REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JACQUES BAYART

Quelques applications du principe des moindres carrés à la prévision commerciale « dynamique »

Revue de statistique appliquée, tome 7, n° 4 (1959), p. 17-40

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1959__7_4_17_0>

QUELQUES APPLICATIONS DU PRINCIPE DES MOINDRES CARRÉS A LA PRÉVISION COMMERCIALE "DYNAMIQUE" (1)

Jacques BAYART
Statisticien Conseil
Professeur de Statistique Appliquée
dans les Écoles d'Ingénieurs du Nord

SOMMAIRE

----

(1) Communication présentée aux Journées d'Etude et de discussion des anciens stagiaires du Centre de Formation. Paris, Juillet 1959.

VI - VARIETE : ETABLISSEMENT DE QUOTAS DE VENTE PAR SECTEURS GEOGRAPHIQUES A PARTIR DES INDICES P ET R DE P.NICOLAS (Marché Français) -

VI-1 - La méthode "NICOLAS" ou des moindres écarts absolus
VI-2 - La méthode des moindres carrés.
VI-3 - Exemple traité par les deux méthodes.

I - INTRODUCTION : LE PRINCIPE DES MOINDRES CARRES APPLIQUES A L'AJUSTEMENT LINEAIRE -

I-1 - Cas général : la variable non-aléatoire prend des valeurs quelconques.

Ce qu'il est convenu d'appeler le "principe des moindres carrés" n'est en fait qu'une "méthode" - parmi d'autres - d'ajustement analytique.

Une variable non-aléatoire x prend des valeurs x_i à chacune desquelles est associée une valeur y_i d'une variable aléatoire y dite dépendante de la première.

La forme la plus simple de dépendance (stochastique) est la dépendance linéaire :

$$y' = a.x + b$$

Ajuster une droite par les moindres carrés aux n couples de valeurs (x_i, y_i), consiste à déterminer les coefficients a et b de telle façon que la somme des carrés des écarts

$$e_i = y_i - y'_i = y_i - a.x_i - b$$

soit minima :

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - a.x_i - b)^2 = \text{minimum}$$

On peut déduire de cette condition les coefficients a et b et, ceci, par diverses méthodes (dérivées partielles à annuler; trinôme du second degré en a puis en b à rendre min.).

Ces calculs sont classiques et on ne les reproduira pas.

Il est commode pour certaines exploitations (dans les études de corrélation) d'utiliser les notations suivantes :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}; \quad \text{cov}(x, y) = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}; \quad s_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}$$

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x . s_y}$$

Droite ajustée :

$$\boxed{y' - \bar{y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2} . (x - \bar{x})}$$

Ecart-type résiduel : $s_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n}} = s_y . \sqrt{1 - r_{xy}^2}$

Remarques. a) Les termes de "covariance" et de "coefficient de corrélation" sont impropres quand l'une des deux variables est "certaine" (non aléatoire); on a seulement retenu la commodité de leur écriture.

b) On laissera de côté les tests de linéarité et de signification des "régressions" exploitées plus loin. Toute la communication est faite comme si elle s'adressait à des directeurs commerciaux n'ayant que des notions des plus sommaires en statistique. Dans cette optique, la critique des ajustements utilisés sera essentiellement "visuelle".

I-2 - Formulaire pour le cas où l'une des variables étant le temps, cette variable prend des valeurs à espacement constant.

Partant de l'équation précédemment rappelée :

$$Y'_x = \bar{Y} + \frac{\operatorname{cov}(Y, x)}{s_x^2}(x - \bar{x}), \tag{1}$$

posons : $x = t$, $(t = 1, 2, \ldots, n)$

$$Y'_t = \bar{Y} + \frac{\operatorname{cov}(Y, t)}{s_t^2}(t - \bar{t}) \tag{2}$$

Or, on sait que $\sum_{t=1}^{t=n} t = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{t=1}^{t=n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On en déduit successivement que :

$$\bar{t} = \frac{\sum t}{n} = \frac{n+1}{2} \tag{3}$$

$$s_t^2 = \frac{\sum (t - \bar{t})^2}{n} = \frac{\sum t^2}{n} - (\bar{t})^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \tag{4}$$

$$\operatorname{cov}(Y, t) = \frac{\sum (t - \bar{t})(Y - \bar{Y})}{n} = \frac{\sum tY}{n} - \bar{t}.\bar{Y} = \frac{\sum tY}{n} - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{\sum Y}{n} \tag{5}$$

En portant (3, 4, 5) dans (2), il vient :

$$\boxed{Y'_u = \frac{\sum Y}{n} + \frac{\sum tY - \frac{n+1}{2}\sum Y}{\frac{n(n^2-1)}{12}} \cdot \left(u - \frac{n+1}{2}\right)} \tag{6}$$

où $u = 1, 2, \ldots, n$ pour les valeurs ajustées, et $u = n+1, n+2, \ldots$ pour les valeurs extrapolées. (Toutes les sommations ci-dessus sont à effectuer de $t=1$ à $t=n$).

Notations simplifiées - Si l'on adopte les notations suivantes :

$$A = \frac{n+1}{2}, \qquad B = \frac{(n-1)n(n+1)}{12}$$

$$S = \sum Y, \qquad P = \sum tY$$

$$a = \frac{P - A.S.}{B}, \qquad b = \frac{S}{n} - A.a$$

la droite ajustée a pour équation :

$$Y'_u = a.u + b \qquad (6\ bis)$$

II - LE PROBLEME DE LA PREVISION COMMERCIALE BASEE SUR L'ETUDE DU PASSE -

Le problème de la prévision commerciale peut - et doit - être abordé de deux façons qui se complètent :

- de l'intérieur de l'entreprise, c'est-à-dire à partir des données disponibles dans l'entreprise, lesquelles sont fournies par l'étude des ventes passées;
- de l'extérieur de l'entreprise , c'est-à-dire par l'étude de la conjoncture et, éventuellement par des enquêtes de marché.

Dans la présente étude, on se bornera au point de vue purement "intérieur" et on s'attachera à montrer quels services le principe des "moindres carrés" peut apporter à cette question.

II-1 - La méthode classique : tendance linéaire et indices saisonniers.

Il existe de nombreux procédés d'étude des séries chronologiques (1) dont les économistes font un grand usage; il serait souhaitable que les services commerciaux des entreprises en connaissent les éléments les plus usuels.

Une méthode simple - pas toujours applicable - (en ce domaine il n'existe guère de panacée!) consiste à ajuster une droite aux moyennes annuelles par les "moindres carrés" et - si cela a un sens - à déterminer les valeurs relatives de chaque mois, en d'autres termes à calculer les indices mensuels.

Pour reconnaître si l'hypothèse de linéarité de la tendance est acceptable, le mieux est de construire un diagramme chronologique mois par mois, en indiquant les moyennes annuelles.

Ce graphique permet également de voir s'il existe des valeurs saisonnières suffisamment régulières pour être traduites en indices mensuels.

Dans l'étude prise ci-après comme exemple l'unité est le quintal d'un certain produit, et l'on disposait des ventes mensuelles depuis 5 ans.

a) Détermination de la tendance. Le tableau donne dans la marge de droite des moyennes annuelles que nous reproduisons ci-après. Le calcul est conduit avec les notations simplifiées indiquées au paragraphe I-3.

Année	Rang t	Moyenne observée Y	Moyenne ajustée Y'
1954	1	499,5	490
1955	2	593,9	588,9
1956	3	659,4	687,9
1957	4	790,8	786,8
1958	5	895,8	885,8

$n = 5 \qquad A = 3 \qquad B = 10$

$S = 3439,4 \qquad P = 11.307,7$

----

(1) L'étude la plus complète en la matière peut être trouvée dans : "Analyse Statistique" par E. Morice et F. Chartier - I.N.S.E.E.

