Revue de statistique appliquée

P. Ferignac

Inspection des produits finis par la méthode des indices de qualité ou démérités

Revue de statistique appliquée, tome 7, n° 3 (1959), p. 27-41
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1959__7_3_27_0>

INSPECTION DES PRODUITS FINIS PAR LA MÉTHODE DES INDICES DE QUALITÉ OU DÉMÉRITÉS (1)

P. FERIGNAC
Statisticien

I - SITUATION DU PROBLEME -

Le contrôle qualitatif des pièces élémentaires qui entrent dans un assemblage est souvent basé sur le pourcentage, p, de pièces défectueuses. Cette manière de procéder suppose qu'on sait classer les objets soumis au contrôle en "bons" et "mauvais". C'est le cas qui se présente dans un contrôle par calibre ou dans un contrôle visuel pour lequel on a défini avec précision la frontière entre les pièces "bonnes" et "mauvaises".

Une classification aussi rigide n'est pas toujours possible. L'article à contrôler peut présenter un grand nombre de défauts de diverses natures, on utilise alors le nombre de défauts par unité de contrôle, soit c. Cette méthode qui ne tient pas compte de la gravité des défauts ne fournit pas une bonne image de la valeur d'usage des produits. Les défauts possibles ont des degrés de gravité très différents qu'il faut prendre en considération si l'on veut rendre compte de la satisfaction que retire le client du produit fini.

Quand on est en présence d'appareils complexes tels que boîte de vitesses d'automobiles, poste récepteur de radio, appareil de chauffage, il est très utile de posséder pour chacun des types fabriqués un indicateur de qualité qui permette de répondre de manière objective aux questions suivantes :

- quelle est la qualité du produit ?
- est-elle aussi bonne qu'elle peut être ?
- quelle est son évolution au cours des six derniers mois de production ?

Il est évident que le pourcentage des produits refusés n'est pas suffisamment nuancé pour décrire au mieux la qualité de la fabrication : il est nécessaire de construire un index qui tienne compte simultanément du nombre et de la gravité des défauts présents dans une unité de contrôle. Cet index est soumis à des fluctuations hasardeuses tenant à la structure aléatoire de l'échantillon. L'inspecteur de qualité doit savoir entre quelles limites il peut raisonnablement varier lorsque la qualité de la production est stable. Il sera alors en mesure de répondre de manière rationnelle aux questions de l'alinéa précédent.

---

(1) Méthode introduite par H. F. Dodge, cf. "A method of rating manufactured product" - Bell System Technical, Journal, Vol. VIII - Apr. 1928 - pp. 350-358.

II - PRINCIPE DU CONTROLE -

Le contrôle des assemblages est statistique, c'est-à-dire qu'on juge de la qualité d'une livraison d'après les résultats obtenus sur un échantillon prélevé au hasard. Pour construire un indicateur de qualité par la méthode des démérites, il est nécessaire de répondre à deux questions préalables.

1/ On doit classer les défauts en classes A, B, C, D, chaque classe comprenant tous les défauts d'égale gravité qu'on est susceptible de rencontrer sur un appareil. Il ne faut pas faire un nombre de classes trop grand car les tests statistiques qui porteraient sur une catégorie de défauts extrêmement rares ne seraient pas très significatifs : la pratique montre qu'il est possible de classer les défauts dans 4 classes au maximum, souvent 2 ou 3 classes seront suffisantes. Il est important de commencer par dresser l'inventaire de toutes les défectuosités qu'on peut rencontrer au cours des essais de manière qu'un inspecteur ne soit jamais embarrassé pour le classement d'un élément de l'appareil non conforme aux normes.

Dans beaucoup d'entreprises, on adopte la classification(1) et les règles suivantes :

- Défauts critiques (A) tels que :
  - l'acheteur refusera sûrement le produit ;
  - l'appareil présentera sûrement des pannes dont la réparation est difficile ;
  - leur présence peut causer des dommages.
- Défauts majeurs (B) tels que :
  - l'acheteur ne sera pas satisfait ;
  - l'appareil présentera probablement, mais pas sûrement, des pannes graves pendant son utilisation ;
  - la durée de vie de l'appareil sera abrégée ou nécessitera des frais d'entretien excessifs.
- Défauts mineurs (C) tels que :
  - le service de l'appareil ne sera pas aussi satisfaisant qu'on peut normalement le prévoir mais ne comportera pas de pannes graves;
  - la durée de vie de l'appareil pourra être un peu abrégée ou nécessitera des frais d'entretien plus élevés que ceux qui sont considérés comme normaux.
- Défauts légers (D) tels que :
  - la valeur d'usage et la durée de vie de l'appareil ne seront pas diminués.

Cette classification n'a rien de rigide, nous la donnons à titre indicatif pour préciser la gradation de la gravité des défauts. Pour chaque type d'appareil ou d'assemblages partiels le contrôle doit, en principe, considérer les répercussions économiques de chaque faute possible afin de la classer convenablement.

2/ Il faut attribuer un poids à chacune des classes de défauts retenue. Le poids affecté à une classe est en raison directe de l'estimation du préjudice causé par la présence d'un quelconque des défauts répertoriés dans cette classe. On

----

(1) Classification conforme à l'avant-projet de recommandation de l'organisation internationale de normalisation (La Haye, 1957).

doit considérer les inconvénients techniques et les pertes résultant de la livraison à la clientèle d'appareils présentant la défectuosité envisagée.

