

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. TORRENS-IBERN

## **Analyse factorielle des sables de moulage**

*Revue de statistique appliquée*, tome 6, n° 3 (1958), p. 93-114

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1958\\_\\_6\\_3\\_93\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_3_93_0)

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ANALYSE FACTORIELLE DES SABLES DE MOULAGE

par

J. TORRENS-IBERN

Ingénieur à l'Entreprise "Suner, S.A." de Sabadell (Barcelona)

Professeur de Statistique à l'École d'Ingénieurs Industriels de Barcelone

*Après avoir fait ses preuves dans les études psychologiques, l'Analyse Factorielle est de plus en plus employée dans l'étude de problèmes très variés où interviennent de nombreuses variables; c'est le cas dans l'industrie où de nombreux produits sont utilisés à cause des propriétés multiples dont ils jouissent; l'Analyse Factorielle est donc très appropriée à leur étude.*

*L'étude qui suit est une application des techniques de l'Analyse Factorielle à un problème industriel particulièrement intéressant, compte tenu de l'importance de la fonderie dans l'industrie métallurgique et mécanique. Les résultats en sont donnés après un exposé des principes essentiels des méthodes.*

*Cette étude a été présentée dans la séance inaugurale du Séminaire de Statistique Appliquée de l'École d'Ingénieurs Industriels et de l'Institut d'Economie de l'Entreprise de Barcelone, sous la présidence du sous-directeur et chef des études de l'École, M. FREIXA, devant un public très intéressé.*

## LES SABLES DE MOULAGE; LEURS PROPRIETES ET LEUR CONTROLE -

La qualité et l'aspect des pièces coulées dépendent dans une large mesure des sables de moulage employés. Ceux-ci sont essentiellement composés de petits grains de quartz, de 0,2 à 0,3 mm de grosseur, et d'argile, de 0,1 mm. Les premiers sont recouverts par une couche argileuse qui leur donne cohésion; l'argile gonfle par suite de l'humidité, de façon que le mélange devienne plus ou moins plastique.

Les propriétés fondamentales des sables de moulage sont très variées : plasticité, consistance, perméabilité aux gaz, réfractibilité, etc... Ces propriétés sont le résultat de l'opération appelée préparation du sable, laquelle a lieu dans des machines adéquates produisant son parfait mélange, son malaxage ou pétrissage et son aération par centrifugation. Le mélange doit être spongieux et homogène, libre de matières étrangères, notamment du calcium.

Pour l'achat et le mélange des sables destinés au moulage l'on s'appuyait jadis sur les appréciations empiriques des contremaîtres fondeurs et mouleurs, lesquels se rendaient compte des propriétés du sable en en prenant une poignée et la serrant entre leurs doigts. A présent la décision est prise à la suite du contrôle réalisé au laboratoire des principales caractéristiques physiques : perméabilité aux gaz, résistance à la compression et au cisaillement, proportion d'agglomérant, résistance au feu, teneur en eau, grosseur du grain, degré de serrage, etc...

Une partie de ces propriétés n'a besoin d'être contrôlée qu'au moment de l'achat du sable, pour se rendre compte immédiatement de ses qualités intrinsèques (granulométrie) tandis qu'il y a intérêt à déterminer les autres caractéristiques journalièrement après la préparation du sable et avant son emploi au moulage. Celles-ci sont principalement : la teneur en eau, le degré de serrage admis, la perméabilité aux gaz et la résistance à la compression et au cisaillement. Périodiquement, une ou plusieurs fois par jour, on prend des échantillons du sable préparé et on mesure ces caractéristiques à l'aide d'appareils appropriés.

