

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. DELCOURT

Équipement d'une station de pompage

Revue de statistique appliquée, tome 7, n° 2 (1959), p. 77-86

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1959__7_2_77_0

© Société française de statistique, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUIPEMENT D'UNE STATION DE POMPAGE

J. DELCOURT

Groupe de Recherche Opérationnelle,
Société Shell-Berre
(Étude effectuée en Janvier 1958)

L'étude effectuée, en janvier 1958, traitait du problème suivant :

Des pompes, au nombre de 14, numérotées de 1 à 13 et 18, sont affectées chacune à une catégorie déterminée d'huile.

Actuellement, ces pompes travaillent pendant un pourcentage du temps variant entre 1 et 30 % environ.

Au cours des prochaines années, le tonnage global des huiles véhiculées par ces pompes augmentera. Chacune d'elles subira donc un accroissement de charge qui pourrait entraîner des attentes indésirables.

En laissant intacte l'installation actuelle, on se demande quelle est l'augmentation du tonnage d'huile que peut supporter chaque pompe, en acceptant une certaine probabilité du risque d'attente des demandes.

I - DONNEES DU PROBLEME ET METHODE UTILISEE.

Les données sont pour chaque pompe, les relevés quotidiens :

- des débits de pompage, établis au quart d'heure le plus proche ;
- des durées de pompage.

Le mois de janvier 1957, l'un des plus chargés, fut choisi. Il comprend 21 journées de travail, chacune s'étendant, sans coupure de 7 à 21 heures.

Le traitement mathématique du problème s'opère en deux parties :

Statistique.

a/ Les données brutes initiales (relevés quotidiens des pompages) ont été transformées en histogrammes (graphique des fréquences) :

- d'une part des arrivées des demandes ;
- d'autre part, des durées de pompage.

b/ Les instants d'arrivée des demandes et les durées de fonctionnement ont été supposés obéir à certaines conditions constituant une loi de probabilité.

(1) En l'absence de l'auteur, présenté aux Journées d'étude et de discussions des anciens stagiaires du Centre de Formation, par J. Bourat.

c/ On a vérifié la validité de la loi supposée en contrôlant la plus ou moins grande conformité des histogrammes aux courbes théoriques représentatives de cette loi, par test du χ^2 .

Calcul des probabilités.

Nous nous sommes ramenés à un problème simple de file d'attente, caractérisé sommairement par trois points essentiels :

- du point de vue probabiliste, les arrivées des demandes sont indépendantes les unes des autres ;
- de même, les durées de pompage sont considérées comme indépendantes les unes des autres.
- les demandes qui attendent sont servies dans l'ordre de leur arrivée .

Ce type de problème est donc parfaitement classique.

II - RESOLUTION DU PROBLEME.

Statistique - Pour chaque pompe il faut étudier :

- la loi des arrivées des demandes ;
- la loi des durées de pompage.

1/ Loi des arrivées des demandes.

Observons tout d'abord que les relevés quotidiens fournissent les instants de démarrage des pompes. Or, dans nos formules ultérieures, ne sont considérées que les arrivées des demandes. Puisque le trafic actuel est assez faible et ne donne pas lieu, en général à des attentes, nous estimerons que l'arrivée d'une demande et le démarrage de la pompe coïncident dans les relevés actuels dont nous disposons.

Chaque journée de travail a été divisée en quarts (q. J.) de 3, 5 heures. La raison du choix de cette période est donnée plus loin. Sur les relevés quotidiens de pompage, nous dénombrons, pour chaque machine, et pour le mois :

- tous les quarts de J. ne contenant aucun démarrage ;
- tous les quarts de J. contenant un démarrage, etc..

Dans le mois, aucune pompe n'a démarré plus de trois fois dans un quart de J. En totalisant respectivement les quarts de J. à 0, 1, 2 et 3 démarrages, nous établissons l'histogramme des démarrages.

Nous donnons en exemple, (fig. 1) les graphiques des pompes n^{OS} 1, 9, 11. Nous remarquons immédiatement la prédominance des quarts de J. à 0 et 1 démarrage sur les autres classes (2 et 3).