On ne peut pas donner de règles bien définies pour la fixation d'un système de pondération des défauts qui doit être élaboré dans chaque entreprise, après discussion avec le bureau des méthodes, la fabrication, les services commerciaux. Ce système est nuancé : le poids peut varier avec l'écart d'une cote à ses tolérances, un même défaut d'émaillage peut avoir deux poids selon sa situation sur l'appareil... L'entreprise trouve une information intéressante pour la fixation des poids dans l'analyse des réclamations de la clientèle qui indique sa sensibilité aux divers défauts, le prix des retouches, le service après-vente qui permet de chiffrer le coût des réparations chez le client. De ces considérations on déduit les poids ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 des défauts des classes respectives A, B, C, D : $\varpi_1 > \varpi_2 > \varpi_3 > \varpi_4$. Les valeurs absolues des ϖ sont sans influence sur le contrôle, seules leurs valeurs relatives sont fondamentales.

Bien qu'un certain arbitraire soit inévitable dans le choix de la pondération, celle-ci conserve toute sa valeur pour la comparaison des qualités d'une production au cours du temps.

La classification des défauts étant faite avec précision et les poids correspondants fixés, la méthode est très simple. Il suffit de compter le nombre des répétitions des défauts de chaque catégorie sur un échantillon d'appareils prélevés sur une livraison ; soient x, y, z, t les défauts des classes A, B, C, D décomptés sur un échantillon de n objets.

Le démérite total correspondant à cet échantillon est :

$$D_n = \varpi_1 x + \varpi_2 y + \varpi_3 z + \varpi_4 t.$$

D_n est l'indicateur de la qualité de cet échantillon, c'est cette quantité qu'on désire surveiller c'est-à-dire pour laquelle on doit fixer des limites de contrôle. Il est évident que D_n varie en sens inverse de la qualité. Afin d'obtenir une représentation graphique de la qualité conforme aux habitudes, c'est-à-dire, une ligne polygonale dont les côtés montent vers la droite quand la qualité s'améliore, il suffit de graduer l'axe des démérites dans le sens croissant de haut en bas.

III - FLUCTUATION ET MISE SOUS CONTROLE DU DEMERITE TOTAL -

Etant donnée une population de qualité homogène les individus qui la constituent présentent un nombre de défauts variable pour chacune des classes. Les quantités x, y, z, t sont des grandeurs aléatoires. Par conséquent, lorsqu'on tire de la population un échantillon de n objets, le démérite total D_n est une grandeur aléatoire à laquelle il importe d'assigner des limites probables entre lesquelles on doit s'attendre à l'observer.

Il est raisonnable d'admettre que le nombre de défauts de chaque catégorie, x, y, z, t, suit une loi de Poisson car le nombre de défauts possibles dans un échantillon est assez grand et la probabilité d'apparition d'un défaut quelconque est faible. Désignons par m_1, m_2, m_3, m_4 le nombre moyen de défauts des classes respectives A, B, C, D dans un échantillon d'effectif n. Les quantités m représentent les imperfections du procédé de fabrication avec lesquelles on est obligé de vivre. Aucune fabrication n'est capable d'atteindre la perfection qui consiste à ne produire que des pièces exemptes de toute défectuosité ou, tout au moins, d'assurer cette garantie dans des conditions économiques acceptables. Les valeurs moyennes, m, sont déterminées d'après l'expérience qu'on a des machines lorsqu'elles sont sous contrôle dans les conditions normales de la production. On doit certainement s'efforcer de diminuer les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_4 mais la qualité excellente coûte très cher et il faut adopter un niveau de qualité moyen qui satisfasse les exigences du prix de revient. Le but du contrôle est de maintenir l'ensemble des imperfections dans des limites compatibles avec de bonnes conditions de travail.

Le nombre de défauts x suivant une loi de Poisson de moyenne m, $\varpi_1 x$ ne suit pas une loi de Poisson de moyenne $\varpi_1 m$ car $\varpi_1 x$ est une variable discrète qui varie par sauts égaux à ϖ_1. On déduit de ceci que $D_n = \varpi_1 x + \varpi_2 y + \varpi_3 z + \varpi_4 t$, ne suit pas non plus une loi de Poisson.

Cependant, on connaît la valeur moyenne de D_n, soit :

$$D_o = \varpi_1 m_1 + \varpi_2 m_2 + \varpi_3 m_3 + \varpi_4 m_4$$

D'autre part, les variances de x, y, z, t étant respectivement m_1, m_2, m_3, m_4, si l'on admet l'hypothèse de l'indépendance des défauts, la variance de D_n (forme linéaire de x, y, z, t) est :

$$\sigma^2_{D_n} = \varpi_1^2 m_1 + \varpi_2^2 m_2 + \varpi_3^2 m_3 + \varpi_4^2 m_4$$

et son écart-type :

$$\sigma_{D_n} = \sqrt{\varpi_1^2 m_1 + \varpi_2^2 m_2 + \varpi_3^2 m_3 + \varpi_4^2 m_4}$$

Considérons la variable réduite :

$$u = \frac{D_n - D_o}{\sigma_{D_n}}$$

lorsque les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_4 ne sont pas très petites, de l'ordre de quelques unités, (ce qui est réalisable en prélevant des échantillons dont la taille, n, est suffisamment grande) on peut admettre que la distribution de u n'est pas trop éloignée de la distribution Normale qui peut alors être utilisée, avec une approximation suffisante pour les besoins de la pratique industrielle. Nous reviendrons dans l'appendice mathématique sur la validité de cette approximation. Nous pouvons cependant dire, dès maintenant, que, même dans le cas où l'estimation des probabilités correspondant à un intervalle quelconque pour D_n n'est pas très bonne par l'approximation Normale, celle-ci est légitime pour la détermination de la limite supérieure de D_n qu'on a une faible probabilité (0,05 ou 0,01) de dépasser par le seul jeu du hasard. On peut donc assigner à D_n les limites de surveillance et de contrôle respectivement à deux et trois écarts-types autour de la moyenne D_o.

