REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JACQUES DE GUENIN

Les fondements d’une théorie de la recherche

Revue de statistique appliquée, tome 7, nº 4 (1959), p. 41-71
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1959__7_4_41_0>

LES FONDEMENTS D'UNE THÉORIE DE LA RECHERCHE

Jacques DE GUENIN
Ingénieur au groupe de Recherche Opérationnelle
ESSO STANDARD

Sous le nom de "Théorie de la Recherche" ont paru ces dernières années un petit nombre de publications disparates traitant essentiellement d'applications du calcul des probabilités à certains problèmes militaires qui se sont posés pendant la dernière guerre mondiale (Recherche de navires, détection de sous-marins, protection de convois, etc.). Deux ou trois de ces publications ont abordé en outre, sur le plan théorique le problème de la répartition optimum d'un effort de recherche.

L'objet de cet article est de dégager les concepts fondamentaux des travaux ci-dessus, de montrer que ces concepts ont une portée très générale qui dépasse largement le cadre de la recherche d'objectifs ennemis, et, ce faisant, de jeter les bases d'une Théorie de la Recherche exposant les principes généraux qui permettent de conduire efficacement une recherche. Cette Théorie offrira des rapprochements inattendus avec des notions familières dans d'autres branches de la Recherche Opérationnelle, en particulier la Théorie des Jeux.

La Théorie est dominée par trois concepts qui correspondent respectivement aux trois étapes de toute recherche :

- *évaluation de la Loi de Répartition de l'"objectif" dans l'espace où il est censé se trouver;*
- *calcul de la Probabilité de Détection de l'objectif lorsqu'il est effectivement dans l'élément d'espace où on le cherche;*
- *"Répartition optimum de l'Effort de Recherche", cet effort, ou quantité de recherche, étant généralement limité en pratique.*

Chacun de ces concepts donne lieu à des applications particulières.

Divers exemples, empruntés à des activités variées, illustrent les possibilités d'application de la Théorie : interdiction d'une frontière, surveillance autour d'un navire en mouvement, recherche d'un banc de poissons à partir d'un navire, prospection minière.

SOMMAIRE -

I - OBJET DE LA THEORIE. NOTIONS FONDAMENTALES -

1 - PROBLEME FONDAMENTAL -

On se propose de chercher un ou plusieurs objets dans un espace donné, et l'on désire mettre de son côté le maximum de chances de les trouver avec les moyens dont on dispose. Comment faut-il procéder ?

2 - DEFINITIONS -

On appelle "objectif" chacun des objets recherchés.

On appelle "observateur" l'entité qui s'efforce de trouver l'objectif.

3 - EXEMPLES -

3. 1. Recherche d'une caravane dans le désert par un avion de reconnaissance.

3. 2. Veille aérienne par radar.

3. 3. Prospection minière.

3. 4. Recherche de convois dont le départ a été signalé par les Services de Renseignements.

3. 5. Interdiction d'une frontière par des patrouilles de douane.

4 - CLASSEMENT DES DIFFERENTS CAS PRATIQUES VIS-A-VIS DE LA THEORIE -

Il n'existe évidemment pas de solution analytique générale au problème fondamental posé en 1.

Les différents cas pratiques feront l'objet de développements théoriques nettement distincts selon que l'on considèrera un ou plusieurs objectifs, que les objectifs seront mobiles ou immobiles, que l'observateur sera lui-même immobile ou non, enfin que l'existence des objectifs sera certaine ou seulement probable. Ces distinctions créent en principe $2^4 = 16$ cas. En fait, le nombre de cas est inférieur à 16 à cause de certaines incompatibilités : objectif et observateur ne peuvent être immobiles tous les deux à la fois. D'autre part certaines combinaisons ne donnent pas lieu à des développements distincts : ainsi, dans le cas où l'on recherche un seul objectif, mobile, on emploiera la même méthode, que l'on soit certain ou non de la présence de l'objectif dans l'espace fouillé. Seule changera la probabilité de découverte.

Finalement, le nombre de cas que l'on distinguera effectivement dans les méthodes de traitement peut se ramener à cinq :

4. 1. Un seul objectif, certain ou non, immobile.

4.2. Un ou plusieurs objectifs, certains ou non, mobiles; observateur immobile.

4.3. Un objectif mobile; observateur mobile.

4.4. Plusieurs objectifs incertains, immobiles.

4.5. Plusieurs objectifs incertains mobiles; observateur mobile.

Cette énumération a l'avantage de donner une idée du champ d'application de la Théorie de la Recherche. Cependant, pour exposer cette dernière, il est plus commode d'adopter un autre plan, articulé autour des trois notions fondamentales suivantes :

- Répartition de l'objectif (ou des objectifs).
- Probabilité de détection.
- Effort, ou quantité de recherche.

5 - LES NOTIONS FONDAMENTALES -

5.1. Répartition de l'objectif.

La position, et éventuellement la vitesse, de l'objectif (ou des objectifs), sont aléatoires. La première étape d'un problème de recherche consistera toujours à déterminer les lois de cette répartition. En particulier :

a) Il existe un seul objectif. On cherchera à chaque instant la densité de probabilité de sa position et de sa vitesse.

b) Il existe un grand nombre d'objectifs. On s'efforcera de déterminer la fréquence de ceux qui ont, à chaque instant, une position et une vitesse données. Du point de vue des calculs, ce cas est le même que le cas (a); mais dans un cas les calculs se font sous l'angle probabiliste, et dans l'autre sous l'angle statistique.

c) Il existe peut-être des objectifs. On étudiera par exemple la probabilité pour qu'il existe un objectif dans un élément d'espace donné.

5.2. Probabilité de détection.

C'est la probabilité que l'on a de trouver un objectif lorsqu'il est effectivement à l'endroit où on le cherche.

Cette notion résulte de la constatation expérimentale que l'on peut regarder dans la direction d'un objet sans l'apercevoir. De même un avion peut se trouver dans le champ d'un radar, et son image ne pas apparaître sur le scope pendant plusieurs tours d'antenne.

La probabilité de détection dépend essentiellement de l'endroit considéré, des conditions ambiantes, et de la méthode de recherche. Ainsi, dans le cas d'un sous-marin recherché à vue par un avion, la probabilité de détection est plus grande par beau temps que par brume, lorsque le sous-marin est en surface que lorsqu'il est en plongée; elle est d'autant plus grande que l'avion va plus lentement.

Soit g(M) la probabilité pour que l'objectif soit en M (loi de répartition de l'objectif), et p(M) la probabilité de détection en M. La probabilité de trouver l'objectif lorsqu'on le cherche en M est égale au produit g(M). p(M) (axiome des probabilités composées).

5.3. Effort de Recherche.

Chercher un objectif, c'est répartir un certain "effort de recherche" entre les diverses positions possibles de l'objectif. Mais cet "effort de recherche" est une notion intuitive essentiellement qualitative. Il faut s'efforcer de le mesurer si l'on veut aborder le problème fondamental avec des outils mathématiques. Par convention, on appellera "Effort de Recherche" toute grandeur mesurable (ou toute fonction de grandeurs mesurables) permettant de représenter commodément la quantité de recherche effectuée dans une situation donnée. Sa définition précise dépend donc du cas envisagé. Ainsi, dans les problèmes militaires, l'effort de recherche est presque toujours un temps : le temps pendant lequel on scrute un objectif possible (recherche visuelle), ou celui pendant lequel on pointe un radar dans la direction d'un objectif possible; s'il s'agit d'un radar tournant à vitesse de rotation constante (cas des radars de veille), on choisira plutôt le nombre de tours pendant lequel un objectif visuel se trouve dans le champ, mais on remarquera que ce nombre de tours est proportionnel à un temps.

Dans beaucoup de problèmes, en particulier les problèmes de prospection, il est commode de mesurer l'effort de recherche par le coût de cette recherche. Mais on peut envisager bien d'autres grandeurs : ainsi, dans la fable du "Laboureur et ses enfants", on pourra mesurer l'effort de recherche par le volume de terre déplacé.

Dans certains cas, il peut être nécessaire de faire appel à des grandeurs plus subtiles : par exemple lorsqu'on a le choix entre deux méthodes de recherche auxquelles on ne peut appliquer de mesure commune. Ainsi, la dévote qui a perdu sa clef peut hésiter entre donner de l'argent à Saint-Antoine et consacrer quelque temps à rechercher sa clef. Dans ce cas, l'effort de recherche pourra être une fonction du temps et de l'argent définie comme les fonctions de satisfaction en économie.

6 - NOUVEL ENONCE DU PROBLEME FONDAMENTAL -

Les définitions qui précèdent permettent d'énoncer le problème fondamental en termes plus précis.

Etant donnés :

- un espace E en chaque élément duquel on peut définir une probabilité de détection;
- un ou plusieurs objectifs dont la répartition dans E est aléatoire ;
- un effort total de recherche disponible;

déterminer l'effort de recherche à consacrer à chaque élément de l'espace fouillé de façon à rendre maximum:

la probabilité de découvrir l'objectif (cas d'un objectif);

ou la probabilité de découvrir au moins un objectif (cas de plusieurs objectifs connus);

ou encore : le nombre probable d'objectifs découverts (cas de plusieurs objectifs incertains).

II - HISTORIQUE. EXEMPLES DE DOMAINES D'UTILISATION -

1 - LES PIONNIERS -

Les premiers travaux sur la Théorie de la Recherche ont été effectués pendant la deuxième guerre mondiale sous la pression de problèmes concrets soulevés par les opérations navales. La Marine des Etats-Unis eut le double mérite de se poser ces problèmes et d'en confier l'étude à des Scientifiques de grande réputation qu'elle réunit en un groupe fameux : "l'Antisubmarine Warfare Operations Research Group".

Les travaux de ce groupe ont porté essentiellement sur les problèmes suivants :

1\. 1. Détection par sous-marin d'un sous-marin ennemi et tactique à employer après détection.

1\. 2. Recherche de convois par des sous-marins.

1\. 3. Recherche de sous-marins par des avions (ce problème a surtout préoccupé l'aviation britannique, qui, de 1942 à 1944, a continuellement harcelé les sous-marins allemands dans la baie de Biscay, où se trouvaient les principales bases sous-marines de l'Atlantique).

1\. 4. Un navire étant animé d'une certaine vitesse, loi de répartition de la probabilité pour qu'un navire ennemi apparaisse dans une direction donnée.

1\. 5. Répartition optimum d'une patrouille de chasseurs d'escorte autour d'une "Task Force".

On trouvera dans Morse et Kimball (22) le récit des circonstances opérationnelles dans lesquelles les travaux 1. 1, 1.2, 1.3, et 1.5 se sont effectués, ainsi que des résultats numériques et d'intéressants commentaires sur les méthodes employées.

Afin de faire saisir l'esprit de ces travaux, nous développerons ci-dessous un modèle simplifié, adapté de l'exemple 1.2.

Interception de navires par patrouilles de sous-marins - Dans la mesure où une nation ennemie doit ravitailler par mer des troupes éloignées, ou s'approvisionner en produits stratégiques, elle ne peut éviter une certaine régularité dans les mouvements de ses navires. Sur un trajet donné, un navire peut tout au plus s'écarter de sa route normale d'une distance arbitraire, à l'intérieur de limites que la pratique impose. Sur ce trajet-là, tout se passe donc comme si les différentes trajectoires des navires ennemis étaient équiprobables dans une bande de largeur donnée autour de la route moyenne.