Objet de l'étude :
demandée par :
Date :

ANALYSE CHRONOLOGIQUE

Mois / Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total	Moyenne annuelle	Valeur Ajustée
1954	147	372	899	920	607	662	397	548	594	280	308	260	5994	499.5	490
1955	303	897	923	797	830	601	740	640	345	353	322	376	7127	593.9	588.9
1956	510	721	1048	1000	777	586	666	645	603	355	413	589	7913	659.4	687.9
1957	682	1200	878	1150	807	811	860	746	687	538	583	548	9490	790.8	786.8
1958	634	872	1055	1253	1013	1012	880	807	1010	580	681	953	10750	895.8	885.8
Pronostics 1959	689	1221	1428	1497	1162	1054	1004	945	896	571	620	729	11816	984.7	984.7
Total	2276	4062	4803	5120	4034	3672	3543	3386	3239	2106	2307	2726	41274	3439.4	
Moyenne Mensuelle	455.2	812.4	960.6	1024	806.8	734.4	708.6	677.2	647.8	421.2	461.4	545.2	8254.8	687.9	
Effet de tendance	642.5	650.8	659	667.3	675.5	683.8	692	700.3	708.5	716.8	725	733.3			
Indices bruts	70.8	124.8	145.8	153.5	119.4	107.4	102.4	96.7	91.4	58.8	63.6	74.3	1208.9		
Indices nets	70	124	145	152	118	107	102	96	91	58	63	74	1200		

$a = 98{,}95$ $\quad$ $b = 391{,}05$ $\quad$ $y' = 99\,t + 391$

b) Pronostic global pour 1959. Il suffit de faire dans la formule précédente $t = 6$, ce qui donne :

$$Y_6' = (98{,}95 . 6) + 391{,}05 = 984{,}7$$

ce qui est la moyenne annuelle de 1959. Le pronostic global pour 1959 est donc:

$$984{,}7 . 12 = 11.816 \text{ quintaux}$$

c) Calcul des indices saisonniers. Le diagramme chronologique des 60 ventes mensuelles révèle un mouvement saisonnier certain encore que pas excessivement régulier (aucune valeur mensuelle n'a été corrigée, bien qu'on ait eu de bonnes raisons de corriger certaines valeurs!). Ayant jugé la recherche d'indices mensuels digne cependant d'intérêt, on a procédé par la méthode des rapports des moyennes mensuelles au niveau moyen de la tendance pour chacun des douze mois.

On calcule d'abord les douze moyennes mensuelles (455,2, etc. - voir tableau).

Pour déterminer le niveau moyen de la tendance pour chacun des douze mois, on procéde comme suit :

- Prendre pour origine le milieu de l'année centrale (1er Juillet 1956 d'où l'équation de la tendance :

$$Y' = 99\,t + 687{,}9$$

- Transformer le coefficient d'accroissement annuel (99) en coefficient d'accroissement mensuel

$$99 : 12 = 8{,}25$$

  d'où la nouvelle équation :

$$y' = 8{,}25\,t + 687{,}9$$

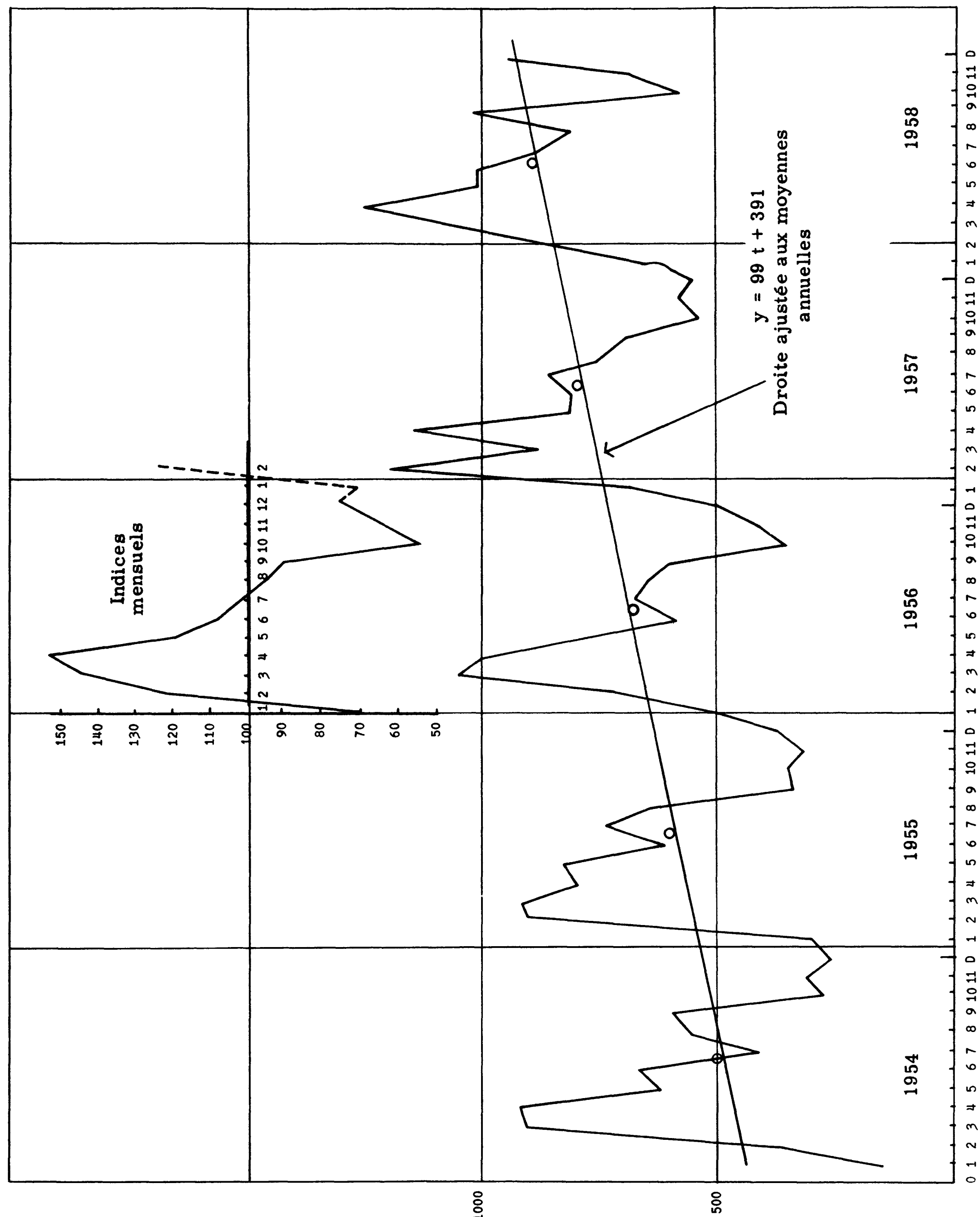
- Toute moyenne devant être placée au milieu de la période ayant servi à la calculer, il faut donner à t la valeur -5,5 pour obtenir le niveau moyen de la tendance en Janvier, -4,5 pour le mois de Février, etc. jusqu'à t = +5,5 pour le mois de Décembre.
  Exemple : Janvier : $-5{,}5 . 8{,}25 + 687{,}9 = 642{,}5$ etc.

D'où les douze nombres appelés (improprement) sur le tableau "effet de tendance".

Enfin les rapports : moyenne mensuelle/effet de tendance, donnent les indices mensuels cherchés (quelques arrondis sont souvent nécessaires pour obtenir un total égal à 1.200). Voir diagramme des indices sur la planche jointe.

d) Pronostics mensuels pour 1959. Pour les obtenir, on multiplie par chacun des douze indices, la moyenne prévue pour 1959, moyenne qui représente la base 100 : Janvier : $984{,}7 . 70\% = 689$, etc.

Les 12 pronostics mensuels ont été reportés sur le tableau de calcul.