Hypothèses - Les demandes, pour chaque pompe, arrivent au hasard, au cours du temps, avec les conditions suivantes :

1/ le nombre des demandes apparues dans un intervalle de temps quelconque est indépendant du nombre des demandes déjà survenues au début de cet intervalle (homogénéité dans le temps).

2/ dans un intervalle de temps très petit Δt la probabilité que plus d'une demande survienne est négligeable.

Dans l'intervalle de temps Δt la probabilité élémentaire est posée égale à : $\lambda \Delta t$, : constante du trafic des demandes.

D'une manière plus précise, on démontre que λ est le nombre moyen de demandes par unité de temps.

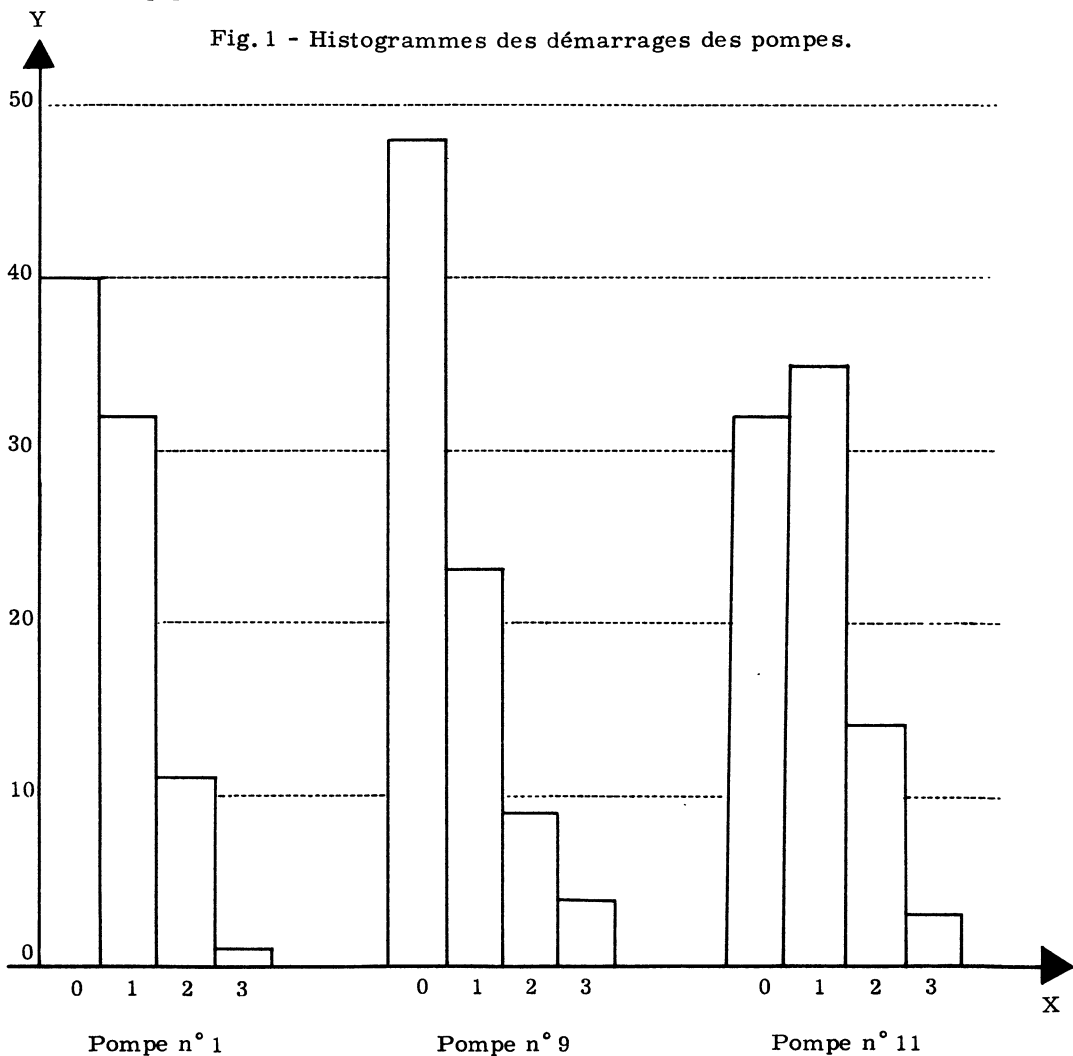
La loi des demandes, ainsi posée, constitue un processus simple de Poisson.