Pour essayer d'intercepter ces navires, on peut envoyer des sous-marins patrouiller dans la bande ainsi définie. Le problème qui se pose alors est de déterminer le nombre optimum de sous-marins et la meilleure façon de les répartir.

Soient :

n le nombre de sous-marins

p la probabilité que le navire soit repéré par un sous-marin donné. On suppose qu'elle est égale à la probabilité que le navire passe à une distance du sous-marin inférieure à la portée de détection "d" de ce dernier.

π la probabilité de destruction du navire par un sous-marin qui a repéré le navire.

P la probabilité de succès de la mission = probabilité globale de couler le navire.

1er cas : patrouille de n sous-marins.

Si le navire est repéré par un sous-marin, il l'est par tous. Il est donc attaqué par tous. On a dans ce cas :

Probabilité de non destruction par un sous-marin donné : $1 - \pi$

Probabilité de non destruction par la patrouille : $(1 - \pi)^n$

Probabilité de destruction : $1 - (1 - \pi)^n$

D'où la probabilité de succès de la mission

$$P = p\,[1 - (1 - \pi)^n]$$

On trouvera P en fonction de n sur la figure 1 pour p = 0,2 et π = 0,25 (courbe en pointillé).

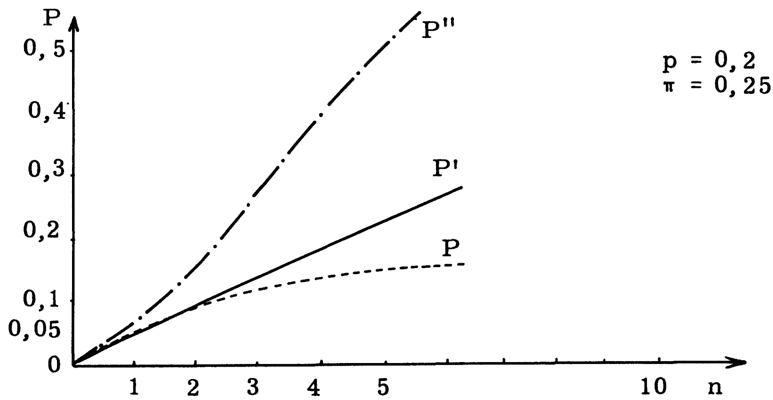

Figure 1

2ème cas: les n sous-marins patrouillent indépendamment à des distances éloignées.

Les probabilités pour que le navire soit aperçu par exactement 1, 2, ... n sous-marins sont distribuées suivant la loi binomiale :

Probabilité que le navire soit repéré par i sous-marins : $C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}$
Probabilité de destruction quand il est repéré par i sous-marins : $1 - (1 - \pi)^i$

La probabilité de succès de la mission est donc (probabilités totales)

$$P' = \sum_{i=1}^{i=n} C_n^i p^i (1 - p)^{n-i} [1 - (1 - \pi)^i]$$

La courbe en trait plein de la figure 1 donne P' en fonction de n pour les mêmes valeurs de p et π.

D'intéressantes conclusions opérationnelles peuvent être tirées de cette analyse :

1/ P' est supérieur à P, quel que soit n. On démontre que ce résultat subsiste quels que soient p et π (compris entre 0 et 1). Le 2ème cas est donc toujours préférable au premier.

2/ P et P' suivent tous les deux la loi des rendements décroissants. Mais cette décroissance est très faible pour P', tant que P' n'est pas voisin de 1 (faibles valeurs de n).

Il apparaît donc plus avantageux d'opérer dans tous les cas en ordre dispersé. On peut alors se demander s'il ne serait pas intéressant de prévoir un moyen de liaison entre les n sous-marins, de façon qu'ils puissent tous attaquer le navire au cas où l'un d'entre eux l'apercevrait.

3ème cas : les n sous-marins patrouillent indépendamment les uns des autres, mais ont la possibilité de communiquer entre eux. Si le navire est aperçu par l'un d'eux, il est attaqué par tous.

Probabilité que le navire soit repéré par au moins un sous-marin : $1-(1-p)^n$
Probabilité de destruction quand le navire est repéré : $1-(1-\pi)^n$

La probabilité de succès de la mission est donc :

$$P'' = [1 - (1 - p)^n] \, [1 - (1 - \pi)^n]$$

P'' est représenté en fonction de n sur la figure 1 (courbe en traits mixtes).

Ce cas est très avantageux pour les faibles valeurs de n. Pour n = 3 par exemple, la probabilité de succès est doublée. Il est donc très rentable de mettre sur pied un processus permettant aux trois sous-marins de communiquer. Un tel processus aurait en moyenne un résultat un peu supérieur à celui de trois sous-marins supplémentaires.

Lorsque n croit, P' et P'' tendent tous deux vers 1 et l'avantage du troisième cas s'amenuise.

2 - TRAVAUX EFFECTUES DEPUIS LA FIN DE LA GUERRE -

Les travaux de l'Antisubmarine Warfare Operations Research Group furent poursuivis par l'actuel Operations Evaluations Group de la marine américaine. L'essentiel des résultats obtenus par ce dernier groupe a été publié dans un rapport "confidentiel" (23) dont une partie seulement a été "déclassée".

On ne sait rien des autres travaux militaires qui ont pu être effectués au cours de ces dernières années, ces travaux étant toujours couverts par le secret. Cependant, si l'on en juge par la quantité et l'importance des études effectuées dans le domaine de la Défense aérienne par les Occidentaux (voir par exemple la liste des publications de la Rand Corporation), on peut admettre comme probable que des travaux sur la recherche et la détection des avions ou des engins aient été effectués par les Armées de l'Air occidentales. Dans cet ordre d'idées, on trouvera, au chapitre "probabilité de détection", quelques indications sur la calibration des radars. On pourra également consulter une étude de M. R. Chantal (lo) sur la loi de répartition d'un avion dont on connaît la position approchée.

Les travaux évoqués au §1, effectués sous la pression des circonstances opérationnelles, avaient un caractère nettement pragmatique. Après la guerre quelques chercheurs se sont posés, à propos des problèmes de Recherche, des questions de caractère plus général. Il en est résulté un très petit nombre de publications théoriques que l'on trouvera en bibliographie (11-17-18-21-22). Citons en particulier une intéressante série d'articles de Bernard Koopman (18) où cet auteur a regroupé quelques études disparates de l'Operations Evaluation Group, et exposé un important travail original sur la répartition optimum de l'effort de Recherche. Ce travail a été repris récemment par Charnes et Cooper (11) qui ont établi le même résultat par une voie différente.

3 - NOUVELLES PERSPECTIVES -

La Théorie de la Recherche ne semble avoir, jusqu'ici, donné naissance à aucune application "civile". Or il existe un domaine par excellence où elle paraît devoir s'appliquer avec fruit : celui de la prospection - recherche minière, exploration pétrolière, sondages aquifères, etc. Cependant, chose curieuse, aucune publication n'a été faite sur ce sujet. Quelques travaux d'avant-garde sur la Statistique et l'Econométrie appliquées à la Recherche Minière ont été publiés en France - citons en particulier De Beauregard (5), Blondel (7), et surtout Allais (2 - 3). Mais aucun de ces articles ne fait explicitement appel à la Théorie de la Recherche. Le principal obstacle à l'application des principes énoncés en 1, à la prospection, est la difficulté de déterminer la loi de répartition de l'objectif lorsque celui-ci est un gisement. Peut-on définir la probabilité pour qu'il existe un gisement dans une formation donnée ? L'article de M. Allais sur la prospection du Sahara (3) semble autoriser une réponse affirmative à cette question. Par l'étude systématique des statistiques concernant les gisements métalliques du monde entier, M. Allais a découvert deux résultats remarquables :

a) La probabilité de découvrir n gisements exploitables dans une aire donnée S suit une loi de Poisson

$$f(n) = \frac{N^n e^{-N}}{n!}$$

le paramètre N, nombre probable de gisements exploitables, dépend évidemment de la nature et de l'étendue de S.

b) La valeur des gisements suit une loi lognormale : la probabilité pour qu'un dépôt donné ait une valeur supérieure à x s'écrit :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

avec

$$z = \frac{1}{\sigma}\ \text{Log}\ \frac{x}{\mu}$$

Les paramètres σ et μ dépendent également de S.

On trouvera dans la partie V de cet article deux exemples d'applications possibles de la Théorie de la Recherche à la Prospection.

4 - GENERALITE DES PROBLEMES DE RECHERCHE -

Les concepts et les outils de la Théorie de la Recherche s'étendent à une classe très générale de problèmes qui peuvent sommairement s'énoncer ainsi :

On dispose de moyens limités avec lesquels on veut s'efforcer d'atteindre un résultat donné (objectif). Il y a plusieurs façons d'opérer (voire une infinité de façons) que l'on croit susceptibles de conduire au résultat. Mais chaque façon n'a qu'une probabilité donnée de mener à ce résultat (loi de répartition de l'objectif). En outre, pour une façon donnée effectivement susceptible de mener au résultat, la probabilité d'obtenir ce résultat est fonction de l'importance des moyens que l'on y consacre (probabilité de détection). Déterminer dans ces conditions la façon d'opérer qui assurera le maximum de chances d'aboutir (Répartition optimum de l'effort de recherche).

On remarquera que ce schéma est celui de la Recherche Scientifique. Donnons-en un exemple simple : supposons qu'un pays désire fabriquer des matières fissiles à usage pacifique et consacre pour cela un budget donné à sa Recherche Nucléaire. Il peut s'orienter vers plusieurs voies :

1. Piles (Plutonium)		
2. Séparation isotopique (Uranium)	:	diffusion gazeuse
3. Séparation isotopique	:	triage électromagnétique
4. Séparation isotopique	:	ultracentrifugation
5. Procédé original		

Evaluer les probabilités de succès dans les différents cas n'est sans doute pas un problème facile (voir III. 2). On peut néanmoins se faire une idée de leurs importances relatives, ou les prendre comme paramètres. Résoudre le problème ainsi posé éclairera sans aucun doute une décision qu'il faut bien prendre de toutes façons.

Le lecteur imaginera sans peine de nombreux autres exemples satisfaisant à ce schéma général.

III-LOIS DE REPARTITION DE L'OBJECTIF-EXEMPLES ET APPLICATIONS -

1 - DEFINITION DE LA LOI DE REPARTITION -

On peut ranger la plupart des problèmes de Recherche dans l'une des trois catégories suivantes :

a) Il y a de nombreux objectifs.

b) Il y a un seul objectif.

c) Il peut y avoir quelques objectifs.

On appellera alors, suivant le cas, "loi de répartition" :

a) La fréquence des objectifs ayant une position, et éventuellement une vitesse donnée, à un instant donné.

b) La probabilité pour que l'objectif se trouve dans une position donnée et éventuellement pour qu'il soit animé d'une vitesse donnée, à un instant donné.

c) La probabilité pour qu'il existe au moins x objectifs dans un espace donné.