Indices mensuels
y = 99 t + 391
Droite ajustée aux moyennes annuelles
1954
1955
1956
1957
1958
1000
500
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50

Il est à prévoir des écarts parfois importants pour certains mois ainsi que le révèle le diagramme chronologique qui a servi de base d'étude (déplacement d'un mois à l'un de ses voisins).

II-2 - Cas où la méthode précédente - ainsi que les autres méthodes usuelles - ne peuvent s'appliquer.

Il existe de nombreux cas où la méthode précédente ne peut s'appliquer.

En effet, elle suppose d'abord la quasi-linéarité des moyennes annuelles. Elle peut à la rigueur s'appliquer dans le cas où le graphique de ces moyennes présente une faible courbure.

Dans le cas d'une courbure non négligeable, cette méthode est à proscrire. Lorsque la concavité est toujours tournée dans le même sens, on peut essayer un ajustement logarithmo-linéaire, c'est-à-dire répondant à une équation de la forme :

$$\log Y = a.t + b$$

où a est lié au pourcentage moyen d'accroissement annuel(1). Cet ajustement est souvent satisfaisant dans la prévision commerciale, et se traite encore par les "moindres carrés".

Si maintenant l'évolution des moyennes annuelles est d'abord ascendante puis descendante (ou vice-versa), les ajustements ci-dessus ne conviennent pas : il faut ajuster suivant le cas deux droites ou deux courbes.

On peut aussi tracer à vue la courbe des moyennes mobiles (par 12 mois, s'il y a des variations saisonnières), ce qui donne une bonne idée de la tendance générale et a l'avantage d'indiquer les changements de sens de l'évolution profonde. C'est de cette base que nous sommes partis pour la mise au point de la méthode développée au paragraphe suivant.

D'un autre point de vue, on peut encore se heurter à d'autres difficultés qui font rejeter - ou rendent impossible - l'application de la méthode classique.

- On dispose de moins de deux années en arrière en ce qui concerne l'article étudié : données non conservées dans l'entreprise ou très difficiles à retrouver; article lancé récemment sur le marché et n'ayant pas suffisamment d'antériorité.

D'ailleurs même trois années entières en arrière ne constituent qu'une base insuffisante pour ajuster une droite aux moyennes annuelles (3 points seulement).

- On dispose d'un nombre suffisant d'années en arrière, mais l'étude et les graphiques préalables montrent que la tendance ne reste pas suffisamment linéaire à travers les années, soit que les moyennes annuelles réelles soient trop "dispersées" autour de la droite ajustée; soit que ces moyennes décrivent une courbe dont le sens et (ou) l'intensité de la courbure sont trop variables.

Dans chacun de ces cas, le service commercial "sent intuitivement" qu'il a intérêt à chercher à exploiter au mieux le "passé le plus récent".

C'est dans cette optique que la méthode suivante a été élaborée.

---

(1) On a : $a = \log \frac{Y_{t+1}}{Y_t}$

III - METHODE PROPOSEE POUR EXPLOITER AU MIEUX LE PASSE LE PLUS RECENT -

III-1 - Principe : Ajuster une droite aux cumuls mobiles.

a) Données. On appellera période élémentaire l'unité de temps utilisée (semaine, mois, trimestre); chaque période élémentaire donne lieu à l'enregistrement d'une valeur élémentaire : ventes ou nombre de commandes, etc.

S'il existe des variations saisonnières, on prendra pour cycle une suite de périodes élémentaires couvrant un ensemble complet de ces variations. En l'absence de variations saisonnières reconnues, on peut prendre pour cycle un ensemble quelconque de périodes élémentaires, de préférence l'année.

c désignant le nombre de périodes élémentaires constituant un cycle, on supposera dans tout ce qui suit que l'on connaît les valeurs élémentaires d'un cycle complet (appelé : premier cycle) et, en outre, un certain nombre de valeurs élémentaires du cycle suivant (appelé : deuxième cycle).

Exemple - On connaît les 12 ventes mensuelles de l'année passée ($c = 12$) et les ventes mensuelles des 3 premiers mois de l'année en cours.

b) Objectif. On se propose d'élaborer diverses prévisions relatives soit aux périodes élémentaires encore inconnues du 2ème cycle, soit au total des c valeurs élémentaires du 2ème cycle (prévision globale).

c) Principe de la méthode et hypothèse de base. La seule méthode analytique utilisable avec ces données est d'ajuster une courbe aux moyennes mobiles obtenues par groupe de c valeurs élémentaires successives. Pratiquement, pour la mise au point des formules, on a utilisé les cumuls mobiles au lieu des moyennes mobiles.

Par raison de simplicité, on ajuste une droite à ces cumuls, ce qui revient à faire l'hypothèse de quasi-linéarité des cumuls mobiles.

Encore que cette hypothèse soit souvent justifiée, au cas où elle ne le serait pas l'utilisation "dynamique" de la méthode permettrait des corrections successives en fin de chaque période élémentaire.

d) Prévision dynamique. Du fait qu'on ne connaît du phénomène étudié qu'un passé relativement bref, il est évident qu'on a intérêt à suivre son évolution de très près. On verra plus loin que les formules proposées permettent très simplement d'insérer, en fin de chaque période élémentaire, la nouvelle valeur connue, en vue d'améliorer la prévision. En fin de chaque période on utilise ainsi au maximum l'information disponible.

e) Simplicité du calcul. Grâce à des tableaux de coefficients fournis avec les formules, il suffit de quelques multiplications faites facilement avec une quelconque machine à calculer de bureau, pour obtenir la nouvelle prévision. Aucun calcul d'ajustement, aucun calcul de cumul ou de moyenne n'est nécessaire.

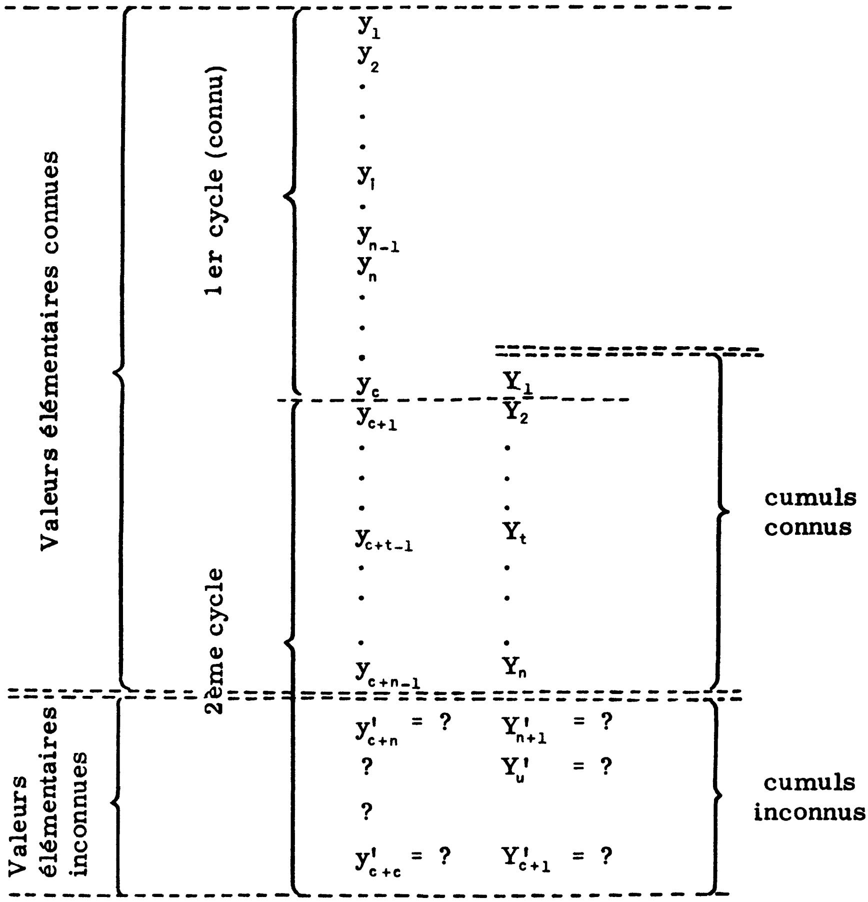
III-2 - Notations et Formule générale du cumul prévisionnel.

a) Notations.