On sait que, pour un processus simple de Poisson, la probabilité que surviennent i demandes dans un intervalle de temps t est :

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} \exp(-\lambda t) \quad (\text{Formule 1})$$

λ : nombre moyen des demandes par unité de temps.

Nous choisissons pour la durée t , le quart de J. (3,5 h.). Le choix de ce laps de temps peut maintenant être justifié. Nous avons pris antérieurement une période de 2 heures. Mais dans ce cas, les classes de 2 et 3 démarrages n'étaient représentées par aucune pompe. Nous ne disposions que de périodes contenant soit aucun, soit un démarrage au plus, ce qui était insuffisant. Ce fait signifie qu'en regard de la durée totale observée, le mois, la période de deux heures est encore trop petite.



X : Nombre de démarrages par quart de J. (3,54)

Y : Nombre de quarts de J. ou à 1, etc. démarrages.

Inversement, une période beaucoup plus longue eût risqué de faire disparaître les classes 0 et peut-être 1. Il faut donc choisir, avec un certain arbitraire, une période la plus courte possible qui ne fasse pas disparaître les classes supérieures 2, 3, etc.

Calcul de λ - Rappelons que λ est le nombre moyen théorique des demandes par unité de temps. Il nous reste à trouver une valeur numérique à λ , à partir de nos données expérimentales.

Pour une loi de Poisson, la meilleure estimation de son paramètre λ est le nombre moyen observé des demandes par quart de J. Autrement dit, la meilleure estimation de la moyenne théorique λ est la moyenne observée.

Exemple : Pompe n° 1.

Nombre total d'observations (c'est-à-dire de quarts de J.) :

$$40 + 32 + 11 + 1 = 84.$$

Nombre total de demandes : $40 \times 0 + 32 \times 1 + 11 \times 2 + 1 \times 3 = 57$.

d'où
$$\lambda = \frac{57}{84} = 0,68 \text{ demande par quart de J.}$$

Inversement : la durée moyenne entre 2 demandes consécutives est :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{84}{57} = 1,47 \text{ q. de J., soit 5,16 heures.}$$

Connaissant λ , nous pouvons maintenant comparer l'histogramme des demandes à la courbe théorique représentative de la loi de Poisson.

Test du χ^2 - Nous traiterons en exemple la pompe n° 1.

Nous dressons un tableau dans les colonnes duquel figurent les quantités suivantes, citées dans l'ordre :

- i = nombre de demandes par quart de J.
- f_i = fréquence absolue observée ou nombre des quarts de J. soit à 0, soit à 1, etc. demandes.
- p_i = probabilité calculée d'après la formule 1.
- np_i = fréquence absolue théorique : nombre de quarts de J. à 0, ou à 1, etc. demandes que l'on devrait obtenir si les demandes suivaient la loi de Poisson.
- $f_i - np_i$ = écart absolu entre les deux valeurs, théorique et observée de la fréquence absolue.

Tableau (Pompe n° 1)

i	f_i	p_i	np_i	$f_i - np_i$	$(f_i - np_i)^2$	$\frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$
0	40	0,507	42,6	2,6	6,76	0,159
1	32	0,344	28,9	3,1	9,61	0,333
2	11	0,117	9,8	1,2	1,44	0,147
3	1	0,027	2,3	1,3	1,69	0,735

Les valeurs de la dernière colonne : $\frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$ sont additionnées. Leur somme est désignée par χ_d^2 . Pour notre tableau (pompe n° 1) $\chi_d^2 = 1,374$.

d est appelé nombre de degrés de liberté. Pour évaluer d, on applique la règle suivante : on compte le nombre de classes 0, 1, 2, etc. Dans le cas de la pompe n° 1, nous trouvons 4 classes : 0, 1, 2, et 3. Nous retranchons à ce nombre :

- d'abord le nombre de liaisons entre ces classes soit 1 ;
- puis le nombre des paramètres appartenant à la loi théorique, qui ont été estimés d'après les données expérimentales.

La loi de Poisson, introduite dans notre problème, ne possède qu'un seul paramètre : λ qu'il faut estimer.