2 - DETERMINATION DE LA LOI DE REPARTITION -

La distinction ci-dessus a une grande importance pratique pour la détermination des lois de répartition. En effet, lorsqu'il y a de nombreux objectifs, et lorsque leur apparition n'est pas un évènement unique et fugitif, on peut en général faire des observations statistiques et en déduire une loi de distribution de fréquences. C'est ainsi que pendant la dernière guerre les américains tinrent une statistique des rencontres de leurs navires avec des sous-marins japonais, et que les anglais étudièrent soigneusement la fréquence des détections de sous-marins allemands dans la baie de Biscay.

Le cas d'un seul objectif est plus délicat, car la plupart du temps, la loi de probabilité cherchée ne peut s'appuyer sur la statistique. Les considérations auxquelles ont fait alors appel rejoignent les fondements du calcul des probabilités.

Lorsqu'il y a quelques objectifs, tout dépend des circonstances et du problème. L'exemple des gisements métalliques évoqué en II-3 montre que la loi de répartition peut être parfois déterminée à l'aide de la statistique.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à examiner le cas le plus difficile celui d'un objectif unique (b). Mais les considérations qui suivent pourront éclairer également les deux autres cas (a et c), chaque fois qu'il ne pourra être fait appel à la Statistique pour déterminer la loi de Répartition.

Deux éventualités peuvent se présenter :

- On a affaire à un objectif passif. Le cas type est celui où l'objectif est un gisement. Mais ce peut être aussi celui d'un adversaire qui ne se sait pas recherché.
- On a affaire à un objectif intelligent (cas d'un sous-marin qui se

sait recherché). La recherche devient alors un ensemble de stratégies au sens de la Théorie des Jeux.

2. 1. Cas d'un objectif passif.

Déterminer la loi de répartition d'un objectif unique, passif, revient à assigner une probabilité à un évènement isolé, auquel nul principe de symétrie ou nulle série statistique ne permet d'assigner une probabilité objective. Force est donc, en vue de l'action, de recourir à la notion de probabilité subjective.

La probabilité subjective que l'observateur attribue à un évènement E (l'objectif se trouve à tel endroit), n'est autre "qu'un coefficient rendant quantitative la notion qualitative de vraisemblance de E" pour l'observateur. "Nous jugeons que l'évènement E est plus ou moins vraisemblable, et nous agissons en lui accordant plus ou moins de poids ... "[1].

Conformément à un vieux principe dont on peut sans doute attribuer la paternité à Laplace (19), si l'on n'a rigoureusement aucune information sur les vraisemblances relatives des différentes positions possibles de l'objectif, on les considèrera toutes comme équiprobables. Il est rare qu'il en soit effectivement ainsi, car l'on a toujours quelque idée sur la plus ou moins grande vraisemblance de certaines positions. Cependant, si l'on a peu d'informations, on sera raisonnablement tenté par cette équiprobabilité qui a au moins l'avantage de donner la loi de répartition la plus simple : la répartition uniforme.

Mais adopter une loi de répartition uniforme, c'est rejeter délibérément d'utiles éléments d'information toutes les fois "où il est manifeste", "où nous savons bien", qu'il y a des positions peu vraisemblables, et au contraire des positions privilégiées.

Il sortirait du cadre de ce travail de discuter plus longuement le bien-fondé de la notion de probabilité subjective et les principes de son utilisation. On trouvera des discussions sur ce sujet dans la plupart des ouvrages sur les fondements du calcul des probabilités (voir Keynes (16) et Fortet (13) pour une bibliographie complète). On trouvera en particulier des analyses très pénétrantes dans les "classiques" suivants (dont la liste n'est pas exhaustive): Jacques Bernoulli (6), Laplace (19), Borel (8-9), de Finetti (12), Savage (25), Fréchet (14-15), Allais (1).

Rappelons simplement ici, sans les développer ni les justifier, quelques notions particulièrement utiles dans le maniement des probabilités subjectives :

1/ La probabilité subjective p d'un évènement unique E est définie par le pari que l'individu est disposé à accepter pour ou contre la réalisation de E (Borel).

2/ Les probabilités que j'affecte aux différents évènements incompatibles d'une épreuve traduisent l'ensemble des informations que je possède sur l'épreuve. En l'absence de toute information, les évènements sont réputés équiprobables (Laplace, Paul Lévy).

3/ Dans le cas d'une épreuve isolée, le "subjectiviste" substitue à l'épreuve isolée "une catégorie d'épreuves ayant en commun avec l'épreuve isolée quelques-uns des renseignements que le subjectiviste possède sur cette épreuve isolée" (Fréchet).

4/ Un système de probabilités subjectives doit être cohérent. En d'autres termes, il doit satisfaire aux axiomes de base du calcul des probabilités (proba-

----

(1) Pierre Masse "Le Choix des Investissements" p. 214.

bilités positives, probabilités de l'évènement certain égale à 1, probabilités totales, probabilités composées). On trouvera une excellente démonstration de ce principe pp. 220-223 du livre de M. Pierre Massé "Le Choix des Investissements"

2.2. Cas d'un objectif intelligent. Relations avec la Théorie des Jeux.

Même si l'on n'a aucune information a priori sur les probabilités respectives des différentes positions, on obtient de meilleurs résultats par le raisonnement que par l'adoption d'une loi de répartition uniforme. Un excellent exemple en est fourni par la nouvelle d'Edgar Poe intitulée "La lettre volée"(1) : Le Préfet de Police de Paris recherche une lettre compromettante, dérobée par un Ministre "à une personne du plus haut rang". Cette lettre se trouve nécessairement chez le Ministre. Le Préfet n'arrive cependant pas à mettre la main dessus, malgré l'effort de recherche considérable dépensé jusque-là. Voici en quels termes il raconte son échec à Monsieur Dupin : "Le fait est que nous avons pris notre temps et que nous avons cherché PARTOUT (...). Nous avons entrepris la maison de chambre en chambre; nous avons consacré à chacune les nuits de toute une semaine. Nous avons d'abord examiné les meubles de chaque appartement. Nous avons ouvert tous les tiroirs possibles (...). Il y a dans chaque pièce une certaine quantité de volumes et de surfaces dont on peut se rendre compte. Nous avons pour cela des règles exactes. La cinquantième partie d'une ligne ne peut pas nous échapper".

Peut-on trouver meilleure description littéraire de l'adoption d'une loi de répartition uniforme ? Cependant, pour Monsieur Dupin, qui connait l'intelligence de l'adversaire (et qui est doué lui-même "d'une aptitude analytique particulière") toutes les cachettes ne sont pas équiprobables. "Plus je réfléchissais à l'audacieux, au distinctif et brillant esprit de D", dit-il, "(...) plus je me sentais convaincu que le Ministre, pour cacher sa lettre, avait eu recours à l'expédient le plus ingénieux du monde, le plus large, qui était de ne pas même essayer de la cacher". C'est ainsi que Dupin découvrit la lettre après un effort de recherche minime, au cours d'une pseudo-visite de courtoisie chez le Ministre.

Monsieur Dupin ne nous donnant toutefois pas une loi de Répartition quantitative (sans doute à cause de son peu d'estime pour les mathématiciens) il peut être intéressant de développer un autre exemple.

Une patrouille de douane surveille toutes les nuits une frontière de montagne. Le passage n'est possible qu'à travers quatre cols, et chacun de ces cols est normalement gardé de jour. La nuit, en revanche, on ne peut maintenir du personnel en chacun des cols, et on se contente d'envoyer une patrouille tantôt à un col, tantôt à un autre. Soit f_i la fréquence relative des nuits où le col i reçoit la visite de la patrouille. Les douaniers cherchent à mettre la main sur un rusé contrebandier qui emprunte de temps en temps l'un des quatre cols : il ne passe la frontière qu'une fraction α des nuits. Il passe par le col i avec la fréquence relative g_i.

Lorsque le contrebandier passe la frontière la nuit, il prend quelques précautions pour ne pas être vu, de sorte que même si les douaniers sont là, la probabilité pour qu'il soit vu n'est pas égale à 1. En effet, cette probabilité dépend du col. Elle est égale à p_i pour le col i.

Toutes ces données sont résumées dans le tableau ci-dessous :

----

(1) Nouvelle dans laquelle on trouvera par ailleurs de fort plaisantes considérations sur les Mathématiques.

Col	1	2	3	4	
Probabilité de détection (lorsque les douaniers et contrebandiers sont au même col)	p_1	p_2	p_3	p_4	
Répartition de l'effort de recherche (probabilité pour qu'un douanier soit en i une nuit donnée)	f_1	f_2	f_3	f_4	$\sum_{i=1}^{i=4} f_i = 1$
Loi de répartition de l'objectif (probabilité pour que le contrebandier soit en i une nuit donnée)	g_1	g_2	g_3	g_4	$\sum_{i=1}^{i=4} g_i = \alpha$

Chaque nuit, la probabilité pour que le contrebandier soit vu est

$$P = \sum_i p_i f_i g_i$$

Les douaniers font le raisonnement suivant : "Le contrebandier, qui est rusé, va s'efforcer d'adopter une stratégie (g_1, g_2, g_3, g_4) telle que P soit minimum. Or P est de la forme

$$P = \sum_i (p_i f_i)\, g_i \qquad \text{avec } \sum_i g_i = \alpha$$

"Les ($p_i f_i$) et les g_i étant tous positifs ou nuls, pour rendre P minimum, il suffit de donner la valeur maximum, soit α, à celui des g_i qui a le plus petit coefficient ($p_i f_i$) et la valeur zéro à tous les autres. Soit m la valeur correspondante de i. S'il connaissait notre stratégie, le contrebandier devrait donc adopter lui-même la stratégie

$$g_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq m \text{ et } g_m = \alpha$$

(cette stratégie consiste à n'emprunter que le col m).

"La valeur de P correspondante s'écrit

$$P \min = (p_i f_i) \min . \ \alpha = p_m f_m \alpha$$

"Mais dans cette expression, nous pouvons agir sur f_m, pensent les douaniers. Nous pouvons donc relever la valeur de P minimum. Jusqu'où pouvons-nous aller ? Nous sommes limités par deux conditions

$$p_m f_m \leqslant p_i f_i \qquad \text{quel que soit } i \neq m$$

$$f_m + \sum_{i \neq m} f_i = 1$$

"La valeur maximum que nous puissions donner à $p_m f_m$ est donc telle que tous les $p_i f_i$ soient égaux. Ceci détermine notre stratégie ($f_1 f_2 f_3 f_4$) puisqu'elle doit vérifier

$$\begin{cases} p_1 f_1 = p_2 f_2 = p_3 f_3 = p_4 f_4 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \end{cases}$$

"Notre stratégie la meilleure consiste donc à passer en chaque col un nombre de nuits inversement proportionnel à la probabilité de détection en ce col. Ce résultat est si conforme au bon sens, que notre contrebandier ne peut manquer de le deviner. Il remarquera alors que la probabilité P est maintenant indépendante de sa propre stratégie (g_i) puisque

$$P = \sum_i p_i f_i g_i = p_1 f_1 \sum_i g_i = p_1 f_1 \alpha$$

"Va-t-il en rester là et adopter une stratégie quelconque ? Sûrement pas, car il est aussi prudent que rusé. Il se dira donc : "supposons un instant que les douaniers viennent à connaître ma stratégie (g_i). Ils adopteront alors une stratégie (f_i) telle que

$$P = \sum_i p_i g_i f_i \qquad \text{avec} \quad \sum_i f_i = 1$$

soit maximum. Ceci s'obtiendra en donnant la valeur 1 à celui des f_i qui a le plus grand coefficient ($p_i g_i$), et la valeur zéro à tous les autres. Si M est la valeur correspondante de i on aura

$$P \max = p_M g_M$$

"il faut donc que je rende cette valeur aussi faible que possible. Ceci m'amène à adopter une stratégie telle que

$$\begin{cases} p_1 g_1 = p_2 g_2 = p_3 g_3 = p_4 g_4 \\ g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = \alpha \end{cases}$$

"en faisant ceci, je m'assure d'ailleurs un P qui ne dépend plus de la stratégie adoptée par les douaniers puisque

$$P = \sum_i p_i g_i f_i = p_1 g_1 \sum_i f_i = p_1 g_1$$

"Ainsi, pour moi aussi la meilleure stratégie consiste à adopter une fréquence de passage en un col inversement proportionnelle à la probabilité de détection en ce col".