- c = nombre de périodes élémentaires dans un cycle;
- n = nombre de cumuls mobiles connus (de c périodes élémentaires);
- $n-1$ = nombre de périodes élémentaires connues du 2ème cycle;
- $c+n-1$ = nombre total de périodes élémentaires connues ;
- i = rang d'une période élémentaire connue;

y_i = valeur attachée à une période élémentaire;
Y_t = valeur attachée à un cumul mobile connu.

$$Y_t = \sum_{i=t}^{i=c+t-1} y_i$$



b) <u>Etablissement de la formule générale du cumul prévisionnel.</u> On se propose d'exploiter la formule (6) du paragraphe I-3, dans le sens de la prévision (extrapolation).

Au préalable, et en vue de faciliter les applications futures, on va transformer cette formule en y faisant apparaître les valeurs attachées aux périodes élémentaires.

On constatera qu'en pratique aucun calcul de cumul n'est nécessaire, et que les écarts $(y_{c+i} - y_i)$ entre les valeurs attachées aux périodes élémentaires connues <u>de même rang</u> des deux cycles, jouent un rôle déterminant dans la prévision.

Rappelons la formule évoquée ci-dessus :

$$Y'_u = \frac{\sum Y}{n} + \frac{\sum tY - \frac{n+1}{2} \sum Y}{\frac{n(n^2-1)}{12}} \cdot \left(u - \frac{n+1}{2}\right) \qquad (1)$$

Séparons les termes du 2^d membre en deux groupes suivant qu'ils sont - ou non - facteurs de u.

$$Y'_u = \sum_{t=1}^{n} \frac{2(2n+1-3t)}{n(n-1)} Y_t + u . \sum_{t=1}^{n} \frac{6(2t-n-1)}{n(n^2-1)} Y_t \tag{2}$$

où

$$Y_t = \sum_{i=t}^{c+t-1} y_i \tag{3}$$

Posons :

$$a(t) = \frac{2(2n+1-3t)}{n(n-1)} \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{6(2t-n-1)}{n(n^2-1)} \qquad (4)\ (5)$$

$$Y'_u = \sum_{t=1}^{n} a(t) . \sum_{i=t}^{c+t-1} y_i + u . \sum_{t=1}^{n} b(t) . \sum_{i=t}^{c+t-1} y_i \tag{6}$$

Intervertissons l'ordre des sommations, en tenant compte des décalages progressifs des cumuls $\sum y_i$ (cf. tableau des notations) :

$$Y'_u = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} y_i . \sum_{t=1}^{i} a(t) + \sum_{i=n}^{c} y_i . \sum_{t=1}^{n} a(t) + \sum_{i=c+1}^{c+n-1} y_i . \sum_{t=i+c-1}^{n} a(t) \\ & + u. \left[\sum_{i=1}^{n-1} y_i . \sum_{t=1}^{i} b(t) + \sum_{i=n}^{c} y_i . \sum_{t=1}^{n} b(t) + \sum_{i=c+1}^{c+n-1} y_i . \sum_{t=i+c-1}^{n} b(t) \right] \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Calculons les trois sommes portant sur a(t) : On a d'abord :

$$A(i) = \sum_{t=1}^{i} a(t) = \frac{2(2n+1)i}{n(n-1)} - \frac{3i(i+1)}{n(n-1)} = \frac{i(4n-1-3i)}{n(n-1)} \tag{8}$$

Puis :

$$\sum_{t=1}^{n} a(t) = A(n) = 1, \quad [\text{en faisant } i = n \text{ dans } (8)] ; \tag{9}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \sum_{t=i+c-1}^{n} a(t) &= \sum_{t=1}^{n} a(t) - \sum_{t=1}^{i-c} a(t) = A(n) - A(i-c) \\ &= 1 - \frac{(i-c)\,[4n-1-3(i-c)]}{n(n-1)} \end{aligned} \tag{10}$$

Calculons de même les trois sommes de (7) portant sur b(t) :

$$B(i) = \sum_{t=1}^{i} b(t) = \frac{6i(i+1) - 6(n+1)i}{n(n^2-1)} = \frac{6i(i-n)}{n(n^2-1)} \tag{11}$$

$$\sum_{t=1}^{n} b(t) = B(n) = 0, \quad [\text{en faisant } i = n \text{ dans } (11)]; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=i+c-1}^{n} b(t) &= \sum_{t=1}^{n} b(t) - \sum_{t=1}^{i-c} b(t) = B(n) - B(i-c) \\ &= 0 - \frac{6(i-c)\,[(i-c)-n]}{n(n^2-1)} \end{aligned} \tag{13}$$

Reportons les résultats (8) à (13) dans la formule (7) du cumul prévisionnel Y'_u :

$$
Y'_u = \left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(4n - 1 - 3i)}{n(n - 1)}\, y_i + \sum_{i=n}^{c} y_i + \sum_{i=c+1}^{c+n-1} \left[1 - \frac{(i-c)\,[4n - 1 - 3(i-c)]}{n(n-1)}\right] y_i \\
\displaystyle + u \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{6i(i - n)}{n(n - 1)}\, y_i + 0 - \sum_{i=c+1}^{c+n-1} \frac{6(i - c)\,[(i - c) - n]}{n(n^2 - 1)}\, y_i\right]
\end{array}
\right. \qquad (14)
$$

Groupons les deux sommes simples :

$$
\sum_{i=n}^{c} y_i + \sum_{i=c+1}^{c+n-1} y_i = \sum_{i=n}^{c+n-1} y = Y_n, \qquad (15)
$$

et faisons dans les deux sommes (qui restent) du type $\sum_{i=c+1}^{c+n-1}$ le changement d'indice de sommation :

$$
i = c + j
$$

(en remettant i à la place de j après transformation), il vient pour (14) :

$$
Y'_u = Y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(4n - 1 - 3i)}{n(n - 1)} (y_i - y_{i+c}) + u. \sum_{i=1}^{n-1} \frac{6i(i - n)}{n(n^2 - 1)} (y_i - y_{i+c}) \qquad (16)
$$

ou encore :

$$
\boxed{Y'_u = Y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{i(3i + 1 - 4n)}{n(n - 1)} + u \cdot \frac{6i(n - i)}{n(n^2 - 1)}\right] (y_{i+c} - y_i)} \qquad (17)
$$

Rappelons que Y_n est le dernier cumul connu, et que, suivant la prévision élaborée, on fera $u = n + 1,\ n + 2,\ \ldots,\ c + 1$.

IV - PREMIERE APPLICATION : PREVISION DE LA 1ère VALEUR ELEMENTAIRE INCONNUE -

IV-1 - Etablissement de la formule y'_{c+n} .

Si l'on se reporte au tableau des notations (III-2), on voit que si $\underline{n}$ désigne le nombre de cumuls mobiles connus, Y_n est le dernier cumul connu et y_{c+n-1} la dernière valeur élémentaire connue.

Par ailleurs, Y'_{n+1} désigne le premier cumul inconnu, et y'_{c+n} la première valeur élémentaire inconnue; c'est cette dernière quantité que l'on se propose de prévoir par la méthode exposée (III-1).

Nous partons de la formule générale du cumul prévisionnel donnée au paragraphe précédent (III-2; formule 17) et on y fait :

$$
u = n + 1 \qquad (1)
$$

ce qui donnera Y'_{n+1} , c'est-à-dire le premier cumul inconnu.