Donc ce nombre de degrés de liberté est (pour la pompe n° 1) :

$$d = 4 - 1 - 1 = 2.$$

Ainsi : $\chi_2^2 = 1,374$. Pour d = 2 degrés de liberté, la table donne : p = 50 % pour $\chi_2^2 = 1,386$; la valeur obtenue $\chi_2^2 = 1,374$ est très proche de 1,386. L'ajustement de l'arrivée des demandes, pour la pompe n° 1 est donc bon.

Le même travail est à faire pour les autres pompes.

Nous en donnons les pourcentages correspondants :

Loi des demandes	Pompe n°	1	2	3	7	8	9	10	11	12	13	18
	p %	50	1	60	70	40	18	40	55	15	70	70

Sont exclues du calcul de l'ajustement les pompes 4, 5 et 6 qui travaillent trop peu et ne peuvent fournir que les classes 0 et 1 démarrage par quart de J.

2/ Loi des durées de pompage.

Données : histogramme, pour chaque pompage, des durées de pompage : nombre observé des pompages durant 1, 2, 3, etc. demi-heures en fonction de cette durée. Nous donnons, en exemple, les graphiques des pompes n°s 1, 9, 11. (fig. 2).

Hypothèses - Les hypothèses (homogénéité dans le temps, probabilité élémentaire) concernant les arrivées des demandes sont reprises pour les durées de pompage. Un pompage qui s'effectue depuis une époque antérieure jusqu'à l'instant d'observation t a une probabilité $\mu \Delta t$ de s'interrompre dans l'intervalle de temps Δt qui suit immédiatement l'instant t.

μ représente la fraction de pompage effectuée dans la période considérée (quart de J.). $\frac{1}{\mu}$ est la durée moyenne de pompage.

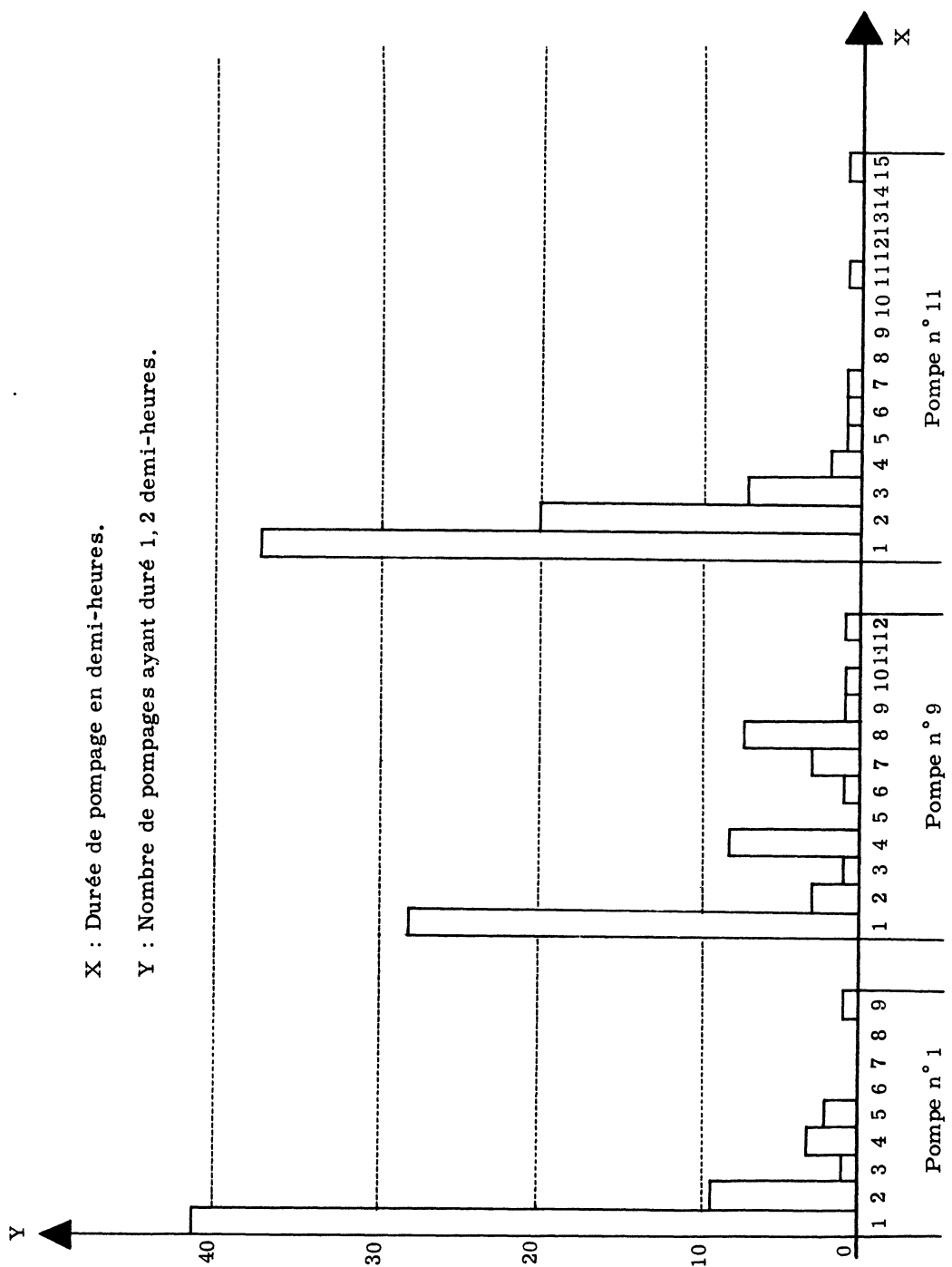
D'après ces hypothèses, il s'ensuit que la loi de durée de pompage, c'est-à-dire la probabilité qu'a un pompage de durer un temps t est la fonction :