On vérifiera aisément que la politique des douaniers conduit au même résultat que celle du contrebandier (maximim P = minimax P). En effet, dans le premier cas :

$$P = p_1 f_1 \alpha = p_2 f_2 \alpha = \ldots = \alpha \frac{f_1}{\frac{1}{p_1}} = \alpha \frac{f_2}{\frac{1}{p_2}} = \ldots = \frac{\alpha}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}}$$

et dans le second cas

$$P = p_1 g_1 = p_2 g_2 = \ldots = \frac{g_1}{\frac{1}{p_1}} = \frac{g_2}{\frac{1}{p_2}} = \ldots \frac{\alpha}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}}$$

Ainsi dans le cas d'un objectif intelligent nous avons pu déterminer non seulement la loi de répartition de l'objectif (g_i) que nous cherchions, mais aussi la répartition optimum de l'effort de recherche (f_i) et la probabilité de découverte de l'objectif P.

<u>Remarque</u> - Ainsi que le lecteur l'aura sans doute remarqué, le raisonnement qui précède est un peu plus long que celui que l'on fait d'habitude pour exposer le schéma classique des jeux à deux joueurs et à somme nulle. Dans ce dernier

cas, en effet, on suppose, pas toujours explicitement d'ailleurs, que les adversaires jouent chaque stratégie pendant un nombre de coups suffisamment grand pour pouvoir évaluer correctement leurs espérances mathématiques de gain pour cette stratégie. Ici, la logique du récit ne permet pas la connaissance expérimentale de l'espérance mathématique de gain, car le jeu s'arrêtera dès que les douaniers auront mis la main sur le contrebandier.

3 - PROBLEMES D'APPROCHE -

Dans les problèmes de stratégie navale ou aérienne, il arrive qu'un observateur en mouvement ait besoin de renseignements sur la répartition de l'objectif par rapport à sa propre trajectoire :

- Probabilité pour qu'un objectif passe à un moment quelconque dans un cercle de rayon R centré sur l'observateur;
- Densité de probabilité $g(\alpha)$ pour qu'un objectif se présente à la distance R, dans une direction donnée.

On remarquera que ces informations sont plus élaborées que la simple loi de répartition de l'objectif définie au §1 de ce chapitre. On peut cependant les déduire de la loi de répartition lorsqu'on connait la trajectoire de l'objectif et que l'on se fixe celle de l'observateur.

A titre d'exemple, supposons que l'observateur soit un navire animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse u, et l'objectif un autre navire que nous supposerons au repos pour simplifier (le cas où l'objectif est lui-même en mouvement n'est pas beaucoup plus compliqué, mais les résultats sont plus longs à interpréter car f(x) admet plusieurs formes analytiques différentes suivant la valeur de α).

Le navire observateur aperçoit tout ennemi qui s'approche à moins d'une distance R, à condition d'observer effectivement dans cette direction. Le problème pratique consiste à déterminer les secteurs où il faut porter le plus d'attention (répartition de l'effort de recherche). On va donc chercher la probabilité $g(\alpha)d\alpha$ pour qu'un navire se présente à la distance R entre les angles α et $\alpha + d\alpha$, pendant l'intervalle de temps unité.

Tout ce que l'on sait sur les navires ennemis est qu'il y en a en moyenne N sur l'océan à tout instant. L'observateur leur attribue donc, faute de mieux, une loi de répartition uniforme. Plus précisément, a étant une aire donnée et A l'aire totale de l'océan

$$\text{Prob.}(1 \text{ objectif dans a}) = N\,\frac{a}{A} = n\,a$$

en posant $n = \frac{N}{A}$ = nombre moyen de navires ennemis par unité d'aire.

La probabilité P_R pour qu'un navire pénètre dans le cercle de rayon R centré sur l'observateur pendant l'unité de temps est égale à la probabilité pour que le navire se trouve au début de l'unité de temps, à l'intérieur de l'aire limitée par le quadrilatère mixtiligne ABCDE (figure 2). Cette aire est égale à 2Ru, d'où

$$\boxed{P_R = 2n\,Ru}$$

La probabilité $g(\alpha)d\alpha$ pour que le navire pénètre dans le cercle entre les angles α et $\alpha + d\alpha$, pendant l'unité de temps, est égale à la probabilité pour que

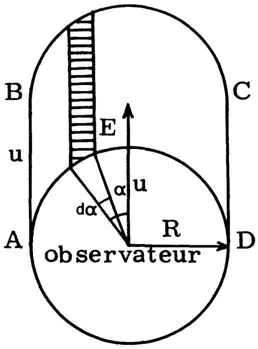

Figure 2

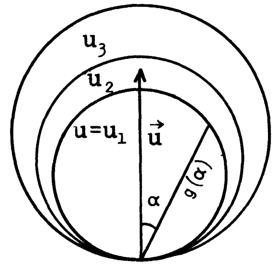

Figure 3

ce navire se trouve, au début de l'unité de temps à l'intérieur de l'aire hachurée de la figure 2. Cette aire est égale à

$$u R \, d\alpha \cos\alpha$$

d'où

$$g(\alpha) d\alpha = n R u \, d\alpha \cos\alpha$$

et

$$g(\alpha) = n R u \cos\alpha$$

La figure 3 est une abaque permettant de lire $g(\alpha)$ sur le rayon vecteur de la direction α, pour une valeur donnée de la vitesse u. L'équation ci-dessus, qui n'est autre que l'équation des courbes d'égales vitesses, en coordonnées polaires de pôle O et d'axe u, montre que ces courbes sont des cercles passant par O et centrés sur la trajectoire.

IV-PROBABILITE DE DETECTION-EXEMPLES DE CALCUL-APPLICATIONS-

1 - DEFINITION DE LA PROBABILITE DE DETECTION -

Lorsqu'on cherche un avion des yeux dans un ciel limpide, ce n'est qu'au bout d'un moment d'attention que l'on parvient à le détecter, même si, grâce au bruit de l'avion, on regarde dans la bonne direction. Si l'on ne s'accorde qu'un temps de recherche limité, il y a donc une probabilité non nulle pour que l'avion échappe à notre observation.

D'une façon générale, on appelle probabilité de détection en un lieu, la probabilité de détecter un objectif qui se trouverait effectivement en ce lieu, lorsqu'on consacre à ce lieu un certain effort de recherche.

La probabilité de détection est donc une fonction de l'effort de recherche. C'est une fonction croissante de l'effort de recherche qui tend généralement vers 1 quand l'effort de recherche croît indéfiniment.

L'expression de la probabilité de détection en fonction de l'effort de recherche dépend essentiellement de la nature de cet effort. Les cas les plus fréquents dans les applications pratiques sont traités ci-dessous à titre d'exemple.

2. 1. Observation par "coups d'œil" successifs.

C'est le cas de l'observation par radar de veille, ou par sonar (détection des sous-marins). C'est encore le cas de la recherche visuelle par balayages successifs d'un espace plus grand que celui dans lequel se trouve l'objectif. L'effort de recherche en un point est ici le nombre n de coups d'œil en ce point.

On appelle taux de détection g, la probabilité d'apercevoir l'objectif en un coup d'œil.

Si l'on suppose les conditions ambiantes constantes, ainsi que la position relative de l'objectif et de l'observateur, la probabilité de détection au bout du $n^{ième}$ coup d'œil est

$$\boxed{p_n = 1 - (1 - g)^n} \tag{1}$$

Si les conditions (distance de l'objectif, visibilité, etc.) varient avec le temps, on aura

$$p_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_n)$$

où g_i est la probabilité de détection au $i^{ème}$ coup d'œil.

2. 2. Observation continue.

C'est le cas de l'observation visuelle lorsqu'on scrute l'espace dans la direction de l'objectif. C'est aussi le cas de l'observation par radar immobile pointé sur l'objectif, de la détection par compteur Geiger, etc. L'effort de recherche est le temps d'observation.

L'expérience montre que la probabilité de détecter pendant l'intervalle de temps t est égale à γdt, où γ est une constante (du moins si les conditions ambiantes sont stables). γ est appelé "taux de détection".

Cherchons la probabilité de détection p(t) pendant le temps t. La probabilité de ne pas détecter pendant ce temps est

$$q(t) = 1 - p(t)$$

$$q(t + dt) = q(t)(1 - \gamma dt)$$

d'où

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q(t + dt) - q(t)}{dt} = -\gamma q(t)$$

Comme q est égal à 1 pour t = 0, $q(t) = e^{-\gamma t}$, d'où

$$\boxed{p(t) = 1 - e^{-\gamma t}} \tag{2}$$

si γ varie avec le temps, on aura

$$\boxed{p(t) = 1 - e^{-\int_0^t \gamma_t dt}}$$

dans ce cas p(t) ne tend pas nécessairement vers 1 quand t tend vers l'infini.

On remarquera l'analogie entre les équations (1) et (2). On peut écrire en effet l'équation (1) sous la forme

$$p_n = 1 - e^{n \operatorname{Log}(1-g)}$$

qui est identique à l'équation (2) à condition de poser

$$\gamma = -k \operatorname{Log}(1 - g) \qquad \text{et} \qquad n = kt \; (k = ct_c)$$

cette transformation est justifiée chaque fois que le nombre de coups d'œil est proportionnel au temps (cas du radar tournant par exemple).

2.3. Détection Poissonnienne.

L'expression (2) s'étend à un effort de recherche φ quelconque, toutes les fois que la probabilité de détecter avec l'effort $d\varphi$ est proportionnelle à $d\varphi$, et ne dépend pas de l'effort φ qui a déjà pu être dépensé (condition de Poisson). Si $\gamma d\varphi$ est la probabilité de détecter avec l'effort $d\varphi$, le même raisonnement que précédemment donne

$$\boxed{p(\varphi) = 1 - e^{-\gamma\varphi}}$$

γ s'appelle encore taux de détection.

Nous appellerons "détection poissonnienne" ce cas de détection très important dans la pratique.