Si l'on simplifie au préalable la quantité entre crochets, celle-ci devient :

$$
\frac{i(3i + 1 - 4n)}{n(n - 1)} + (n + 1) \cdot \frac{6i(n - i)}{n(n^2 - 1)} = \frac{i(2n + 1 - 3i)}{n(n - 1)} \qquad (2)
$$

En portant (1) et (2) ci-dessus dans la formule Y'_u , on obtient :

$$Y'_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(2n + 1 - 3i)}{n(n - 1)} \cdot (y_{i+c} - y_i) \qquad (3)$$

En observant que :

$$Y'_{n+1} - Y_n = y'_{c+n} - y_n , \qquad (4)$$

la formule (3) peut encore s'écrire :

$$\boxed{y'_{c+n} = y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(2n + 1 - 3i)}{n(n - 1)} \cdot (y_{i+c} - y_i)} \qquad (5)$$

Conclusion - L'écart à prévoir entre la $n^{\text{ième}}$ valeur élémentaire du second cycle et la $n^{\text{ième}}$ valeur élémentaire du premier cycle, est une fonction linéaire des écarts entre les (n - 1) valeurs élémentaires homologues connues des deux cycles.

En posant :

$$\boxed{\alpha_i = \frac{i(2n + 1 - 3i)}{n(n - 1)}} \qquad (6)$$

on écrira finalement :

$$\boxed{y'_{c+n} = y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (y_{i+c} - y_i)} \qquad (7)$$

IV-2 - Table des coefficients α_i.

$$\alpha_i = \frac{i(2n + 1 - 3i)}{n(n - 1)}$$

n = nombre de cumuls connus, ou, ce qui est équivalent :
n-1 = nombre de périodes élémentaires connues du $2^{\text{ème}}$ cycle;
i = indice à faire varier de 1 à n - 1.

Remarque - Les α_i étant généralement fractionnaires, on a allégé le tableau ci-dessous en indiquant, en bas de colonne, le plus petit dénominateur commun, à reporter sous les divers nombres de la colonne correspondante.

i = \ n-1 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	1	4	5	2	7	8	3	10	11
2		1	1	5	7	3	11	13	5	17	19
3			0	3	6	3	12	15	6	21	24
4				-2	2	2	10	14	6	22	26
5					-5	0	5	10	5	20	25
6						-3	- 3	3	3	15	21
7							-14	- 7	0	7	14
8								-20	-4	- 4	4
9									-9	-18	- 9
10										-35	-25
11											-44
Diviseur	1	3	2	10	15	7	28	36	15	55	66

N. B. - Ce tableau peut être prolongé à volonté vers la droite.

Exemple - On connaît un cycle complet de c valeurs élémentaires (c étant d'ailleurs quelconque), et les 4 premières valeurs élémentaires du second cycle :

Prévision pour la 5ème valeur élémentaire du 2ème cycle ?

Réponse :

$$y'_{c+5} = y_5 + 0,4(y_{c+1} - y_1) + 0,5(y_{c+2} - y_2) + 0,3(y_{c+3} - y_3) - 0,2(y_{c+4} - y_4)$$

V - DEUXIEME APPLICATION : PREVISION GLOBALE POUR LE 2ème CYCLE.

V-1 - Etablissement de la formule y'_{c+1} .

Proposons-nous de faire maintenant un pronostic sur la valeur globale correspondant au 2ème cycle, c'est-à-dire sur :

$$Y'_{c+1} = \sum_{i=c+1}^{2c} y_i \tag{1}$$

Partons encore de la formule 17 du paragraphe III-2,

$$Y'_u = Y_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{i(3i + 1 - 4n)}{n(n - 1)} + u \, . \, \frac{6i(n - i)}{n(n^2 - 1)} \right] (y_{i+c} - y_i). \tag{2}$$

Comme il semble intéressant de comparer le cumul prévisionnel du 2ème cycle au cumul réalisé au 1er cycle, faisons apparaître ce dernier Y_1 au lieu de Y_n .

$$Y_n = Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+c} - y_i) \tag{3}$$

Le report de (3) dans la formule (2), ainsi que la substitution :

$$u = c + 1 \tag{4}$$

donnent :

$$Y'_{c+1} = Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[1 + \frac{i(3i + 1 - 4n)}{n(n - 1)} + (c + 1) \, . \, \frac{6i(n - i)}{n(n^2 - 1)} \right] (y_{i+c} - y_i) \tag{5}$$

ou, après simplification de l'intérieur du "crochet" :

$$\boxed{Y'_{c+1} = Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n(n^2 - 1) - (4n^2 - 6nc - 3n - 1)i - 3(2c - n + 1)i^2}{n(n^2 - 1)} (y_{i+c} - y_i)} \tag{6}$$

Conclusion - L'écart à prévoir entre la valeur globale du 2ème cycle et celle du 1er cycle est une fonction linéaire des écarts entre les (n - 1) valeurs élémentaires homologues connues des deux cycles.

En posant :

$$\boxed{\beta_i = \frac{n(n^2 - 1) - (4n^2 - 6nc - 3n - 1)i - 3(2c - n + 1)i^2}{n(n^2 - 1)}} \tag{7}$$

on écrira finalement :

$$\boxed{Y'_{c+1} = Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (y_{i+c} - y_i)} \tag{8}$$

V-2 - Tables des coefficients β_i.

$$\beta_i = \frac{n(n^2 - 1) - (4n^2 - 6nc - 3n - 1)i - 3(2c - n + 1)i^2}{n(n^2 - 1)}$$

c = 4

i \ n - 1	1	2	3
1	4	13	3
2		11	3
3			2
Div.	1	6	2

c = 6

i \ n - 1	1	2	3	4	5
1	6	19	21	8	20
2		17	23	9	22
3			16	8	21
4				5	17
5					10
Div.	1	6	10	5	15

c = 10

i \ n - 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	31	33	12	40	45	119	116	18
2		29	39	15	50	55	141	133	20
3			28	14	51	58	150	141	21
4				9	43	54	146	140	21
5					26	43	129	130	20
6						25	99	111	18
7							56	83	15
8								46	11
9									6
Div.	1	6	10	5	21	28	84	90	15

c = 12

i \ n - 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	37	39	14	230	51	133	64	72	133	77
2		35	47	18	298	65	165	77	84	153	85
3			34	17	309	70	180	84	91	164	90
4				11	263	66	178	85	93	168	92
5					160	53	159	80	90	165	91
6						31	123	69	82	155	87
7							70	52	69	138	80
8								29	51	114	70
9									28	83	57
10										45	41
11											22
Div.	1	6	10	5	105	28	84	45	55	110	66

Table des coefficients β_i (suite)

c = 13

i \ n - 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	13	20	42	30	35	27	140	268	225			
2		19	51	39	46	35	177	329	268			
3			37	37	48	38	195	363	294			
4				24	41	36	194	370	303			
5					25	29	174	350	295			
6						17	135	303	270			
7							77	229	228			
8								128	169			
9									93			
10												
11												
12												
Div.	1	3	10	10	15	14	84	180	165			

c = 15

i \ n - 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	15	23	48	34	55	15	154	292	243					
2		22	59	45	74	20	201	371	300					
3			43	43	78	22	225	417	336					
4				28	67	21	226	430	311					
5					41	17	204	410	345					
6						10	159	357	278					
7							91	271	270					
8								152	201					
9									111					
10														
11														
12														
13														
14														
Div.	1	3	10	10	21	7	84	180	165					

N.B. - Les colonnes n - 1 = 10, 11, etc. des tables c = 13 et c = 15, n'ont pas été calculées; elles peuvent l'être facilement par la formule rappelée à la page 92.

V-3 - a) Premier exemple d'application de la méthode. La firme ESCO est une manufacture de lingerie pour dames et enfants (Aisne). L'année comprend pour elle deux saisons commerciales correspondant à deux catalogues et à deux tournées de ses représentants.