$$\mu e^{-\mu t} \quad (\text{Formule 2})$$

c'est-à-dire une loi exponentielle.

L'ajustement consiste à comparer l'histogramme des durées à la courbe théorique $\mu e^{-\mu t}$. Sur le graphique d'une pompe, le temps t ne varie pas d'une façon continue, mais suivant les multiples successifs de la demi-heure.

Fig. 2 - Histogrammes des durées de pompage.



Test du χ^2 - Nous reprenons pour exemple la pompe n° 1. Nous dressons le tableau dans lequel figurent :

- D : durée, en demi-heures, du pompage D = 1, 2, 3, ...
 f_0 : nombre des pompages ayant duré 1, 2, 3, ... demi-heures ;
 p : probabilité élémentaire de la durée de pompage :

$$p dt = \mu e^{-\mu t} dt$$

- np : nombre de pompages à 1, 2, 3, ... demi-heures si les durées suivaient la loi exponentielle ;
 f - np : écart entre les valeurs observée et théorique.

Tableau (Pompe n° 1)

D	f_0	p	np	f - np	(f - np) ²	$\frac{(f - np)^2}{np}$
1	41	0,332	18,9	22,1	484	25,600
2	9	0,180	10,3	1,3	1,69	0,164
3	1	0,097	5,5	4,5	20,25	3,681
4						
5						
6	6	0,112	6,4	0,4	0,16	0,025
7						
8						
9						
					χ^2	29,470

Remarque - Dans le test du χ^2 , les valeurs de np inférieures à 5 sont à exclure. On regroupe donc les classes (dans le tableau, pour D = 4 à 9) afin que la valeur de np correspondante soit supérieure à 5. Cette dernière 6,4 par exemple, est la somme de toutes les valeurs de np qui étaient séparément inférieures à 5.

Les nombres de la dernière colonne sont additionnés. Leur somme est χ^2 , soit ici : 29,470. Nombre de degrés de liberté : d = 4 - 1 - 1 = 2. La table donne pour d = 2 degrés de liberté. p = 0,1 % pour $\chi^2 = 13,815$. Le pourcentage cherché est nettement plus petit que 0,1 %.

Notre corps d'hypothèses serait donc à rejeter, mais en gardant l'hypothèse que les durées de pompages suivent la loi exponentielle, nos conclusions seront plus pessimistes que dans le cas réel. En fait, si nous avons actuellement à refaire l'étude, nous essaierions probablement un ajustement meilleur, par exemple une loi Gamma.

Calcul des divers éléments de la file d'attente.

Rappelons les conditions initiales : les demandes arrivent au hasard, indépendamment les unes des autres et leur répartition est homogène dans le temps (loi de Poisson) ; les durées de pompage seront supposées obéir toutes à la loi exponentielle.