On aura alors approximativement :

$$Pr(D_o - 2\sigma_{D_n} \leqslant D_n \leqslant D_o + 2\sigma_{D_n}) \simeq 0,95$$

$$Pr(D_o - 3\sigma_{D_n} \leqslant D_n \leqslant D_o + 3\sigma_{D_n}) \simeq 0,997.$$

La carte de contrôle des démérites pour des échantillons d'effectif constant, n, est schématisée dans la figure 1.

On sait que, par hypothèse, $D_n \geqslant 0$, par conséquent, si l'une des limites ci-dessus définies est négative on lui donne la valeur zéro. Dans cette éventualité la courbe de la distribution Normale que nous avons admise pour D_n est tronquée et nous pouvons nous demander quel est l'effet de cette troncation sur la probabilité d'obtenir un démérite à l'intérieur de la bande de contrôle.

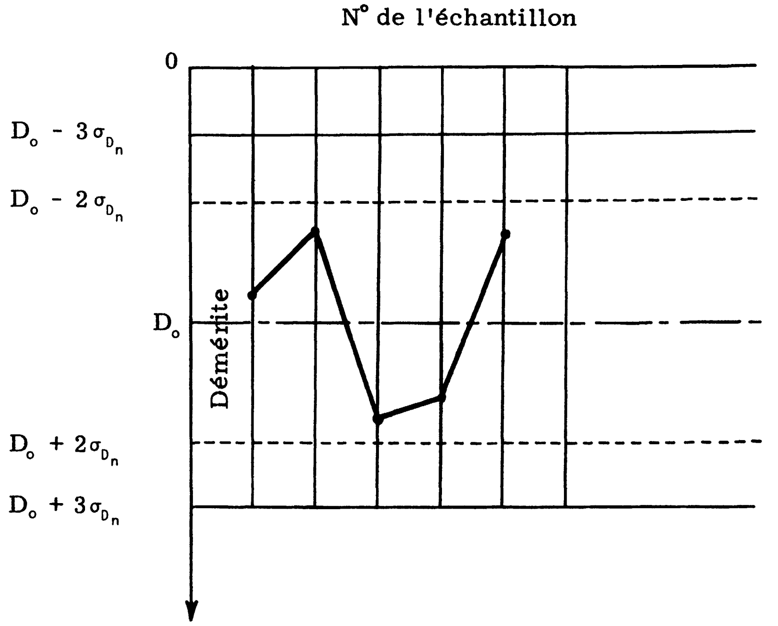

Figure 1 - Schéma de la carte de contrôle du démérite total.

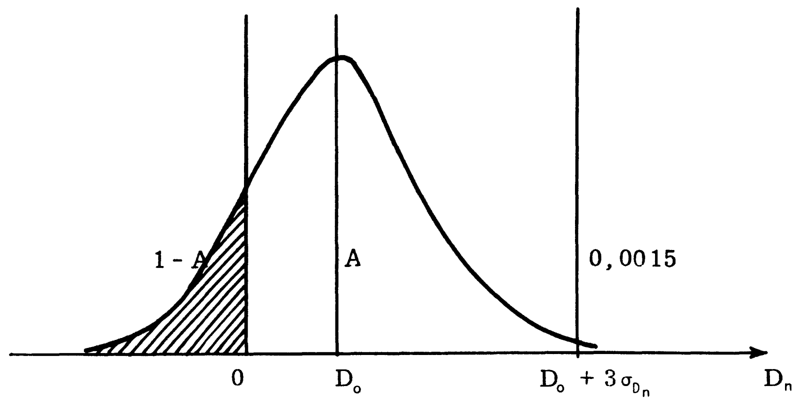

Figure 2 - Distribution Normale tronquée.

D'après la figure 2, dans laquelle la distribution Normale est tronquée à l'abscisse zéro, si nous représentons par A l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses $\frac{1}{2} < A < 1$, on a :

$$Pr(D_n \geqslant D_o + 3\sigma_{D_n}) = \frac{0,0015}{A}$$

d'où :

$$Pr(D_n \leqslant D_o + 3\sigma_{D_n}) = 1 - \frac{0,0015}{A}$$

Les limites de contrôle correspondent à un seuil de confiance compris entre 0,997 et 0,9985, la distribution normale tronquée ne modifie donc pas de manière importante les risques du contrôleur.

Exemple numérique[1].

Un appareil fabriqué par "Federal Telephone and Radio Corporation" est mis sous contrôle statistique par la méthode des démérites. On prélève dans la production 30 échantillons consécutifs de 100 unités. Les défauts sont répartis en 4 classes dont les poids respectifs sont 50, 20, 5 et 1. Le relevé des défauts pour les 3 000 appareils inspectés est donné dans le tableau 1.