Dès le début de la tournée des représentants auprès des détaillants, la firme enregistre, semaine par semaine, les nombres de pièces commandées par ceux-ci pour chacun des articles du catalogue.

Pratiquement l'expérience montre que les ordres reçus au cours des 15 premières semaines de la tournée représentent la quasi-totalité de la "saison".

En vue d'organiser la fabrication, le service commercial fait deux pronostics successifs sur le volume total des commandes par article :

a) Le "P. F. 4", c'est-à-dire le plan de fabrication tel qu'il réponde aux prévisions établies à la fin de la 4ème semaine de prospection.

b) Le "P. F. 8", qui correspond aux nouveaux pronostics qu'on peut établir à la fin de la 8ème semaine de prospection; ce dernier plan est le correctif du précédent, dont l'exécution étalée dans le temps, n'est alors qu'en faible partie réalisée.

Voici la présentation des calculs pour un article du catalogue :

Semaine	Tournée précéd.	Tournée actuelle	Ecarts	PLAN P.F.4		PLAN P.F.8	
				Coeff.	Produits	Coeff.	Produits
1	2690	2200	- 490	3,4	-1666	1,62	- 794
2	2514	2412	- 102	4,5	- 459	2,06	- 210
3	2445	2622	+ 177	4,3	+ 761	2,32	+ 411
4	3645	3408	- 237	2,8	- 634	2,39	- 566
5	2870	3359	+ 489			2,28	+1115
6	4440	2762	-1678			1,98	-3322
7	3597	3346	- 251			1,51	- 379
8	2634	2651	+ 17			0,84	+ 14
Total des 15 semain.	36225	?		CORRECTIF C.4	-1998	CORRECTIF C.8	-3731
				PRONOSTIC P.F.4	34227	PRONOSTIC P.F.8	32494

Les coefficients des écarts entre semaines homologues sont pris ici dans le tableau correspondant à un cycle comprenant :

$$c = 15 \text{ périodes élémentaires}$$

On signale - pour satisfaire la légitime curiosité du lecteur - que la réalisation totale réelle pour l'article en question s'est élevée à :

REALISATION EFFECTIVE : 34. 274 pièces

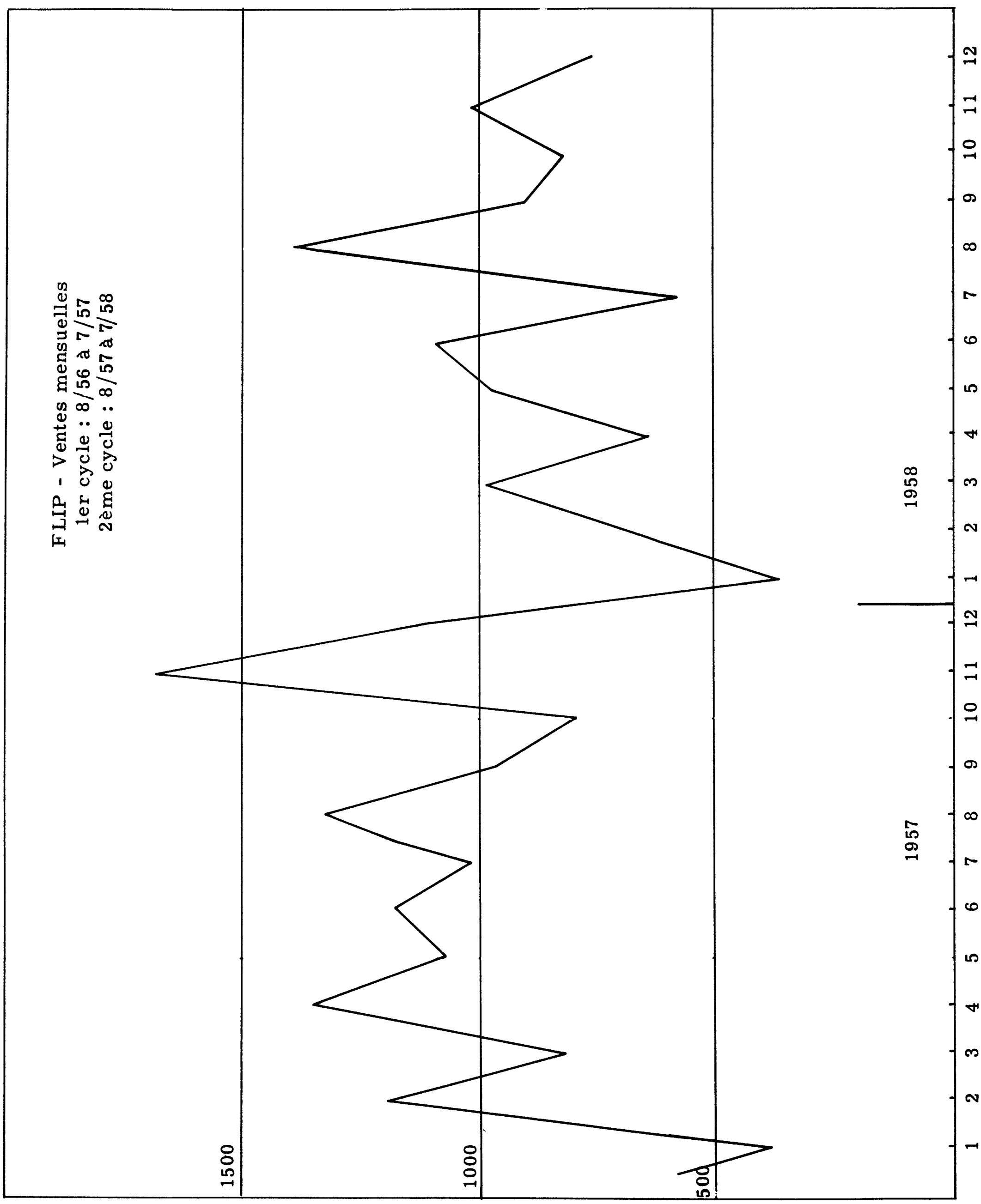
et qu'il a été remarqué que pour la plupart des articles et pour diverses saisons, le pronostic P. F. 4 est généralement plus proche de la réalité que le pronostic P. F. 8 (re-commandes entre les 8ème et 15ème semaine).

V-3 - b) Deuxième exemple d'application de la méthode. La firme "FLIP" est une entreprise de moyenne importance, de la région lilloise, qui fabrique un article de menuiserie servant à la finition des logements.

L'étude de ses ventes sur plusieurs années montre que la méthode classique d'ajustement n'est guère valable et par ailleurs qu'aucun système d'indices mensuels n'est satisfaisant.

L'examen de la linéarité des cumuls mobiles par 12 mois s'est par contre révélé intéressant à condition, de procéder par cycles de 12 mois commençant au 8ème mois de l'année civile, c'est-à-dire en Août.

Pour permettre au lecteur de suivre aisément la méthode et de pouvoir en même temps la juger, nous avons pris un exemple du passé donc tel que les


FLIP - Ventes mensuelles
1er cycle : 8/56 à 7/57
2ème cycle : 8/57 à 7/58
1500
1000
500
1957
1958
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

réalisations étant connues, on puisse comparer celles-ci aux prévisions élaborées.

1er cycle : mois 8/56 à mois 7/57
2ème cycle : mois 8/57 à mois 7/58 $\quad c = 12$

A l'intérieur de chaque cycle, les mois sont numérotés de 1 à 12.

Mois	1er cycle	2ème cycle	Ecarts	Prév. Glob. 2ème cycle
1	384	365	- 19	12.701
2	1193	671	-522	9.767
3	807	989	+182	11.020
4	1353	641	-712	10.489
5	1074	972	-102	10.003
6	1180	1093	- 87	10.170
7	1014	577	-437	10.070
8	1332	1384	+ 56	10.220
9	973	899	- 74	10.374
10	802	819	+ 17	10.549
11	1694	1015	-679	10.485
12	1123	758	-365	
Total réel	12.929	$\boxed{10.183}$		

Les écarts sont les différences entre chaque mois connu du 2ème cycle et son homologue du 1er cycle.