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les demandes qui ne peuvent être satisfaites immédiatement ne renoncent pas et forment une file d'attente. Elles seront servies dans l'ordre de leur arrivée.

Nous avons à utiliser les quantités suivantes :

- λ : nombre moyen théorique de demandes par période (quart de J.) ou :

- $\frac{1}{\lambda}$: durée moyenne entre deux demandes consécutives ;
 $\frac{1}{\mu}$: durée moyenne de pompage ;
 $u = \frac{\lambda}{\mu}$: pourcentage en temps de l'utilisation de la pompe (mois de janvier).

Nous introduisons alors pour chaque pompe les grandeurs suivantes :

- k : coefficient d'accroissement de la quantité totale d'huile pompée ;
 π_0 : probabilité de n'avoir aucune demande ;
 π_1 : probabilité d'avoir présente 1 demande ;
 π_2 : probabilité d'avoir présentes 2 demandes (l'une des deux fait nécessairement la queue) ;
 P_1 : probabilité que la pompe soit occupée (qu'il y ait ou non file d'attente) ;
 P_2 : probabilité qu'il y ait file d'attente (quel que soit le nombre de demandes qui attendent) ;
 N : nombre moyen de demandes qui attendraient (longueur moyenne à priori de la queue, sans préjuger de l'existence de cette dernière) ;
 δ : durée moyenne d'attente, à priori.

Pour δ nous distinguerons deux cas :

1/ l'augmentation du tonnage global d'huile pompée est supposée due uniquement à l'accroissement de la fréquence moyenne des arrivées des demandes la durée moyenne des pompages restant inchangée. Ce cas est appelé à λ constant.

2/ l'augmentation du tonnage global est supposée due uniquement à l'accroissement de la durée moyenne de pompage, la fréquence moyenne des arrivées restant inchangée.

Cas à μ constant. Nous adjoignons à cette liste deux grandeurs, homologues des deux dernières citées (N et δ), soit :

- N' : nombre moyen des demandes qui attendent, sachant qu'il y a une queue ;
 δ' : durée moyenne d'attente pour une demande qui fait la queue.

Nous avons aussi à considérer δ'_λ et δ'_μ .

On démontre facilement les résultats suivants :

Probabilité de n'avoir aucune demande	$\pi_0 = 1 - ku$
Probabilité d'avoir présente 1 demande	$\pi_1 = ku (1 - ku)$
Probabilité d'avoir présentes 2 demandes	$\pi_2 = k^2 u^2 (1 - ku)$
Probabilité d'occupation de la pompe	$P_1 = ku$
Probabilité d'avoir une file d'attente	$P_2 = (ku)^2$
Longueur moyenne à priori de la file d'attente.	$N = \frac{(ku)^2}{1 - ku}$
Durée moyenne d'attente, à priori	$\left\{ \begin{array}{l} \delta'_\mu = \frac{N}{\mu} \\ \delta'_\lambda = \frac{k \times N}{\lambda} \end{array} \right.$
Nombre moyen de demandes qui font la queue	$N' = \frac{1}{1 - ku}$
Durée moyenne d'attente dans la queue	$\left\{ \begin{array}{l} \delta'_\mu = \frac{1}{1 - ku'} \cdot \frac{1}{\mu} \\ \delta'_\lambda = \frac{1}{1 - ku} \cdot \frac{1}{\lambda} \end{array} \right.$

Les pompes n^{OS} 1, 9, 11, sont données en exemple.

Tableau préliminaire I (mois de janvier 1957)

	POMPES		
	1	9	11
$\frac{1}{\lambda}$: durée moyenne entre deux demandes (en demi-heures)	10,3	11,1	8,1
$\frac{1}{\mu}$: durée moyenne de pompage (en demi-h.)	1,6	3,4	2,1
u : taux d'utilisation de la pompe	0,158	0,305	0,255

Remarques

1/ Ces nombres s'obtiennent simplement d'après les histogrammes des arrivées des demandes et des durées de pompage (en tenant compte des diverses unités de temps employées : quart de J. pour les demandes ; demi-heure pour les durées).

2/ Nous voyons que les pompes n^{OS} 1, 9 et 11 sont respectivement chargées (en janvier 1957) à 16 %, 31 % et 26 % du temps.