2.4. Recherche méthodique et Recherche au hasard.

Un cas de détection non moins important que le précédent, au moins dans la vie quotidienne, est celui où la probabilité de détecter avec l'effort $d\varphi$ dépend de l'effort φ déjà fourni. Ainsi, lorsque nous recherchons méthodiquement, élément de surface par élément de surface, un objet perdu sur une plage, le taux de détection croît avec φ, et atteint la valeur 1 pour une valeur finie de φ.

Soit A l'aire de la plage. Nous la divisons en aires élémentaires ΔA. Il suffit d'observer ΔA pendant un temps Δt pour pouvoir affirmer si l'objet se trouve ou non en ΔA. Pour un effort de recherche t, la probabilité de détection est

$$\begin{cases} p_m(t) = \dfrac{t}{\Delta t} \; \dfrac{\Delta A}{A} = \gamma t & \text{pour } t \leqslant \dfrac{1}{\gamma} \\[2ex] p_m(t) = 1 & \text{pour } t > \dfrac{1}{\gamma} \end{cases}$$

en posant $\gamma = \dfrac{1}{A} \; \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$ (taux de détection)

A l'opposé du comportement précédent, on trouve celui qui consiste à chercher au hasard : le regard est promené un peu partout de façon aléatoire et les éléments de surface examinés se succèdent dans un ordre quelconque (un même élément pouvant de la sorte être examiné plusieurs fois).

La probabilité pour qu'un élément d'aire regardé à un instant donné pendant Δt soit celui où se trouve l'objet est égale à $\dfrac{\Delta A}{A}$.

La probabilité pour que cet élément ne soit pas celui où se trouve l'objet est donc égale à $1 - \dfrac{\Delta A}{A}$.

Pendant le temps t, le nombre d'éléments examinés est $\dfrac{t}{\Delta t}$. La probabilité pour que l'objet ne se trouve dans aucun d'eux est donc égale à $\left(1 - \dfrac{\Delta A}{A}\right)^{\frac{t}{\Delta t}}$.

D'où la probabilité de détection en fonction de t :

$$p_h(t) = 1 \left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right)^{\frac{t}{\Delta t}}$$

si ΔA est petit devant A, on peut écrire

$$p_h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\Delta t}\frac{\Delta A}{A}} = 1 - e^{-\gamma t}$$

on aurait pu obtenir directement ce résultat en remarquant que la détection est poissonnienne : la probabilité de détection pour l'effort de recherche Δt est égale à $\gamma \Delta t$ et indépendante de l'effort déjà fourni.

La figure 4 précise l'avantage de la recherche méthodique sur la recherche désordonnée

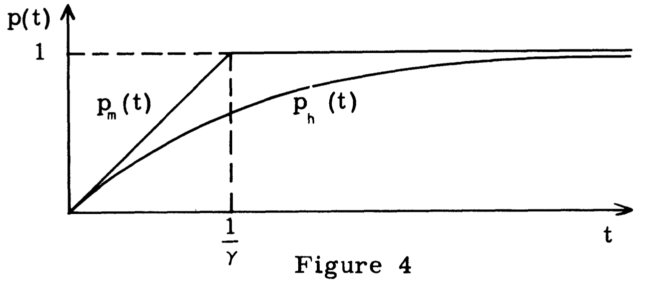

Figure 4

3 - EXEMPLES DE DETERMINATION DU TAUX DE DETECTION - APPLICATIONS -

3. 1. Calibration des radars tournants.

Les radars de veille aérienne sont équipés d'antenne tournant à vitesse constante autour d'un axe vertical. La détection d'un avion consiste en l'apparition d'un plot sur l'écran du radar, au moment où le rayon vecteur qui balaie l'écran en synchronisme avec l'antenne passe par la direction de l'avion. Or il arrive qu'un avion soit détecté à certains tours d'antenne et pas à d'autres. En effet, l'intensité du plot dépend, pour une distance donnée de l'avion, de facteurs aléatoires à variations très rapides :

- les caractéristiques électromagnétiques de l'atmosphère sur la distance considérée.
- la surface de réflexion présentée par l'avion (il suffit d'un changement d'angle très petit pour modifier complètement la surface apparente).
- le bruit de fond du récepteur.

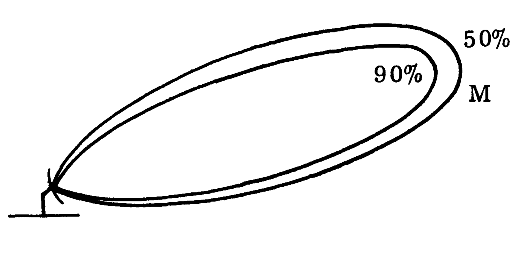

Figure 5

On appelle taux de détection au point M la probabilité pour qu'un avion situé au voisinage du point M soit détecté en un tour d'antenne.

On appelle lobe de détection à x% le lieu des points M tels que le taux de détection en M soit égal à x% (figure 5).

A l'intérieur du lobe à 50% par exemple, un avion a au moins une chance ou deux d'être vu à chaque tour d'antenne. Il a au moins une chance sur deux d'être à l'extérieur.

On conçoit tout l'intérêt de la détermination de ces lobes pour la défense aérienne. C'est l'objet de la calibration.

La méthode de calibration la plus naturelle consiste à mesurer directement le taux de détection point par point sur un certain nombre de paliers effectués par des avions au cours de "vols de calibration".

Par définition, le taux de détection au voisinage du point M est la limite du rapport

$$\frac{n}{N} = \frac{\text{nombre de tours où un plot est apparu}}{\text{nombre de tours d'antenne}}$$

lorsque N tend vers l'infini.

La précision sur la mesure de γ sera donc d'autant meilleure que N sera plus grand. Mais en pratique, un avion ne peut rester longtemps au voisinage d'un point, de sorte que l'on ne peut donner à N que des valeurs assez faibles. Quelle est, dans ces conditions, la précision obtenue en posant le taux de détection = $\frac{n}{N}$?

Supposons N fixé. La variable aléatoire $\frac{n}{N}$ peut prendre les valeurs discrètes

$$0, \frac{1}{N}, \ldots\ldots, \frac{m}{N}, \ldots\ldots, \frac{N}{N}$$

avec des probabilités distribuées suivant la loi binomiale. En effet, la calibration au voisinage de M est un "tirage" de N éléments (tours d'antenne) dans une population infinie qui ne comporte que deux sortes d'éléments en proportion γ et $1 - \gamma$ (un plot apparaît : probabilité γ, ou aucun plot n'apparaît : probabilité $1 - \gamma$)

$$P_r\left(\frac{n}{N} = \frac{m}{N}\right) = C_N^m \gamma^m (1 - \gamma)^{N-m} \tag{1}$$

Appelons a l'entier tel que $\frac{a}{N}$ soit le plus voisin possible de γ. Soit $\left(\frac{a - \alpha}{N}, \frac{a + \alpha}{N}\right)$ l'intervalle maximum dans lequel doit se trouver $\frac{n}{N}$ pour que l'erreur commise en prenant $\frac{n}{N}$ pour mesure de γ nous paraisse acceptable.

On a

$$P_r\left(\frac{a - \alpha}{N} \leqslant \frac{n}{N} \leqslant \frac{a + \alpha}{N}\right) = \sum_{n=a-\alpha}^{n=a+\alpha} C_N^n \gamma^n (1 - \gamma)^{N-n}$$

Cette expression se calcule aisément à l'aide des tables de la loi binomiale.

<u>Application numérique</u>. Vitesse de l'avion : 3 km/mn
Vitesse de rotation du radar : 6 tours/mn

Si l'on assimile au point M une sphère de 3 km de diamètre autour de M, (ce qui est raisonnable pour un radar de veille ordinaire, dont le lobe à 50% s'étend sur plusieurs centaines de kilomètres), on voit que l'avion "se trouve en M" pendant 6 tours d'antenne : N = 6.

Supposons qu'au point M, $\gamma = 0,5$. L'application de la formule (1) montre qu'il y a seulement une chance sur trois pour que $\frac{n}{N} = 0,5$. Il y a presque une chance sur deux $\left(\frac{30}{64}\right)$ pour que $\frac{n}{N}$ soit égal soit à 1/3 soit à 2/3.

La précision obtenue est donc très médiocre. Si l'on veut une précision supérieure, il faut faire plusieurs paliers à la même altitude. Supposons par exemple que l'on effectue 5 paliers : N = 30. Prenons pour intervalle de tolérance $(0,4 \leqslant \frac{n}{N} \leqslant 0,6)$ et cherchons la probabilité pour que la mesure du taux tombe dans cet intervalle :

$$P_1\left(\frac{12}{30} \leqslant \frac{n}{30} \leqslant \frac{18}{30}\right) = \sum_{n=12}^{n=18} C_{30}^{n}\,(0,5)^n(0,5)^{30-n} = 0,72$$

Ainsi, même avec 5 paliers par altitude (ce qui représente un nombre considérable d'heures de vol), on n'a qu'une probabilité de 0,72 pour que l'erreur soit inférieure à 20%!

Cette méthode de calibration, qui a été utilisée pendant des années par toutes les armées du monde, ne donne, malgré son coût très élevé, que des résultats sans signification.

A l'heure actuelle, les meilleures méthodes de détermination des lobes sont basées sur la mesure directe du champ électromagnétique par des appareils enregistreurs transportés par des avions ou des hélicoptères.

3.2. Influence du mouvement sur le taux de détection.

Lorsque l'objectif et l'observateur sont deux mobiles, leur position relative varie continuement. Dans ces conditions, le taux de détection γ défini au § 2 ne saurait être considéré comme une constante. Toutefois, si les conditions ambiantes sont stables, ce taux ne dépend que de la position relative des deux mobiles, en particulier de leur distance. Nous supposerons dans ce qui suit que le taux γ ne dépend que de cette distance, cas assez fréquent en pratique.

Dans la plupart des problèmes concrets, les mobiles sont tous les deux dans un même plan (sous-marin en surface à la recherche d'un convoi), ou dans deux plans parallèles (avion cherchant un convoi en mer, navire cherchant un sous-marin en plongée). Dans ce dernier cas, nous considèrerons la projection d'un mobile sur le plan de l'autre.

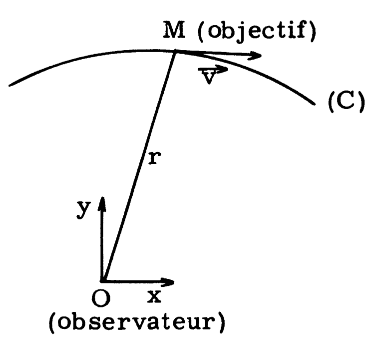

Figure 6

Soit (C) la trajectoire relative de l'objectif par rapport à l'observateur, x O y un système d'axes liés à l'observateur, et r la distance horizontale des deux mobiles (figure 6). Soient :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

les équations du mouvement relatif. On a

$$r^2 = x^2(t) + y^2(t)$$

et comme γ ne dépend que de r on peut écrire

$$\gamma = \gamma\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right)$$

Si la détection est poissonnienne (ce qui est en particulier le cas lorsque l'observation se fait à vue ou par radar), la probabilité de détection entre deux instants t' et t'' s'écrit (§ 2.2)

$$p = 1 - e^{-\int_{t'}^{t''} \gamma(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)})dt}$$

soit encore

$$\boxed{p = 1 - e^{-F(c)}}$$

avec

$$\boxed{F(c) = \int_c (r) \frac{ds}{v}}$$

c étant l'arc parcouru par l'objectif entre les instants t' et t", et v la vitesse de l'objectif.