Tableau 1

Classe de défauts	Poids ϖ	Nbre de défauts d	ϖd	$\varpi^2 d$
A	50	5	250	12 500
B	20	16	320	6 400
C	5	75	375	1 875
D	1	52	52	52
		148	997	20 827

On déduit du tableau :

le démérite moyen pour un échantillon de 100 appareils = $D_0 = \frac{997}{30} = 33,2$

- la variance moyenne de $D_{100} = \sigma^2_{D_{100}} = \frac{20\,827}{30} = 694$

- l'écart-type de $D_{100} = \sigma_{D_{100}} = \sqrt{694} = 26,3$

- les limites de contrôle : $\underline{0}$ et $\overline{112}$

- les limites de surveillance : $\underline{0}$ et $\overline{86}$

Les valeurs ci-dessus permettent de construire la carte de contrôle du démérite total pour un échantillon de 100 unités. Nous représentons cette carte dans la figure 3 et donnons dans le tableau 2 les éléments pour le calcul du démérite des échantillons N° 5, 10, 15 et 20.

Tableau 2

N° de l'échantillon		5		10		15		20	
classe	ϖ	d	ϖd	d	ϖd	d	ϖd	d	ϖd
A	50	0	0	0	0	2	100	0	0
B	20	0	0	1	20	1	20	1	20
C	5	2	10	2	10	3	15	6	30
D	1	2	2	1	1	3	3	4	4
Démérite total			12		31		138		54

---

(1) Les données de cet exemple sont extraites d'un article de David A. Hill "Control of complicated product" paru dans "Industrial Quality Control" de Janvier 1952, vol. VIII, N° 4.

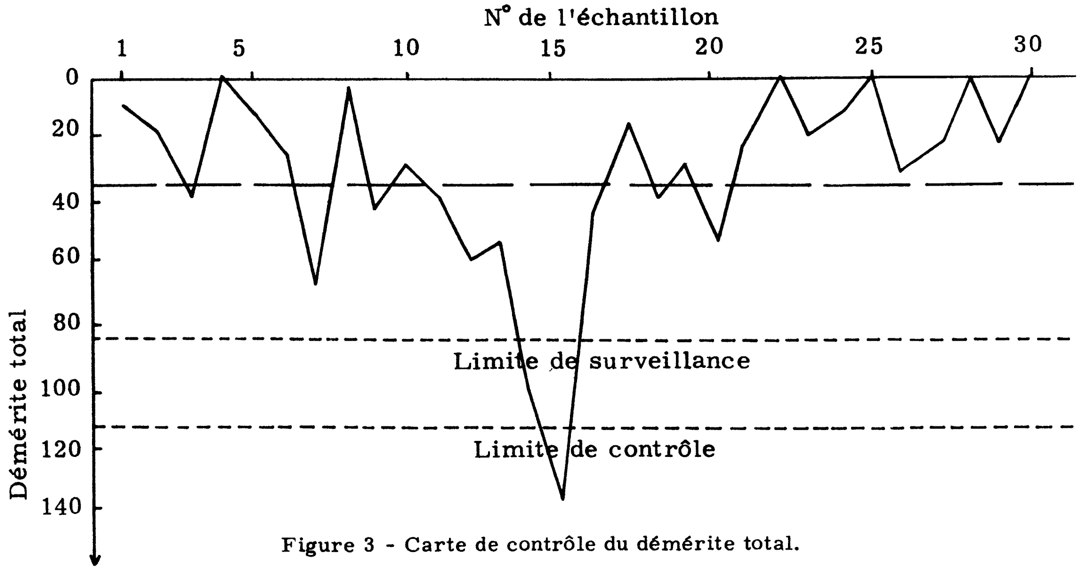

Figure 3 - Carte de contrôle du démérite total.

Nous lisons sur la carte de contrôle l'histoire de la qualité au cours du temps, en particulier, le contrôleur est alerté dès l'échantillon 14, l'échantillon 15 provient d'une fabrication dans laquelle des causes assignables de détérioration de la qualité sont intervenues, il semble qu'à partir de cette date la qualité s'améliore de façon systématique. La recherche des facteurs de cette amélioration est importante en vue de stabiliser la fabrication à un niveau de qualité plus élevé.

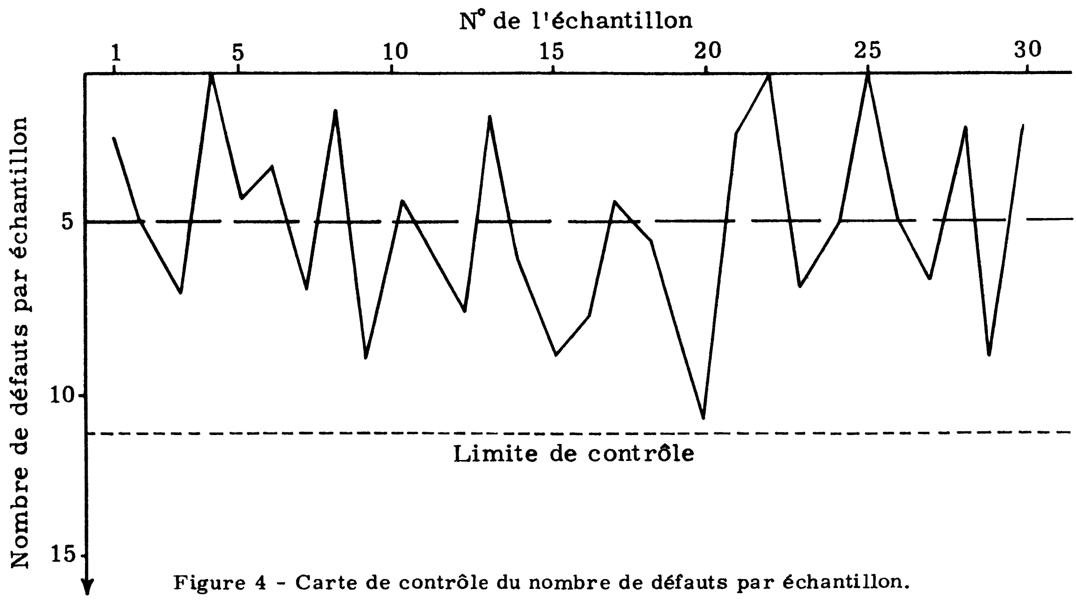

Figure 4 - Carte de contrôle du nombre de défauts par échantillon.