On a calculé les prévisions globales successives par la formule (8) du paragraphe (V-2) en ne connaissant d'abord que le mois 1 du 2ème cycle, puis en connaissant les mois 1 et 2 du 2ème cycle, etc., et en se servant des coefficients donnés par la table c = 12 d'abord dans la colonne (n - 1) = 1 puis (n - 1) = 2, etc.

On peut constater qu'à partir du 4ème mois, l'erreur est inférieure à 4% et que mis à part le premier pronostic (ce dont personne ne se formalisera!), l'erreur ne dépasse nulle part 8%.

La première planche (page 95) donne le diagramme chronologique des 24 valeurs mensuelles : on y reconnaîtra l'absence de régularité des mois homologues.

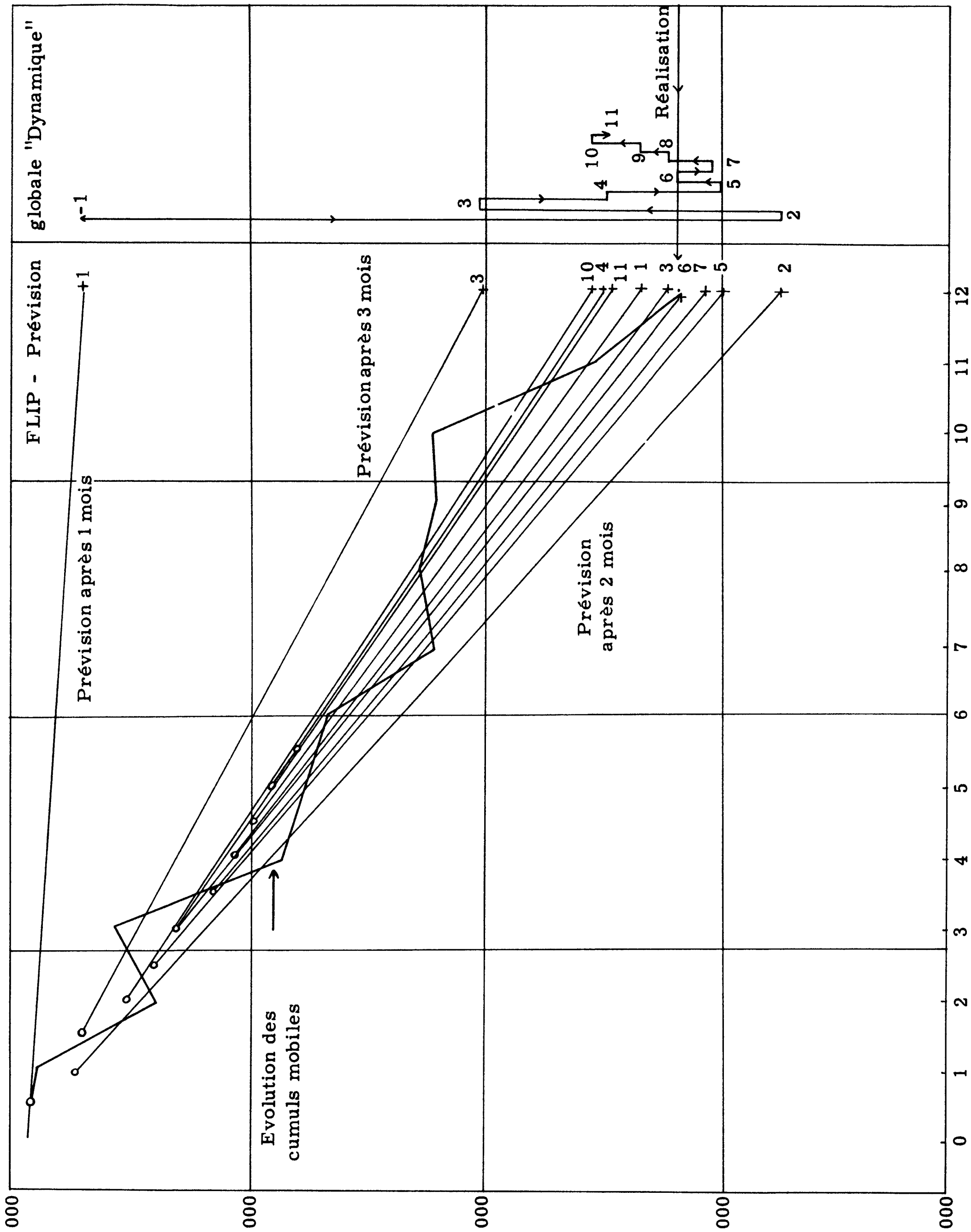
La deuxième planche (page 97) fournit l'interprétation géométrique de la méthode utilisée. Elle donne aussi (à droite) l'évolution dynamique de la prévision.

VI - EN MARGE DES QUESTIONS DE CORRELATION ET DE REGRESSION... AJUSTEMENT DE CHIFFRES DE VENTE AUX INDICES P ET R DE PAUL NICOLAS. QUOTAS DE VENTE PAR SECTEURS -

Introduction : Enoncé du problème et données numériques - Une firme commerciale écoule un certain type d'articles dans n secteurs numérotés 1, 2, ... (i), ... n.

En fin d'année, elle examine les pourcentages de la vente totale réalisée dans chacun des n secteurs. En vue de faire des comparaisons valables entre ces pourcentages, il est évident qu'il faut tenir compte de la population de ces divers secteurs et également d'un facteur richesse (représentant l'argent que les gens consacrent à l'achat d'articles non strictement indispensables). Paul Nicolas a appelé ce second facteur la "richesse vive".

L'annuaire "Le marché Français" édité par la Revue "VENDRE", donne


FLIP - Prévision globale "Dynamique"
Prévision après 1 mois
Prévision après 2 mois
Prévision après 3 mois
Evolution des cumuls mobiles
Réalisation
13 000
12 000
11 000
10 000
9 000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

par départements, par agglomérations et par communes les indices P et R. On y lit par exemple (Annuaire 1957) que pour

Armentières P = 24,9 et R = 22,3

ce qui signifie que cette ville possède 24.900 habitants disposant d'une "richesse vive" égale à celle de 22.300 français moyens.

Il est dès lors facile de trouver pour chacun des n secteurs la population et la richesse vive correspondantes, ainsi que les pourcentages de population et de richesse vive de chacun de ces secteurs par rapport au total des n secteurs.

P. Nicolas propose de déterminer les quotas de vente par secteurs par l'utilisation d'une formule de la forme :

$$Q = a.P + b.R$$

où a et b sont deux coefficients à calculer. P, R et par suite Q, étant exprimés en %, Nicolas ramène le calcul des coefficients a et b à un seul coefficient, en supposant que :

$$a + b = 1$$

ce qui revient implicitement à admettre qu'aucun autre facteur que P et R n'a d'influence sur le quota Q.

Pour la détermination de la formule (1) plusieurs méthodes sont utilisables. Voir plus loin.

Données numériques pour un exemple - Une firme a réalisé au cours d'une année les pourcentages M_i ci-dessous dans ses 5 secteurs de vente; P_i et R_i sont respectivement les pourcentages de population et de richesse vive de ces mêmes secteurs.

Secteur	M_i	P_i	R_i
1	19,54	19,68	15,65
2	15,90	18,04	16,07
3	21,79	11,81	27,41
4	25,02	24,32	22,52
5	17,75	26,15	18,35

VI-1 - Première méthode : Par approximations successives.

C'est la méthode exposée par P. Nicolas dans le "Marché Français". Elle n'exige aucune compétence particulière en mathématiques autre que les quatre opérations. Elle a l'inconvénient d'être longue et fastidieuse.