La fonction F(c) est appelée "potentiel de vision". Elle jouit de l'importante propriété d'additivité : si c_1 et c_2 sont deux arcs de trajectoire relative, on a

$$F(c_1 + c_2) = F(c_1) + F(c_2)$$

<u>Exemple</u> - Supposons que l'observateur soit un avion navigant à une altitude h au-dessus de l'océan, et l'objectif un banc de poissons(1).

On admet que le taux de détection γ est proportionnel à l'angle solide sous lequel on voit le banc du point d'observation. A étant l'aire du banc, supposé faible devant r (figure 7), on peut écrire :

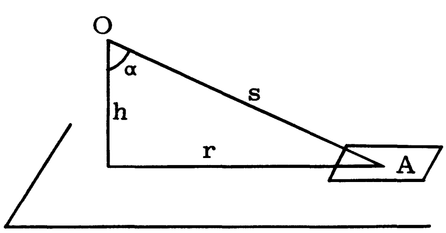

Figure 7

$$\Omega = \frac{A \cos \alpha}{s^2} = \frac{Ah}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

d'où

$$\gamma = \frac{kh}{s^3} = k \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

si h est faible devant r on aura

$$\gamma = k \frac{h}{r^3}$$

Le taux de détection est inversement proportionnel au cube de la distance.

Si l'on suppose les deux mobiles animés de mouvements rectilignes et uniformes, la trajectoire relative c est une droite x'x" à la distance d de l'observateur (figure 8)

$$F(c) = \int_{x'x''} \gamma(r) \frac{dx}{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kh}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \frac{dx}{v} = \frac{2kh}{vd^2}$$

---

(1) Le repérage des bancs de poissons au moyen d'avions volant entre 400 et 500 m est possible jusqu'à une trentaine de mètres de profondeur. Les bancs apparaissent comme des tâches mauves ou violettes. Les pêcheries soviétiques ont des services de prospection qui suivent ainsi les bancs de poissons. L'auteur ignore cependant si ces services connaissent la théorie de la recherche.

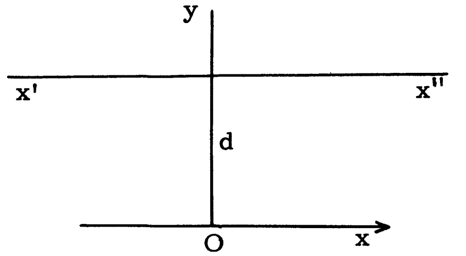

Figure 8

d'où

$$p(d) = 1 - e^{-\frac{K}{d^2}}$$

Ainsi, si le temps d'observation est suffisamment long, la probabilité de détection ne dépend que de la distance de l'observateur à la trajectoire apparente de l'objectif.

V - REPARTITION OPTIMUM DE L'EFFORT DE RECHERCHE - THEORIE DE LA RECHERCHE STATIQUE -

Une fois déterminés la loi de répartition de l'objectif et les probabilités de détection, le dernier pas dans la résolution du problème fondamental consiste à déterminer la répartition optimum de l'effort de recherche. La marche à suivre pour cela dépend du cas considéré : nature de l'effort de recherche, forme de la loi de répartition de l'objectif et de la loi de probabilité de détection, etc. (nous avons déjà traité un cas au chapitre III § 2.2. : "cas d'un objectif intelligent. Relations avec la Théorie des Jeux").

On peut cependant développer une Théorie générale de la répartition optimum de l'effort de recherche lorsque les objectifs sont passifs et immobiles. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce qui suit (ce cas est particulièrement important puisque c'est celui de la Recherche Minière). Nous étudierons séparément les deux cas suivants :

- Un objectif défini;
- Plusieurs objectifs en nombre aléatoire.

1/ Cas d'un objectif défini.

Soit à rechercher un objectif unique immobile dont la position peut être définie par la donnée d'un paramètre X. X est une variable aléatoire.

La loi de répartition de l'objectif est la fonction g(x) définie par :

$$g(x)dx = P_r\,(x \leqslant X \leqslant x + dx)$$

g(x) satisfait aux conditions

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1 \end{cases}$$

La dernière condition exprime que l'objectif se trouve nécessairement quelque part dans l'espace fouillé. S'il n'en était pas ainsi, c'est-à-dire s'il y avait seulement une probabilité $\alpha < 1$ pour que l'objectif se trouve bien dans l'espace fouillé, on aurait simplement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \alpha$$

ce qui ne changerait rien au raisonnement qui va suivre ni aux résultats.

On suppose que l'effort de recherche entre x et x + dx est représentable par l'expression $\varphi(x)dx$, où $\varphi(x)$ est une fonction continue jouissant des deux propriétés suivantes :

$$\varphi(x) \geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \Phi$$

Φ est l'effort total de recherche disponible. La fonction $\varphi(x)$ définit donc la répartition de l'effort de recherche.

La probabilité de détection (probabilité de détecter l'objectif en x s'il s'y trouve effectivement) est la fonction $p(\varphi)$ jouissant des propriétés suivantes[1] :

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(\varphi) \text{ tend vers une valeur inférieure ou égale à 1 quand } \varphi \longrightarrow \infty . \\ p(\varphi) \text{ est une fonction croissante de } \varphi \text{ et suit la loi des rendements décroissants.} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} p'(\varphi) \geqslant 0 \\ p'(\varphi) \text{ est une fonction décroissante de } \varphi . \\ p'(0) > 0 \quad p'(\infty) = 0. \end{cases}$$

Ces relations montrent que $p'(\varphi)$ admet une fonction inverse $\varphi = f(p')$, propriété qui nous sera utile par la suite.

$p(\varphi)$ est une fonction de fonction de x par l'intermédiaire de φ :

$$p(x) = p\Big(\varphi(x)\Big)$$

La définition donnée suppose que $p(\varphi)$ ne dépend que de l'effort de recherche, et non de la position; en d'autres termes, que l'on a bien $p(x) = p\big(\varphi(x)\big)$ et non $p(x) = p\big(x, \varphi(x)\big)$. Il n'en est pas toujours ainsi en pratique. Ainsi, dans la recherche visuelle, la probabilité de détection en fonction de l'effort de recherche dépend des conditions atmosphériques, qui peuvent fort bien ne pas être uniformes. Pour un même effort de recherche, la probabilité de détection sera meilleure dans les azimuths dégagés que dans les azimuths couverts. Pour être tout à fait général, il faudrait donc représenter l'effort de recherche par une fonction $p\big(x, \varphi(x)\big)$ telle que

$$\begin{cases} p(x, 0) = 0 \text{ quel que soit x.} \\ p(x_0, \varphi) \text{ est une fonction croissante de } \varphi, \text{ quel que soit } x_0. \\ p'\varphi(x_0, \varphi) \text{ est une fonction décroissante de } \varphi, \text{ quel que soit } x_0. \\ p(x, \infty) = p_\infty(x) \leqslant 1. \end{cases}$$

Nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir l'exposé, mais le lecteur pourra s'assurer que le raisonnement s'étend à ce cas[2].

---

(1) Koopman d'une part (17), Charnes et Cooper de l'autre (10) ont étudié le cas particulier où la probabilité de détection est de la forme $1 - e^{-\varphi}$ (cas que nous avons appelé "détection poissonnienne"). Si ce cas est particulièrement important dans les applications militaires, il ne semble pas convenir à toutes les applications (cf. en IV 2.4 un exemple de détection non poissonnienne). Dans la recherche minière en particulier, il ne semble pas que $p(\varphi)$ puisse se mettre sous la forme $1 - e^{-\varphi}$ quelle que soit la grandeur φ que l'on adopte pour représenter l'effort de recherche. De toutes façons le fait de raisonner sur la fonction $p(\varphi)$ la plus générale permettra, dans toutes les applications pratiques, de prendre directement le coût de la recherche comme mesure de l'effort de recherche.

(2) La clef de la solution réside dans l'existence de la fonction inverse $f(p')$ existence due au fait que $p'(\varphi)$ est monotone. Or les propriétés de $p'\big(x, \varphi(x)\big)$ garantissent de la même façon

La probabilité de détecter un objectif entre x et x + dx s'écrit (axiome des probabilités composées) :

$$g(x)\,p\Big(\varphi(x)\Big)\,dx$$

La probabilité de succès de la recherche s'écrit donc (axiome des probabilités totales) :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,p\Big(\varphi(x)\Big)dx = P(\varphi)$$

Le problème que nous nous posons (détermination optimum de l'effort de recherche) peut maintenant être énoncé ainsi : <u>déterminer la fonction $\varphi(x)$ de façon que $P(\varphi)$ soit maximum.</u>

Ce problème apparaît au premier abord comme un problème-type de Calcul des Variations. En fait, nous ne pouvons utiliser ici les résultats classiques du Calcul des Variations car :

1) Ils se placent dans le cadre d'hypothèses trop restrictives sur la fonction $\varphi(x)$; ($\varphi'(x)$ continue). Or nous verrons que l'optimum correspond précisément à une fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée est discontinue.

2) $\varphi(x)$ est soumise ici aux deux conditions particulières

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \Phi \end{cases}$$

Nous ferons alors un raisonnement analogue aux raisonnements de la Mécanique Rationnelle sur les déplacements virtuels.

Nous allons montrer qu'une condition nécessaire pour que $\varphi(x)$ rende $P(\varphi)$ maximum est que $\varphi(x)$ satisfasse à la condition

$$g(x)\,p'_{\varphi}\Big(\varphi(x)\Big) = \text{Cte} \qquad \text{pour tout x tel que } \varphi(x) > 0$$

Soit $\varphi_o(x)$ une fonction telle que $P(\varphi_o)$ soit maximum, et x_1 un point tel que $\varphi_o(x_1)$ soit positive. Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ on doit avoir :

$$P(\varphi_o) - P(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\Big[p\Big(\varphi_o(x)\Big) - p\Big(\varphi(x)\Big)\Big]dx \geqslant 0$$

Soit alors φ la fonction obtenue en déplaçant de x_1 en un point quelconque x_2 l'effort de recherche représenté par la petite aire hachurée de mesure $\Delta\varphi\,dx$ (figure 9).

Cela est toujours possible à condition de prendre $\Delta\varphi$ suffisamment petit puisque nôus avons supposé $\varphi_o(x_1) > 0$.

$$P(\varphi_o) - P(\varphi) = g(x_1)\Big[p\Big(\varphi_o(x_1)\Big) - p\Big(\varphi(x_1)\Big)\Big]dx + g(x_2)\Big[p\Big(\varphi_o(x_2)\Big) - p\Big(\varphi(x_2)\Big)\Big]dx \geqslant 0$$

or $\varphi(x_1) = \varphi_o(x_1) - \Delta\varphi$

(Suite et fin de la note précédente).