Tableaux des probabilités - Les variations des diverses grandeurs : $\pi_0, \pi_1, \pi_2, P_1, P_2, \dots$ sont établies en fonction du coefficient d'accroissement global de la quantité d'huile pompée : k

Nous avons prolongé les valeurs de k au-delà du seuil pratique permis. En effet, si nous acceptons une probabilité de 10 % d'avoir une queue ($P_2 = 0,10$), nous voyons sur les tableaux que, à l'intérieur de nos hypothèses :

- la pompe n° 1 peut supporter un accroissement de charge de l'ordre de 100 % (k = 2) ;
- la pompe n° 9 ne peut supporter aucun accroissement de charge ;
- la pompe n° 11 pourrait subir une augmentation légèrement inférieure à 50 % (k < 1,5).

III - CONCLUSION.

Nous avons ramené le phénomène réel à un modèle mathématique de file d'attente dont la solution est simple et assez brève.

Cette simplicité voulue est due à nos hypothèses sur les arrivées des demandes et des durées de pompages.

Si dans le phénomène étudié, les demandes et (ou) les durées ne suivent pas la loi théorique (Poisson) découlant de ces hypothèses, mais si nous gardons la solution présentée dans ce rapport, nous aboutissons à des valeurs numériques moins favorables qu'elles ne le sont en réalité. Par exemple, la valeur admissible du coefficient k liée à une probabilité de 10 % d'avoir une queue sera pratiquement plus grande que celle qui est lue dans nos tableaux. Réciproquement, à un accroissement global donné pour une pompe, la probabilité réelle d'avoir une queue sera plus faible que celle qui a été calculée par nos formules.

Nous pensons ainsi avoir exposé une méthode pratique, n'exigeant que peu de moyens et constituant un point de départ intéressant pour les solutions à des problèmes analogues.

Pompe n° 1

k	π_0	π_1	π_2	P_1	P_2	N	δ_μ	δ_λ	N'	δ'_μ	δ'_λ
1	0,84	0,13	0,02	0,16	0,03	0	0,1	0,1	1,2	1,9	1,9
1,5	0,76	0,18	0,04	0,24	0,06	0,1	0,1	0,2	1,3	2,1	3,2
2	0,68	0,22	0,04	0,32	0,10	0,1	0,2	0,5	1,5	2,4	4,8
2,5	0,61	0,24	0,09	0,40	0,16	0,3	0,4	1,1	1,7	2,7	6,7
3	0,53	0,25	0,12	0,47	0,23	0,4	0,7	2,1	1,9	3,1	9,3
3,5	0,45	0,25	0,14	0,55	0,31	0,7	1,1	3,9	2,2	3,7	12,8
4	0,37	0,23	0,15	0,63	0,40	1,1	1,8	7,1	2,7	4,4	17,8

Nota : les durées d'attente δ_μ , δ_λ , δ'_μ , δ'_λ , sont exprimées en demi-heures.

Pompe n° 9

k	π_0	π_1	π_2	P_1	P_2	N	δ_μ	δ_λ	N'	δ'_μ	δ'_λ
1	0,69	0,21	0,06	0,31	0,09	0,1	0,4	0,4	1,5	4,9	4,9
1,5	0,54	0,25	0,12	0,46	0,21	0,4	1,3	1,9	1,8	6,2	9,3
2	0,39	0,24	0,15	0,61	0,37	1,0	3,2	6,4	2,6	8,7	17,3
2,5	0,24	0,18	0,14	0,76	0,58	2,4	8,3	20,6	4,2	14,2	35,6

Pompe n° 11

k	π_0	π_1	π_2	P_1	P_2	N	δ_μ	δ_λ	N'	δ'_μ	δ'_λ
1	0,75	0,19	0,05	0,26	0,07	0	0,2	0,2	1,3	2,8	2,8
1,5	0,62	0,24	0,09	0,38	0,13	0,2	0,5	0,8	1,6	3,4	5,0
2	0,49	0,25	0,13	0,51	0,26	0,5	1,1	2,2	2,0	4,3	8,5
2,5	0,36	0,23	0,15	0,64	0,41	1,1	2,4	5,8	2,8	5,8	14,2