Nous donnons dans la figure 4 la carte de contrôle du nombre de défauts par unité de contrôle (une unité de contrôle = 100 appareils) basée sur les mêmes observations que la carte de contrôle du démérite.

On a :

- le nombre moyen de défectuosités par unité $= \frac{148}{30} = 4,9$.

- limites de contrôle = $\underline{0}$ et $4,9 + 3\sqrt{4,9} = \overline{11,5}$

La comparaison des deux cartes de contrôle confirme la plus grande sensibilité du contrôle par démérite aux défauts graves.

IV - DEMERITE UNITAIRE -

Le démérite total D_n d'un échantillon de n objets dépend évidemment de n. Par conséquent, D_n ne se prête aux comparaisons dans le temps qu'à la condition que l'effectif de l'échantillon soit constant. Dans bien des cas le volume de la production varie et les échantillons successifs ont alors des tailles différentes. Dans ces conditions, il est commode d'introduire le démérite par unité contrôlée.

On définit le démérite unitaire se rapportant à l'inspection de n objets par :

$$U_n = \frac{D_n}{n},$$

U_n est donc la moyenne des n démérites des objets qui constituent l'échantillon. U_n est une variable aléatoire dont nous devons chercher les limites de fluctuation qui se déduisent de celles de D_n avec la même approximation.

Nous avons vu que la valeur moyenne de D_n est :

$$D_o = \varpi_1 m_1 - \varpi_2 m_2 + \varpi_3 m_3 + \varpi_4 m_4$$

les valeurs de m_1, m_2, m_3, m_4 représentent le nombre moyen de défauts acceptable dans chaque catégorie A, B, C, D pour un échantillon de n objets. De la même manière, nous définissons u_1, u_2, u_3, u_4 ($u_i = \frac{m_i}{n}$) qui représentent le nombre moyen de défauts dans un appareil lorsque la fabrication est réglée au mieux. Ces valeurs caractérisent la qualité.

Si nous considérons le démérite unitaire moyen U_n résultant de l'inspection de n objets, sa valeur moyenne est :

$$U_o = \varpi_1 u_1 + \varpi_2 u_2 + \varpi_3 u_3 + \varpi_4 u_4$$

Les u suivant des lois de Poisson, la variance du démérite unitaire lorsqu'on contrôle un seul objet est :

$$\sigma^2_{U_1} = \varpi^2_1 u_1 + \varpi^2_2 u_2 + \varpi^2_3 u_3 + \varpi^2_4 u_4 ,$$

comme, en général, le contrôle s'exerce sur un échantillon de n objets d'où l'on déduit le démérite unitaire moyen U_n on a :

$$\sigma^2_{U_n} = \frac{\sigma^2_{U_1}}{n} = \frac{\varpi^2_1 u_1 + \varpi^2_2 u_2 + \varpi^2_3 u_3 + \varpi^2_4 u_4}{n}$$

$$\sigma_{U_n} = \frac{\sigma_{U_1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\varpi^2_1 u_1 + \varpi^2_2 u_2 + \varpi^2_3 u_3 + \varpi^2_4 u_4}{n}}$$

Nous déduisons de ceci, dans les mêmes conditions que pour le démérite total D_n, les limites de surveillance et de contrôle du démérite unitaire soit :

$$U_o \pm 2\sigma_{U_n}$$

$$U_o \pm 3\sigma_{U_n} .$$

Dans le cas où l'une de ces limites est négative on la prend égale à zéro. Les limites ci-dessus dépendent de la taille n de l'échantillon.

<u>Exemple numérique</u>(1).

Dans le contrôle d'un type de relais téléphoniques la qualité mensuelle est suivie à l'aide du démérite unitaire. Les défauts sont classés en 4 catégories A, B, C, D, de poids respectifs 100, 50, 10 et 1.

La qualité standard est définie pour chacune des classes de défauts par :

$u_1 = 0,0014$ (classe A)
$u_2 = 0,0034$ (classe B)
$u_3 = 0,0205$ (classe C)
$u_4 = 0,0097$ (classe D)

d'où l'on déduit :

$$U_o = 100 \times 0,0014 + 50 \times 0,0034 + 10 \times 0,0205 + 1 \times 0,0097 \simeq 0,52$$

et :

$$\sigma^2_{U_1} = 100^2 \times 0,0014 + 50^2 \times 0,0034 + 10^2 \times 0,0205 + 1 \times 0,0087 \simeq 25,$$

d'où :

$$\sigma_{U_1} = 5 .$$

(les valeurs de U_o et $\sigma^2_{U_1}$ sont arrondies à 2 chiffres significatifs).

Les résultats du contrôle pour 3 mois : Juin, Juillet-Août, Septembre sont donnés dans le tableau 3.