(2) l'existence d'une fonction inverse $\varphi = f(x, p')$. En pratique, lorsque les conditions ambiantes ne sont pas homogènes, la probabilité de détection est simplement de la forme $p\big(k(x)\,\varphi(x)\big)$, où k(x) est un coefficient pondérateur inférieur ou égal à 1. Cette circonstance rend plus aisé le calcul effectif de la fonction inverse.

D'où par application de la formule des accroissements finis

$$p\left(\varphi(x_1)\right) = p\left(\varphi_o(x_1)\right) - \Delta\varphi \; p'_\varphi(\varphi_o(x_1) - \theta_1\Delta\varphi) \qquad \text{avec } 0 < \theta_1 < 1$$

et $$p\left(\varphi_o(x_1)\right) - p\left(\varphi(x_1)\right) = \Delta\varphi \; p'_\varphi\left(\varphi_o(x_i) - \theta_1\Delta\varphi\right) \qquad \text{avec } 0 < \theta_1 < 1$$

on aurait de la même façon

$$p\left(\varphi_o(x_2)\right) - p\left(\varphi(x_2)\right) = -\Delta\varphi \; p'_\varphi\left(\varphi_o(x_2) + \theta_2\Delta\varphi\right) \qquad \text{avec } 0 < \theta_2 < 1$$

après simplification par $\Delta\varphi$ et dx la condition $P(\varphi_o) - P(\varphi) \geqslant 0$ s'écrit alors

$$g(x_1)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_1) - \theta_1\Delta\varphi\right) - g(x_2)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_2) + \theta_2\Delta\varphi\right) \geqslant 0$$

condition qui demeure vraie quel que soit $\Delta\varphi$ pourvu que $\Delta\varphi < \varphi_o(x_1)$

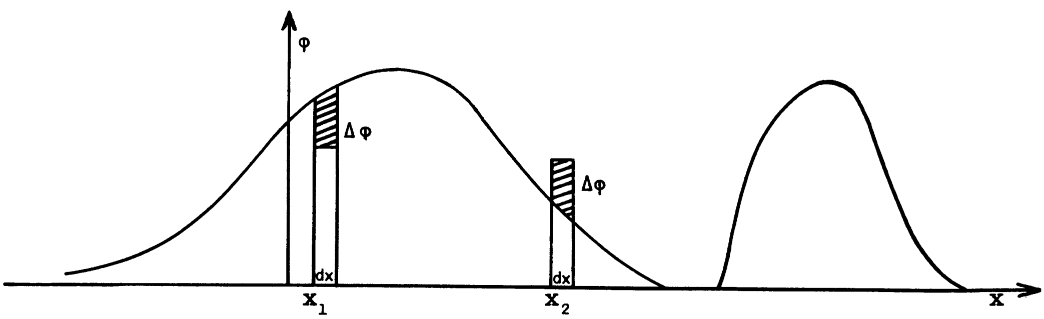

Figure 9

Si l'on fait tendre $\Delta\varphi$ vers 0 on aura, à la limite

$$g(x_1)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_1)\right) - g(x_2)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_2)\right) \geqslant 0$$

Notons que ce résultat a été obtenu sous la seule condition $\varphi_o(x_1) > 0$. Si nous choisissons maintenant x_2 tel que $\varphi_o(x_2) > 0$, on peut démontrer exactement de la même façon, mais en transposant cette fois l'effort $\Delta\varphi$ de x_2 en x_1, que

$$g(x_2)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_2)\right) - g(x_1)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_1)\right) \geqslant 0$$

on en déduit que

$$\boxed{g(x_1)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_1)\right) = g(x_2)\, p'_\varphi\left(\varphi_o(x_2)\right)}$$

Ainsi une condition nécessaire pour que $\varphi(x)$ soit optimum est que pour tout point x tel que $\varphi(x) > 0$ on ait la relation

$$\boxed{\begin{cases} g(x)\, p'_\varphi\left(\varphi(x)\right) = \text{Cte} \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}}$$

Cette relation peut s'écrire $\dfrac{g(x)}{\frac{d\varphi}{dp}} = \text{Cte}$. Or $\dfrac{d\varphi}{dp}$ n'est autre que l'effort marginal pour accroître la probabilité de détection. La relation trouvée signifie donc qu'à l'équilibre <u>l'effort marginal pour accroître la probabilité de détection en un point est proportionnel à la densité de probabilité de la position de l'objectif en ce point.</u>

Détermination de $\varphi(x)$ - Soit λ la constante à laquelle est égal le produit $g(x)p'_\varphi(\varphi(x))$. Cette constante est positive par définition des fonctions $g(x)$ et $p(\varphi)$. Soit E l'ensemble des points tels que $\varphi(x) > 0$ pour $x \in E$ (si $x \notin E$ on a donc $\varphi(x) = 0$).

Démontrons quelques propriétés qui nous serviront à déterminer $\varphi(x)$.

1. 1. $\begin{cases} \text{Si } x \in E & g(x) > \dfrac{\lambda}{p'(0)} \\ \text{Si } x \notin E & g(x) \leqslant \dfrac{\lambda}{p'(0)} \end{cases}$

En effet si $x \in E$ $\quad g(x)p'_\varphi\left(\varphi(x)\right) = \lambda,$

or $0 < p'_\varphi\left(\varphi(x)\right) < p'_\varphi(0),$

$$\text{d'où } g(x) > \frac{\lambda}{p'(0)}$$

Si $x \notin E$ $\quad \varphi(x) = 0$. Soit alors $x_2 \in E$

$g(x)p'_\varphi\left(\varphi(x)\right) \leqslant g(x_2)p'_\varphi\left(\varphi(x_2)\right) = \lambda$

$$\text{d'où } g(x) \leqslant \frac{\lambda}{p'(0)}$$

1. 2. E est fini $\quad 1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx > \int_E g(x)dx > \int_E \frac{\lambda}{p'(0)}\, dx = E\,\frac{\lambda}{p'(0)}$, d'où

$$E < \frac{p'(0)}{\lambda}$$

1. 3. Si $x \in E$ $\quad \varphi(x) = f\left(\dfrac{\lambda}{g(x)}\right)$.

En effet $p'(\varphi)$ admet une fonction inverse $\varphi = f(p')$ décroissante de l'infini à zéro quand p' croît de 0 à $p'(0)$, et non définie au-delà.

Puisque $\dfrac{\lambda}{g(x)} < p'(0)$ pour $x \in E$, $f\left(\dfrac{\lambda}{g(x)}\right)$ est bien définie pour tout $x \in E$.

1. 4. $\Phi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_E \varphi(x)dx = \int_E f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right)dx$. Cette relation et la relation 1. 1. vont permettre de déterminer E et λ.

1. 5. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs de λ telles que $\lambda_1 > \lambda_2$, E_1 et E_2 les ensembles correspondants. Les relations 1.1. montrent que $E_1 < E_2$. D'autre part , quel que soit $x \in E_1 \cap E_2$, on a

$$f\left(\frac{\lambda_1}{g(x)}\right) < f\left(\frac{\lambda_2}{g(x)}\right)$$

puisque $f\left(\dfrac{\lambda}{g(x)}\right)$ est une fonction décroissante de $\dfrac{\lambda}{g(x)}$.

1. 6. Les courbes $f\left(\dfrac{\lambda_1}{g(x)}\right)$ et $f\left(\dfrac{\lambda_2}{g(x)}\right)$ ont donc les positions respectives schématisées sur la figure 10. On en déduit

$$\int_{E_1} f\left(\frac{\lambda_1}{g(x)}\right) dx < \int_{E_2} f\left(\frac{\lambda_2}{g(x)}\right) dx$$

la fonction $\Phi(\lambda) = \int_E f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right) dx$ est une fonction décroissante de λ. Il en résulte que λ est défini de manière unique par l'équation 1.4.

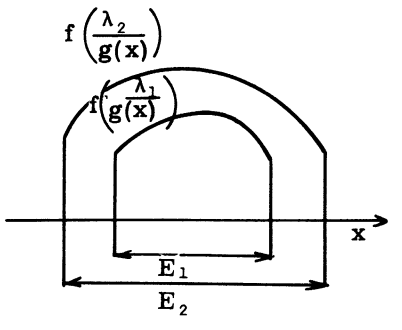

Figure 10

Ceci assure l'unicité de la fonction $\varphi(x)$.

Les propriétés 1.1. à 1.6. permettent la détermination pratique de $\varphi(x)$ par approximations successives (cf. figure 11).

1er pas : On part d'une valeur de λ. On en déduit $\frac{\lambda}{p'(0)}$ et l'ensemble E (en traits forts) - (propriété 1.1.).

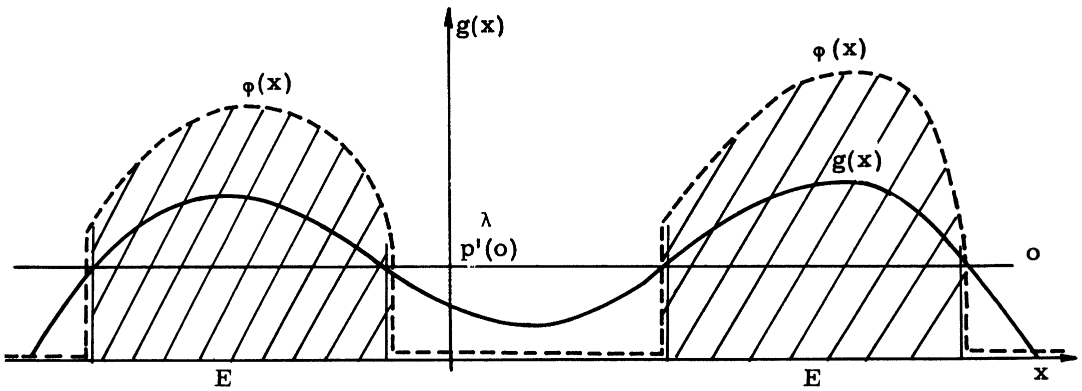

Figure 11

2ème pas : On trace $\varphi(x) = f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right)$ - (en pointillé).

3ème pas : On mesure l'aire hachurée, soit $\Phi(\lambda) = \int_E f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right) dx$. Si $\varphi(x) = \left(\frac{\lambda}{g(x)}\right)$ est bien la fonction cherchée on doit avoir $\Phi(\lambda) = \Phi$.

4ème pas : Si $\Phi(\lambda) > \Phi$ on recommence avec une valeur de λ supérieure à la précédente.

Si $\Phi(\lambda) < \Phi$ on recommence avec une valeur de λ inférieure à la précédente.

La propriété 1.6. garantit que ce processus est convergent.

2/ Cas de plusieurs objectifs en nombre aléatoire.

C'est le cas par excellence de la prospection minière ou pétrolière. Supposons que nous désirions prospecter un territoire important ayant une aire totale S. Une campagne systématique de géologie et de géophysique a permis de diviser S en un grand nombre de surfaces adjacentes $s_o, s_1, \ldots, s_n$, chacune possédant un ensemble homogène de caractères géologiques et géophysiques, qui, du point de vue de la prospection en font un tout cohérent et distinct des surfaces voisines. A titre d'exemple, s_i pourra recouvrir un anticlinal de calcaire dolamitique du jurassique recouvert d'une couche compacte et imperméable.

