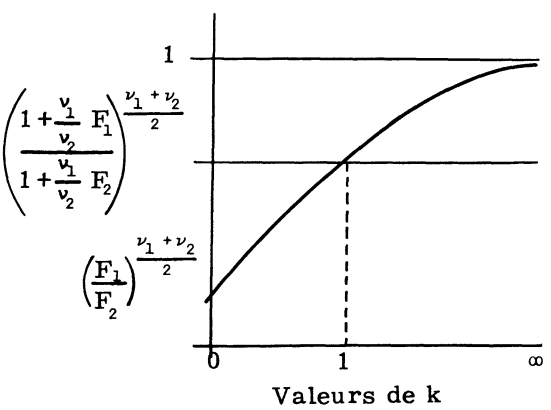


Fig. 9 - Courbe représentative de :

$$\left(\frac{k + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1}{k + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$$

Comme $F_1 < F_2$, le premier terme est une fonction monotone croissante de k pour k positif, inférieure au second terme pour $0 < k < 1$, égal à ce second terme pour $k_o = 1$ et supérieur à ce second terme pour $1 < k < \infty$ (voir fig. 9).

Les valeurs de F_2 calculées par K.V. Ramachandran dans le cas $\alpha = 0{,}05$ et pour diverses valeurs de ν_1 et ν_2 sont présentées ci-après (table 2). Le mode d'emploi de cette table est semblable à celui des tables classiques : on y lit directement F_2 dans la colonne ν_1 et sur la ligne ν_2 tandis que F_1 est à calculer en prenant l'inverse de la valeur lue dans la colonne ν_2 et sur la ligne ν_1. Ainsi, pour $\nu_1 = 4$ et $\nu_1 = 20$:

$$F_1 = \frac{1}{7,16} = 0,140 \quad \text{et} \quad F_2 = 3,98$$

ce qui donne une probabilité de rejet par F' entre 0 et F_1 de $\alpha' = 0,035$ et de rejet par F' entre F_2 et l'infini de $\alpha'' = 0,015$.

Rappelons que par les tables classiques, on a :

$$F_{0,025} = \frac{1}{8,56} = 0,117 \quad \text{et} \quad F_{0,975} = 3,51$$

Ce mode d'obtention de F_1, analogue à celui de $F_{\alpha/2}$ dans le test classique, se justifie par le fait que la variable $F^* = \frac{1}{F} = \frac{s_2^2/\sigma_2^2}{s_1^2/\sigma_1^2}$ suit une loi de probabilité de même forme que F mais avec permutation de ν_1 et ν_2. La correspondance entre F_1 et $F_2^* = 1/F_1$, F_2 et $F_1^* = 1/F_2$, ainsi qu'entre les probabilités de rejet α' et α'' avec $\alpha' + \alpha'' = \alpha$ est représentée par la fig. 10

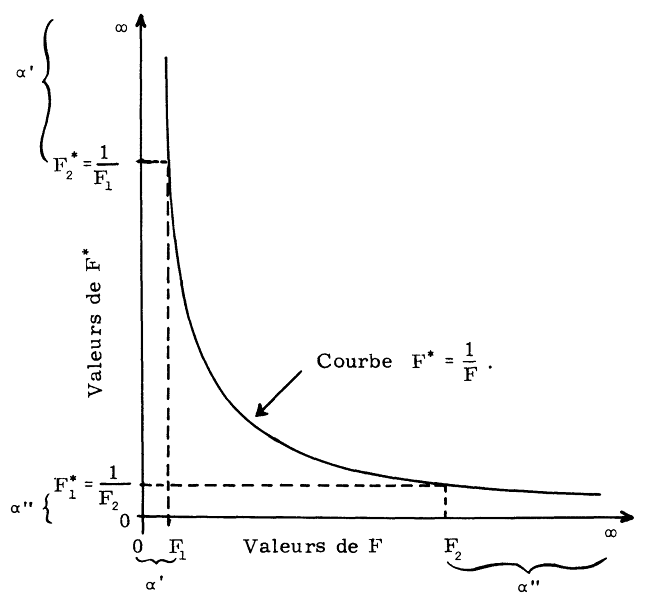


Fig. 10 - Correspondance entre (F_1, F_2) et (F_1^*, F_2^*). $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, prob. de rejet de $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ quand cette hypothèse est vérifiée.