Tableau 3

Défaut	ϖ	Nombre de défauts			Démérite		
		Juin	J-A	Sept.	Juin	J-A	Sept.
A	100	0	1	0	0	100	0
B	50	0	2	0	0	100	0
C	10	5	10	5	50	100	60
D	1	1	4	3	1	4	3
Démérite total, D_n					51	304	63
Effectif de l'échantillon, n					232	240	165
Démérite unitaire, U_n					0,22	1,27	0,38

Les écarts-types de U_n pour Juin, Juillet-Août et Septembre sont :

----

(1) Exemple tiré de l'article de H. F. Dodge et M. N. Torrey "A check inspection and demerit rating plan" paru dans Industrial Quality Control de Juillet 1956, Vol. XIII, N° 1.

$$\frac{5}{\sqrt{232}} = 0,328 \qquad \frac{5}{\sqrt{240}} = 0,323 \qquad \frac{5}{\sqrt{165}} = 0,389$$

d'où les limites de contrôle :

$$\underline{0} \text{ et } \overline{1,51}\ ,\quad \underline{0} \text{ et } \overline{1,49}\ ,\quad \underline{0} \text{ et } \overline{1,69}$$

Nous reproduisons la carte de contrôle depuis le mois de Janvier dans la figure 5 qui nous montre que de Janvier à Septembre la fabrication est sous contrôle. Le détail du calcul du démérite unitaire n'est pas donné pour les 5 premiers mois.

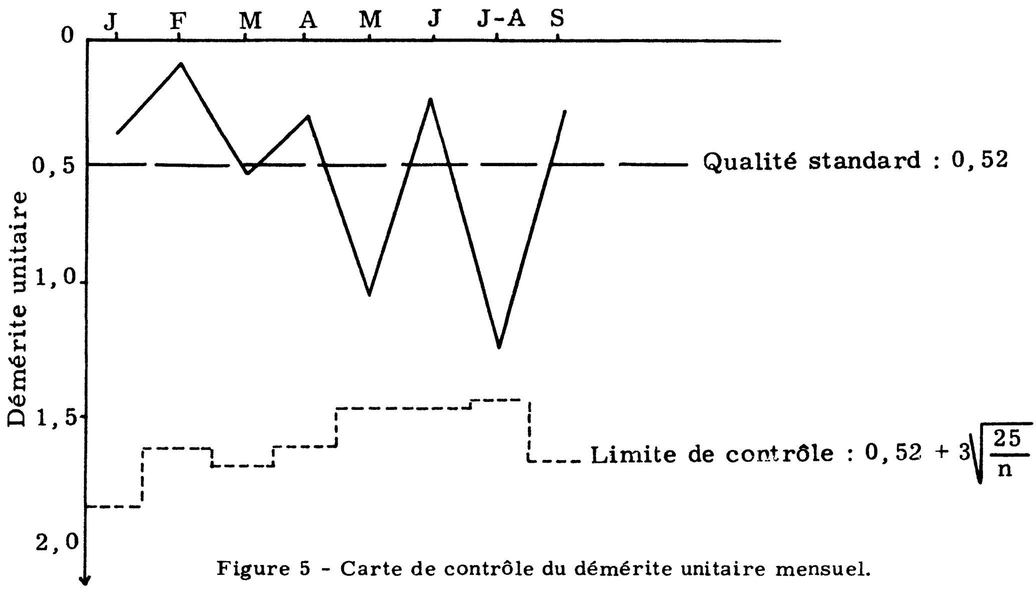

Figure 5 - Carte de contrôle du démérite unitaire mensuel.

V - INDICE DE DEMERITE -

Le démérite unitaire décrit l'évolution de la qualité d'un même produit dans le temps lorsque la classification des défauts reste la même ainsi que leurs démérites standards. La quantité U_n ne peut pas être utilisée pour les comparaisons de la qualité de deux fabrications distinctes, ni pour des produits distincts. En effet, dans ces derniers cas, les défauts possibles ne sont pas les mêmes, pas plus que la fréquence de leur apparition. Ces comparaisons, souvent utiles, sont rendues possibles par l'introduction de l'indice de démérite.

On appelle indice de démérite le quotient $I_n = \frac{U_n}{U_o}$, on passe donc de U_n à I_n par un changement d'unité.

L'espérance mathématique de I_n est :

$$E(I_n) = 1,$$

et son écart-type :

$$\sigma_{I_n} = \frac{\sigma_{U_n}}{U_o} = \frac{\sqrt{\varpi_1^2 u_1 + \varpi_2^2 u_2 + \dots\dots}}{\sqrt{n}(\varpi_1 u_1 + \varpi_2 u_2 + \dots)}$$

lorsqu'il est calculé sur un échantillon d'effectif n.

Il est évident que la distribution de I_n tend vers la normale en même temps que le démérite total D_n et le démérite unitaire U_n.

Les limites de surveillance et de contrôle de I_n sont respectivement $1 \pm 2\sigma_{I_n}$ et $1 \pm 3\sigma_{I_n}$, l'installation de la carte de contrôle ne présente aucune difficulté.

Exemple numérique.

Les indices de démérite pour les fabrications de Juin, Juillet-Août et Sep tembre d'après le tableau 3 sont :

$$\frac{0,22}{0,52} = 0,42 \qquad \frac{1,27}{0,52} = 2,44 \qquad \frac{0,38}{0,52} = 0,73$$

avec les écarts-types respectifs :

$$\frac{0,328}{0,52} = 0,63 \qquad \frac{0,323}{0,52} = 0,62 \qquad \frac{0,389}{0,52} = 0,75$$

Composition des indices de qualité.