Elle consiste à rendre minimum la somme des écarts absolus entre les pourcentages - maison M_i et les quotas calculés $Q_i = a.P_i + b.R_i$.

$$\sum|M_i - Q_i| = \sum|M_i - (a.P_i + b.Q_i)| = \text{minimum}$$

On commence par exemple par a = 0,5 et b = 0,5 et l'on calcule la somme des écarts absolus entre les M_i et les Q_i (sans tenir compte des signes). D'où une somme S_1.

On essaie ensuite a = 0,6 et b = 0,4, d'où une nouvelle somme S_2; si S_2 est inférieur à S_1 on essaie alors a = 0,7 et b = 0,3; dans le cas contraire, on essaie a = 0,4 et b = 0,6 et ainsi de suite, jusqu'à obtenir la somme $S_{minimum}$. On peut déterminer a et b avec autant de décimales que l'on veut; en pratique, deux décimales suffisent.

Pour les données proposées page 98, le calcul (exposé en détail dans l'annaire "Marché Français" de 1957) conduit à :

$$a = 0,36 \qquad \text{et} \qquad b = 0,64$$

donc à la formule :

$$\underline{Q = 0,36.P + 0,64.R} \tag{3}$$

La méthode exige dans le cas présent 8 essais successifs, correspondant aux essais : a = 0,5; a = 0,6; a= 0,4; a = 0,3; a = 0,2; a = 0,35; a = 0,36; a = 0,37.

Chaque tableau de calculs a l'allure suivante (le tableau ci-après est celui correspondant à la solution) :

Secteur	0,36.P	0,64.R	Q	M	|M-Q|	Signe
1	7,0848	10,0160	17,1008	19,54	2,4392	+
2	6,4944	10,2848	16,7792	15,90	0,8792	-
3	4,2516	17,5424	21,7940	21,79	0,0040	-
4	8,7552	14,4128	23,1680	25,02	1,8520	+
5	9,4140	11,7440	21,1580	17,75	3,4080	-
					8,5824	

VI-2 - Deuxième Méthode : Par les moindres carrés.

Cette méthode - plus savante dans son principe - s'appuie sur la technique des "moindres carrés" familière des auditeurs des cours de statistique appliquée. Elle a l'avantage de conduire au résultat en un seul tableau de calculs.

Elle consiste à rendre minimum la somme des carrés des écarts entre les pourcentages-maison et les quotas calculés $Q_i = aP_i + bR_i$

$$\sum (M_i - Q_i)^2 = \sum (M_i - a.P_i - b.R_i)^2 = \text{minimum}$$

Comme on admet encore que a + b = 1, on a :

$$\sum (M_i - Q_i)^2 = \sum [(M_i - R_i) - a.(P_i - R_i)]^2 = \text{minimum}$$

Développons le carré intérieur :

$$\sum e_i^2 = \sum [(M_i - R_i)^2 - 2a.(M_i - R_i)(P_i - R_i) + a^2.(P_i - R_i)^2]$$

Séparons les sommes des divers termes :

$$\sum e_i^2 = \sum (M_i - R_i)^2 - 2a. \sum (M_i - R_i)(P_i - R_i) + a^2. \sum (P_i - R_i)^2$$

Pour simplifier l'écriture, posons :

$$\sum (M_i - R_i)^2 = S_M$$

$$\sum (M_i - R_i)(P_i - R_i) = S_{MP}$$

$$\sum (P_i - R_i)^2 = S_P$$

La dernière relation s'écrit dès lors :

$$\sum e_i^2 = S_M - 2a.S_{MP} + a^2.S_P$$

Quelques transformations simples conduisent à :

$$\sum e_i^2 = \left[\left(\frac{S_M}{S_P} - \frac{S_{MP}^2}{S_P^2}\right) + \left(\frac{S_{MP}}{S_P} - a\right)^2\right] S_P$$

Il est clair, d'après cette dernière forme de la somme des carrés des écarts, que l'on rendra celle-ci minimum en prenant :

$$a = \frac{S_{MP}}{S_P}$$

ou, en explicitant :

$$\boxed{a = \frac{\sum (M_i - R_i)(P_i - R_i)}{\sum (P_i - R_i)^2}}$$

Le second coefficient b peut s'obtenir par une formule analogue (en permutant les rôles de P_i et R_i), mais il est plus expéditif de le déduire de a, par la relation :

$$b = 1 - a$$

<u>Illustration numérique de la deuxième méthode</u> - Partons des données proposées en page 98. On calcule d'abord secteur par secteur les différences $(M_i - R_i)$ et $(P_i - R_i)$.

Puis on calcule d'une part les carrés $(P_i - R_i)^2$ et, d'autre part, les produits $(M_i - R_i).(P_i - R_i)$.

On totalise ensuite les carrés, d'où la quantité S_P
On totalise aussi les produits, d'où la quantité S_{MP}

Enfin, le coefficient a est fourni par le quotient :

$$a = \frac{S_{MP}}{S_P}$$

Le tableau des calculs se présente comme suit :

Secteur	$(P_i - R_i)^2$	$(P_i - R_i)$	$(M_i - R_i)$	$(M_i - R_i)(P_i - R_i)$
1	16,2409	4,03	3,89	+15,6767
2	3,8809	1,97	-0,17	- 0,3349
3	243,3600	-15,60	-5,62	+86,6720
4	3,2400	1,80	2,50	+ 4,5000
5	60,8400	7,80	-0,60	- 4,6800
	327,5618			+102,8338

$$a = \frac{102,8338}{327,5618} = 0,31 \qquad b = 1 - 0,31 = 0,69$$

Formule du quota : $\underline{Q = 0,31.P + 0,69.R}$

VI-3 - Comparaison entre les résultats des deux méthodes.

Il est bon d'être prévenu que, les deux méthodes reposant sur des principes différents (moindres écarts absolus - moindres carrés des écarts), les formules obtenues par ces deux méthodes diffèreront légèrement. Celle que nous avons développée (la 2ème) tend à amplifier les écarts les plus importants, ce qui revient indirectement à "mettre l'accent sur les facteurs locaux" (force de la concurrence, goûts particuliers ou genre de vie de la région, conditions climatiques, etc.).

Pour concrétiser les différences entre les quotas des divers secteurs d'après les deux méthodes, il suffit d'examiner le tableau comparatif ci après :

Secteur	Chiffres-maison	1ere méthode Q=0,36.P+0,64R		2ème méthode Q=0,31.P+0,69R	
1	19,54	17,10	(-)	16,90	(-)
2	15,90	16,78	+	16,68	+
3	21,79	21,79	=	22,57	+
4	25,02	23,17	-	23,08	-
5	17,75	21,16	+	20,77	+

Exploitation des résultats - Ayant déterminé la formule du quota, par exemple la formule (4) on met en comparaison les chiffres-maison et les quotas résultant de la formule. Si le chiffre-maison M est, dans un secteur donné, supérieur au quota de ce secteur, on peut considérer que la vente marche bien dans ce secteur. Conclusion inverse, si M est inférieur à Q pour un autre secteur.

Ne pas perdre de vue que pour intéressants qu'ils soient, les facteurs P et R fournis par le Marché Français n'épuisent pas la question. Ils constituent une méthode d'approche qui a fait ses preuves dans de nombreux cas; P. Nicolas avertit lui-même que certains articles leur échappent cependant complètement (pianos à queue, moteurs anti-grisou, etc.).

Il est des cas où d'autres indices, que P et R, sont mieux adaptés à l'établissement des quotas. La méthode exposée - dans l'une ou l'autre de ses variantes - reste valable pour autant qu'il soit légitime de supposer que la somme des coefficients a et b est égale à un. Dans le cas où aucune relation ne peut être supposée entre a et b, seule la méthode générale de régression multiplie reste valable.