A titre d'exemple, nous reproduisons aussi au tableau 3 les puissances pour diverses valeurs de k du test nouveau d'une part, du test classique d'autre part. Ces puissances ont été calculées par K. V. Ramachandran. Nous les avons complétées pour k = 2 et 4. Même pour des rapports de variances σ_1^2 et σ_2^2 nettement différents de l'unité, tels 0, 1 ou 4, la probabilité d'accepter quand même l'hypothèse d'égalité est encore supérieur à 1/2. C'est que ni ν_1, ni ν_2 ne sont très grands.

Table 1

Limites de l'intervalle d'acceptation, χ_1^2 à χ_2^2,
pour $\alpha = 0,05$ et diverses valeurs de ν(1)

ν	χ_1^2	χ_2^2	ν	χ_1^2	χ_2^2
2	0,08	9,53	14	5,95	27,26
3	0,30	11,19	16	7,24	29,95
4	0,61	12,80	18	8,58	32,61
5	0,99	14,37	20	9,96	35,23
6	1,43	15,90	22	11,36	37,82
7	1,90	17,39	24	12,79	40,39
8	2,41	18,86	30	17,21	47,96
10	3,52	21,73	40	24,86	60,32
12	4,70	24,52	60	40,93	84,23

(1) Pour $\nu > 60$ on a approximativement $\chi_1^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2\nu - 1} - 1,96)^2$

et $\chi_2^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2\nu - 1} + 1,96)^2$

Table 2

Limite supérieure(1) F_2 de l'intervalle d'acceptation
pour $\alpha = 0,05$ et diverses valeurs de ν_1 et ν_2

ν_2 \ ν_1	2	3	4	6	8	10	12	16	20	24	30	40	60
2	39,0	33,2	30,5	28,0	26,8	26,1	25,6	25,1	24,8	24,6	24,4	24,2	24,0
3	18,4	15,4	14,0	12,6	11,96	11,58	11,33	11,05	10,83	10,68	10,54	10,40	10,26
4	12,9	10,7	9,60	8,56	8,05	7,75	7,55	7,30	7,16	7,06	6,97	6,88	6,79
6	9,14	7,46	6,64	5,82	5,42	5,17	5,01	4,81	4,69	4,61	4,53	4,45	4,37
8	7,73	6,26	5,53	4,80	4,43	4,21	4,07	3,88	3,77	3,69	3,62	3,54	3,47
10	7,00	5,63	4,95	4,27	3,93	3,72	3,58	3,40	3,29	3,22	3,14	3,06	2,99
12	6,56	5,26	4,61	3,95	3,62	3,41	3,28	3,10	3,00	2,93	2,85	2,78	2,71
16	6,05	4,83	4,21	3,58	3,26	3,06	2,93	2,75	2,65	2,58	2,51	2,44	2,37
20	5,76	4,53	3,98	3,37	3,06	2,87	2,74	2,56	2,46	2,39	2,32	2,25	2,18
24	5,58	4,42	3,84	3,24	2,93	2,74	2,61	2,43	2,34	2,27	2,20	2,13	2,06
30	5,41	4,26	3,70	3,12	2,81	2,62	2,49	2,31	2,22	2,15	2,07	2,00	1,91
40	5,24	4,11	3,56	2,99	2,69	2,50	2,36	2,20	2,11	2,04	1,96	1,87	1,77
60	5,07	3,98	3,44	2,88	2,58	2,39	2,27	2,09	2,00	1,93	1,89	1,79	1,67

(1) La limite inférieure F_1 est l'inverse de la valeur donnée par la table dans la colonne ν_2 et sur la ligne ν_1.

Par exemple pour $\nu_1 = 4$ et $\nu_2 = 20$ $\quad F_1 = \frac{1}{7,16} = 0,140 \quad$ et $\quad F_2 = 3,98$

Table 3

Puissance comparée du nouveau test et du test classique

pour $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 20$ et $\alpha = 0,05$.

	k = 0,2	0,5	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,5	2	4
nouveau test	0,397	0,113	0,068	0,057	0,052	0,050	0,056	0,080	0,146	0,437
test classique(1)	0,322	0,085	0,053	0,048	0,047	0,050	0,065	0,102	0,185	0,499

(1) Le minimum de la puissance est 0,047 (au millième le plus proche) pour k = 0,865.