Considérons une usine qui fabrique des appareils de divers types, si la direction veut se faire une idée sur l'évolution de la qualité de la production, il est commode d'introduire un indice général I_G qui est une combinaison linéaire des indices de qualité de chaque type d'appareil I_j affectés de poids correspondant à leur importance respective sur le marché ou aux objectifs économiques de la société, soit π_j le système de poids. On définit alors :

$$I_G = \frac{\Sigma\ \pi_j\ I_j}{\Sigma\ \pi_j}$$

La moyenne de I_G est égale à un et son écart-type :

$$\sigma_{I_G} = \frac{1}{\Sigma\ \pi_j} \sqrt{\Sigma\ \pi_j^2\ \sigma_{I_j}^2}$$

On déduit de ces valeurs les limites de surveillance et de contrôle de l'indice général I_G.

VI - CHAMP D'APPLICATION -

La méthode des démérites peut être appliquée très efficacement dans le contrôle de la fabrication d'appareils compliqués ou dans le contrôle de réception de lots d'objets qui entrent dans un montage ou de produits finis.

Cependant, il nous semble que son emploi le plus important consiste dans son utilisation, sous la forme d'indice de démérite, qui permet au directeur général d'une société ou au chef de service de la qualité de suivre, à l'aide d'un seul chiffre, l'évolution de la qualité d'un atelier ou d'une usine. Ils peuvent ainsi agir sans retard auprès des responsables de la fabrication.

Il faut toutefois remarquer que le démérite, s'il est un résumé de qualité valable contient moins d'informations que le relevé du nombre de défauts de chaque catégorie. Il est certain qu'il faut revenir à ces derniers si le démérite est hors des limites de contrôle afin de repérer les défauts responsables des écarts anormaux et tenter de les éliminer.

Ajoutons que le système des démérites est en usage depuis plusieurs années aux U. S. A., en particulier à la Bell Telephone C°, où il donne toute satisfaction.

VII - APPENDICE MATHEMATIQUE -

Les règles que nous avons admises pour la détermination des limites de contrôle du démérite total D_n sont-elles justifiées ? C'est à cette question que nous tentons de répondre en admettant l'hypothèse de l'indépendance des défauts et de leur distribution selon une loi de Poisson.

1/ Etude de la distribution de $y = \varpi x$, où $\varpi \neq 1$ est une constante et x une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre m.

La fonction génératrice de 2è espèce de la loi de distribution de x est :

$$\psi(t) = m(e^{it} - 1) ,$$

tous les cumulants sont égaux à m.

Par conséquent, la fonction génératrice de 2è espèce de la loi de distribution de y est :

$$\psi(t) = m(e^{it\varpi} - 1) ,$$

et les cumulants sont donc :

$$K_1 = \varpi m , \quad K_2 = \varpi^2 m, \ \dots\dots\dots, \quad K_r = \varpi^r m, \ \dots .$$

les cumulants n'étant pas égaux ($\varpi \neq 1$), on en conclut que y ne suit pas une loi de Poisson.

Considérons la variable réduit u correspondant à y :

$$u = \frac{\varpi x - \varpi m}{\varpi \sqrt{m}} = \frac{x - m}{\sqrt{m}}$$

elle est indépendante de ϖ et les cumulants de la distribution de u sont :

$$K_1 = 0$$
$$K_2 = 1$$
$$K_3 = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$K_r = \frac{1}{m^{\frac{r-2}{2}}}$$

La loi Normale (0, 1) est caractérisée par $K_1 = 0$, $K_2 = 1$ et $K_r = 0$ pour $r > 2$; d'où l'on déduit que la loi de distribution de u est d'autant plus voisine de la loi normale que m est plus grand, ce qui constitue une conclusion évidente a priori.

2/ Etude de la distribution de $D = \varpi_1 x + \varpi_2 y + \varpi_3 z$ où $\varpi_1 > \varpi_2 > \varpi_3$ sont des constantes et x, y, z des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres m_1, m_2, m_3.

Les cumulants de la distribution de D sont :

$$K_1 = \varpi_1 m_1 + \varpi_2 m_2 + \varpi_3 m_3$$
$$K_2 = \varpi_1^2 m_1 + \varpi_2^2 m_2 + \varpi_3^2 m_3$$

$$K_r = \varpi_1^r m_1 + \varpi_2^r m_2 + \varpi_3^r m_3$$

Introduisant la variable réduite :

$$u = \frac{\varpi_1 x + \varpi_2 y + \varpi_3 z - (\varpi_1 m_1 + \varpi_2 m_2 + \varpi_3 m_3)}{\sqrt{\varpi_1^2 m_1 + \varpi_2^2 m_2 + \varpi_3^2 m_3}}$$

les cumulants de u sont :

$$K_1 = 0$$

$$K_2 = 1$$

$$K_3 = \frac{\varpi_1^3 m_1 + \varpi_2^3 m_2 + \varpi_3^3 m_3}{(\varpi_1^2 m_1 + \varpi_2^2 m_2 + \varpi_3^2 m_3)^{3/2}} = \frac{m_1 + \varpi_2'^3 m_2 + \varpi_3'^3 m_3}{(m_1 + \varpi_2'^2 m_2 + \varpi_3'^2 m_3)^{3/2}}$$

En posant $\varpi_2' = \dfrac{\varpi_2}{\varpi_1}$, $\varpi_3' = \dfrac{\varpi_3}{\varpi_1}$