L'étude de Monsieur Allais déjà citée sur la prospection au Sahara (3) permet de penser qu'il est possible d'affecter à chaque surface s_i une probabilité g_i pour que s_i recouvre un gisement exploitable. Pour y parvenir, il faudrait pouvoir comparer s_i à des aires présentant les mêmes caractères, parmi tous les endroits du monde où l'on a effectué des forages ou exploité des gisements.

Cela étant, supposons que nous disposions, pour effectuer nos recherches, d'un capital limité Φ. Le problème que nous nous posons est d'utiliser au mieux le capital Φ, c'est-à-dire de conduire notre exploration de façon à rendre maximum le nombre probable de gisements que nous découvrirons(1).

Il y a en effet bien des façons de poursuivre l'exploration. Nous pouvons par exemple forer d'emblée en quelques-uns des s_i les plus prometteurs. Au contraire, nous pouvons désirer pousser la recherche d'information par prospection tellurique ou sismique sur toutes les aires intéressantes, afin de ne forer qu'en des points fortements prometteurs, quitte à forer moins de puits.

Nous appellerons φ_i "l'effort de recherche" consenti sur s_i, mesuré dans le cas présent en terme de dépense effectuée sur s_i. On aura alors :

$$\sum_i \varphi_i = \Phi \qquad\qquad \text{avec } \varphi_i \geqslant 0$$

La probabilité de détecter un gisement qui se trouve effectivement en S est fonction de l'effort de recherche φ. Soit $p(\varphi)$ cette probabilité de détection. $p(\varphi)$ est généralement une fonction croissante à dérivée décroissante (loi des rendements décroissants).

La probabilité de détecter un gisement en s_i est (axiome des probabilités composées)

$$P_i = g_i p(\varphi_i)$$

Etant donné la définition que nous avons faite des aires s, on peut considérer en première approximation que les probabilités g_i sont indépendantes (ce n'est peut-être pas tout à fait exact en ce qui concerne les g_i relatifs à des aires voisines, et il faudrait en tenir compte dans une étude poussée). Les "tirages" dans les différentes aires s_i sont donc indépendants, et le nombre probable de gisements découverts s'écrit :

$$N = \sum_1^n g_i p(\varphi_i)$$

Le problème que nous nous sommes posé peut donc s'exprimer de la façon suivante :

Déterminer les dépenses $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ de façon que le nombre probable de gisements découverts

$$N = \sum_1^n g_i p(\varphi_i)$$

----

(1) Une étude plus approfondie devrait également tenir compte du risque dit de "ruine", c'est-à-dire du risque de ne rien trouver (Voir par exemple (1) sur ce sujet). Elle devrait également tenir compte de la valeur probable des gisements découverts (2.3). Cependant le problème se pose effectivement dans de nombreux cas de la façon dont nous l'avons posé; on espère qu'il y a des gisements dans une région, et l'Etat ou une grande compagnie privée décide d'investir un capital donné dans cette région. Le capital une fois dégagé pour cet usage précis, les ingénieurs conduisent l'exploration de manière à maximiser le nombre probable de gisements découverts.

soit maximum, les φ_i étant liés par la relation

$$\sum_i \varphi_i = \Phi$$

et soumis aux conditions

$$\varphi_i \geqslant 0$$

C'est un problème de maximum lié que l'on peut résoudre par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On peut d'ailleurs plus simplement remarquer dans le cas présent qu'une condition nécessaire pour que N soit maximum est que l'on ait

$$dN = \sum_i g_i p'(\varphi_i) d\varphi_i = 0$$

les différentielles $d\varphi_i$ devant satisfaire en outre à la condition

$$\sum_i d\varphi_i = d\Phi = 0$$

Pour que ces deux équations soient vérifiées quels que soient les $d\varphi$, il est nécessaire que leurs coefficients soient proportionnels. D'où les relations

$$g_1 p'(\varphi_1) = g_2 p'(\varphi_2) = \dots = g_n p'(\varphi_n) \tag{1}$$

Le problème revient donc à déterminer les quantités φ_i telles que

$$\begin{cases} g_i p'(\varphi_i) = \text{Cte} = \lambda \\ \sum_i \varphi_i = \Phi \\ \varphi_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Les relations ci-dessus ne sont pas forcément compatibles. K. J. Arrow (4) a montré que la solution du système correspondait alors à une valeur nulle de celles des variables φ_i pour lesquelles les équations (1) ne pouvaient être satisfaites. Pour déterminer les φ_i nous avons donc le système

$$\begin{cases} \lambda = g_i p'(\varphi_i) \quad \text{avec } \varphi_i > 0 & (\alpha) \\ \qquad\text{ou} & \\ \varphi_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda > g_i p'(0) & (\beta) \\ \qquad\text{avec} & \\ \sum_i \varphi_i = \Phi & \end{cases}$$

La fonction $p'(\varphi)$ étant décroissante de $p'(0)$ à zéro lorsque φ varie de zéro à l'infini, elle admet une fonction inverse $\varphi = f(p')$ décroissante de l'infini à zéro dans l'intervalle $(0,\ p'(0))$. Les relations α et β permettent donc d'associer à toute valeur positive de λ un ensemble de valeurs pour les φ_i. S'il arrive que λ soit supérieur à $g_i p'(0)$, en vertu de (β) on prendra $\varphi_i = 0$. Les φ_i tels que $\lambda < g_i p'(0)$ seront déterminés par (α) soit $\varphi_i = f\left(\frac{\lambda}{g_i}\right)$.

A toute valeur positive de λ correspond donc une valeur de la fonction

$$\Phi(\lambda) = \sum_i \varphi_i \qquad \text{(figure 12)}$$

Cette fonction représente l'effort total de recherche associé à λ. La distribution cherchée s'obtiendra pour la valeur λ_o de λ telle que

$$\Phi(\lambda_o) = \Phi$$

La solution du problème est alors fournie par l'inversion de la fonction $\Phi(\lambda)$. Cette solution est unique, car $\Phi(\lambda)$ est monotone. Plus précisément, lorsque λ croît de 0 à $+\infty$, $\Phi(\lambda)$ décroît de $+\infty$ à 0. La valeur 0 est atteinte dès que λ atteint la plus grande des valeurs $g_i p'(0)$.

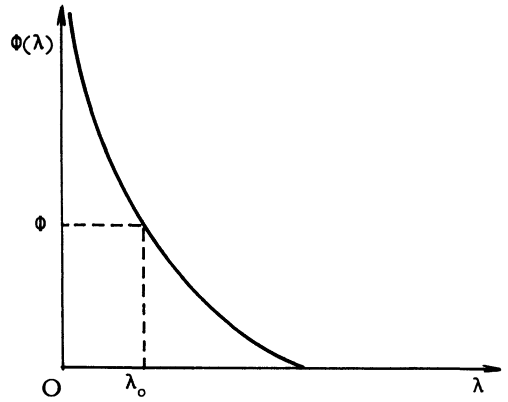

Figure 12

Quelle est la signification pratique de la relation $g_i p'(\varphi_i) = \text{Cte}$? Si l'on remarque que $\frac{1}{p'(\varphi_i)} = \frac{d\varphi_i}{dp}$ est le coût marginal de l'espérance de détection, on voit qu'à l'optimum le coût marginal de l'espérance de détection est proportionnel à la probabilité pour qu'il existe un gisement sur l'aire considérée.

On comparera utilement ce résultat avec celui du § précédent et celui de l'exemple 2.2 donné au chapitre III.

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement Monsieur Jean Stengel, Ingénieur au Groupe de Recherche Opérationnelle Esso Standard, qui a bien voulu revoir le manuscrit de cet article et l'améliorer de ses suggestions pertinentes.

BIBLIOGRAPHIE

1 - ALLAIS - Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque (Imprimerie Nationale)

2 - ALLAIS - Notes miméographiées sur la Recherche Minière (Bibliothèque de l'Ecole des Mines de Paris). En particulier
- La théorie de la ruine des joueurs et la Recherche Minière (13 p). 8 Septembre 1953.
- Caractéristiques économiques de la Recherche minière (13 p). 15 Septembre 1953.
- Notes sur la détermination et l'utilisation des distributions de probabilités relatives au Sahara (27 p). 8 Septembre 1953.
- Schéma général de la Génération des statistiques minières (27 p). 6 Nov. 1953.
- Note sur l'estimation des gisements et l'exécution des prélèvements (4 p) 19 Août 1954.
- Le compromis optimum entre l'information et le coût dans la recherche minière.

3 - ALLAIS - Méthode d'évaluation des perspectives économiques de la recherche minière sur de grands ensembles (Revue de l'Industrie Minérale - Numéro Spécial - Janvier 1956 et Management Science vol.3 n°4 - Juillet 1957).

4 - ARROW - An extension of the basic theorem of classical Welfare Economics (Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilities (1951).

5 - de BEAUREGARD - Les perspectives minières de l'Algérie du Nord et du Sahara Algérien - (Conférence au "Comité Central de la France d'Outre-Mer"). 17 Juin 1953 - Miméographie.

6 - BERNOULLI (Jacques) - Ars Conjectandi.

7 - BLONDEL - La Recherche Minière - Introduction (Annales des Mines - 1 - 1950).

8 - BOREL - La portée philosophique du calcul des probabilités (dernier volume du grand "Traité des probabilités" - Gauthier-Villars).

9 - BOREL - Article "Calcul des probabilités" du Volume "Mathématiques" de "l'Encyclopédie française" (Larousse).

10 - CHANTAL - Utilisation des courbes d'équiprobabilité pour la localisation d'un avion (Annales des Ponts et Chaussées Sept. Oct. 1953).

11 - CHARNES et COOPER - The Theory of Search : Optimum Distribution of Research Effort (Management Science - Oct. 1958).

12 - de FINETTI - La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives (Annales de l'Institut Henri Poincaré - tome VII - Chap. VI).

13 - FORTET - Calcul des probabilités.

14 - FRECHET - Les mathématiques et le concret (Presses Universitaires de France).

15 - FRECHET - Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités (fascicule 3 du tome I du "Traité du Calcul des Probabilités" dirigé par Emile BOREL - Gauthier-Villars); Premier Livre : Généralités sur les Probabilités - Eléments Aléatoires.

16 - KEYNES - A Treatise on Probability (London 1921).

17 - KOOPMAN - The Optimum Distribution of Effort (Journal of the Operations Research Society of America - Feb. 1953).

18 - KOOPMAN - The Theory of Search (Operations Research - June 1956 - Oct. 1956 - Oct. 1957).

19 - LAPLACE - Essai Philosophique sur les probabilités.

20 - MASSE - Le choix des investissements (Dunod).

21 - MORSE - Mathematical Problems in Operations Research (Bulletin of the American Mathematical Society - Vol. 54 n°87).

22 - MORSE et KIMBALL - Methods of Operations Research.

23 - OPERATIONS EVALUATION GROUP - U.S. NAVY - Report n°56 "Search and Screening".

24 - POE - La lettre volée.

25 - SAVAGE - Foundation of Statistics.