Par hypothèse $\varpi_3' < \varpi_2' < 1$, d'où :

$$K_3 < \frac{1}{(m_1 + \varpi_2'^2 m_2 + \varpi_3'^2 m_3)^{1/2}}$$

On trouve de même :

$$K_r = \frac{\varpi_1^r m_1 + \varpi_2^r m_2 + \varpi_3^r m_3}{(\varpi_1^2 m_1 + \varpi_2^2 m_2 + \varpi_3^2 m_3)^{r/2}} < \frac{1}{(m_1 + \varpi_2'^2 m_2 + \varpi_3'^2 m_3)^{\frac{r-2}{2}}},$$

qui prouve que les cumulants de la distribution de D sont décroissants à la condition que $(m_1 + \varpi_2' m_2 + \varpi_3' m_3)$ soit supérieure à 1, la distribution de D sera d'autant plus voisine d'une distribution normale que l'expression ci-dessus aura une valeur plus élevée supérieure à l'unité.

Si l'on remarque que m = n u, u caractérisant le nombre de défauts acceptable dans une catégorie pour un objet, on voit que m peut être rendu assez grand en prenant des échantillons d'effectif n suffisant et que, dans ces conditions, on peut rendre l'approximation Normale aussi bonne qu'on le désire.

On aura une meilleure idée de la valeur de l'approximation Normale par les deux exemples numériques que nous indiquons ci-dessous et pour lesquels les probabilités des diverses valeurs de D sont faciles à calculer.

Exemples.

Nous comparons la probabilité théorique de diverses valeurs du démérite $D = 2x + y$ à la probabilité approchée en admettant que D suit une loi Normale, x et y suivant des lois de Poisson de moyennes respectives m_1 et m_2.

1er cas : $m_1 = 0,1$; $m_2 = 0,2$

Valeur moyenne de $D = D_o = 0,4$

Ecart-type de $D = \sigma_D = \sqrt{0,6} = 0,7746$

L.S.C. $= 0,4 + 3 \times 0,7746 = \overline{2,7238}$

L.I.C. $= \underline{0}$

Par hypothèse, D ne pouvant prendre que des valeurs entières, on conclura qu'il est hors de contrôle lorsqu'on trouvera pour D une valeur supérieure ou égale à 3.

Le tableau 4 permet la comparaison des probabilités exactes et approchées par la loi Normale.

Tableau 4

D	0	1	2	3	4
Prob. Théoriques	0,741	0,148	0,089	0,016	0,006
Approximat. Normale	0,551	0,371	0,075	0,003	

Pour calculer Pr D = 0, en admettant la distribution Normale, on a calculé la probabilité Pr $D \leqslant 0$, ce qui revient à bloquer sous la valeur D = 0 les valeurs négatives de D : -1, -2, ... qui n'ont pas de sens concret.

Nous constatons des différences notables entre la distribution théorique et la distribution Normale, différences auxquelles il fallait s'attendre car $K_3 = 2{,}15$ et $K_4 = 5$ ont des valeurs assez élevées. Toutefois, la limite supérieure de contrôle qui résulte de l'approximation Normale est acceptable puisqu'on a $Pr(D \geqslant 3) = 0{,}022$; elle comporte un risque un peu plus grand que celui qu'on prend habituellement mais, étant données les hypothèses admises dans de tels problèmes ce fait ne paraît pas suffisant pour nous amener à condamner la méthode très simple de la détermination de la limite supérieure de contrôle D.

2ème cas : $m_1 = 1$; $m_2 = 2$

Valeur moyenne de D = $D_o = 4$

Ecart-type de D = $\sigma_D = \sqrt{6} = 2{,}4495$

L.S.C. $= 4 + 3 \times 2{,}4495 = \overline{11{,}3485}$

L.I.C. $= \underline{0}$

Comme D ne peut prendre que des valeurs entières, on dira qu'il est hors de contrôle lorsque D sera supérieur ou égal à 12.

Le tableau 5, calculé comme le tableau 4, permet la comparaison de la distribution exacte et de la distribution approchée de D par la loi Normale.

Tableau 5

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Théoriques	0,050	0,100	0,149	0,166	0,158	0,129	0,096	0,064	0,040	0,024	0,013	0,009	0,002
Approx. normale	0,076	0,077	0,117	0,150	0,159	0,150	0,117	0,077	0,044	0,021	0,008	0,002	0,002

Bien que l'approximation Normale ne soit pas excellente pour toutes les valeurs de D, elle est bien meilleure que dans le 1er cas, ce fait résulte des valeurs des cumulants, $K_3 = 0{,}68$; $K_4 = 0{,}5$ qui sont très inférieurs à ceux du premier cas. La limite supérieure de contrôle égale à 12, et définie par la règle simple de 3 écarts-types au-dessus de la moyenne est très acceptable, on a, en effet, $Pr(D \geqslant 12) = 0{,}002$ qui mesure le risque de refuser un bon réglage.

Il est bien évident que pour un plus grand nombre de classes de défauts ou pour des valeurs des moyennes m plus élevées l'approximation par la distribution normale est d'autant meilleure que l'expression $m_1 + \varpi_2'^2 m_2 + \varpi_3'^2 m_3 + \ldots$ a une valeur plus élevée. Les exemples précédents montrent que la loi Normale est suffisante pour les besoins pratiques lorsque l'expression ci-dessus est de l'ordre de 2 unités. Dans les cas usuels la limite supérieure de contrôle égale à $D_o + 3\sigma_D$ est telle qu'on a la quasi certitude d'observer des valeurs de D inférieures du fait du hasard, elle se trouve donc justifiée.