#### I - ETUDE STATISTIQUE DES CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DES SABLES DE MOULAGE -

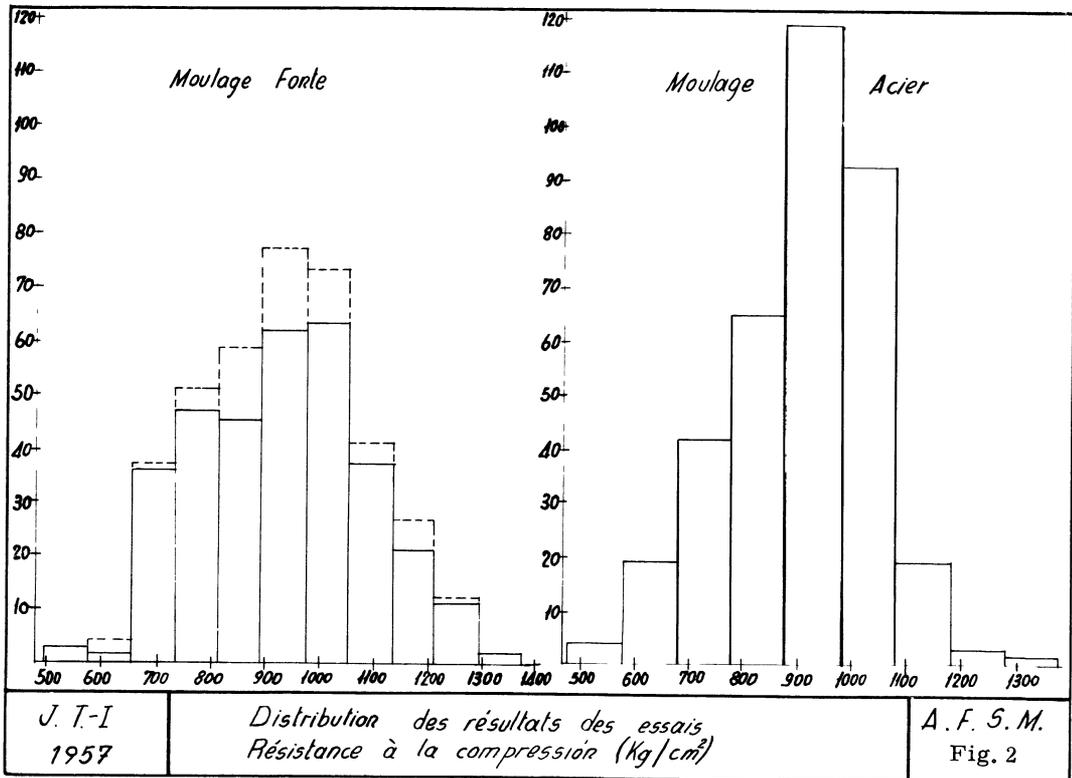
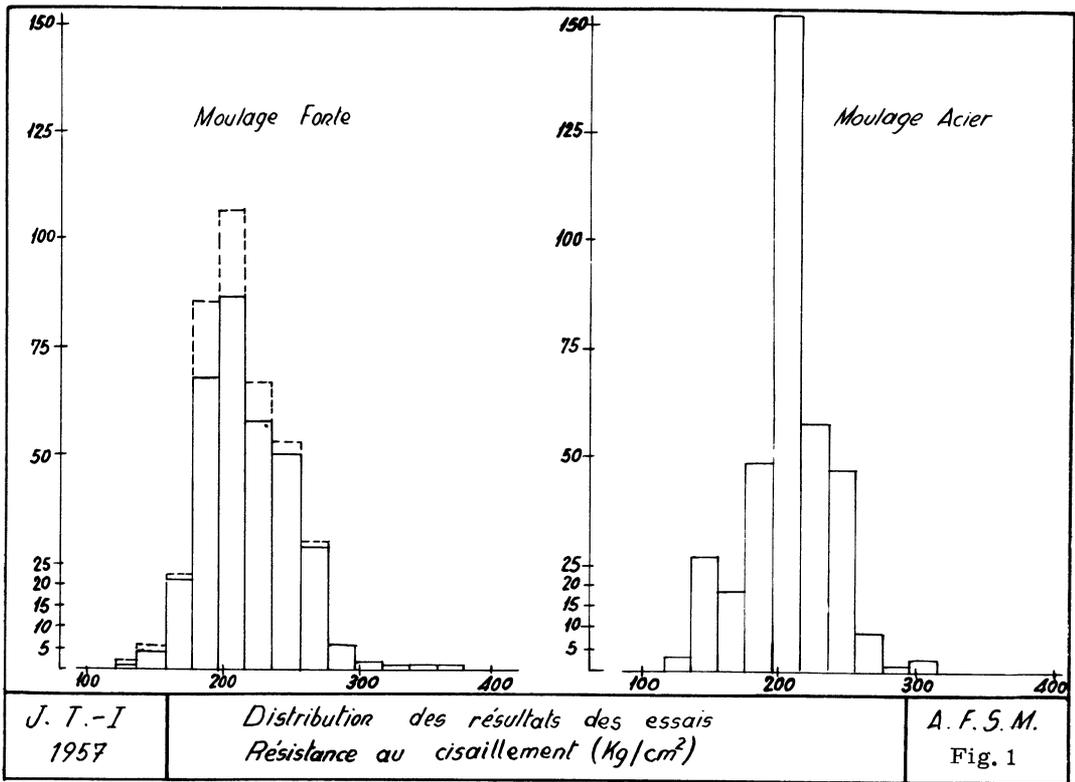
En partant des expériences du contrôle journalier des sables de moulage réalisées normalement dans une fonderie mixte, d'acier et de fonte, nous avons recueilli 749 résultats parmi lesquels 364 appartenaient à des sables destinés au moulage de l'acier et 385 à des sables pour le moulage de la fonte. Les différences constatées entre les sables destinés à chaque alliage sont dues à la différence de composition des deux mélanges, de façon qu'ils ne pourraient pas être considérés comme des échantillons appartenant à une même population statistique, même si les moyennes de certaines caractéristiques physiques des deux sables pouvaient n'être pas significativement différentes.

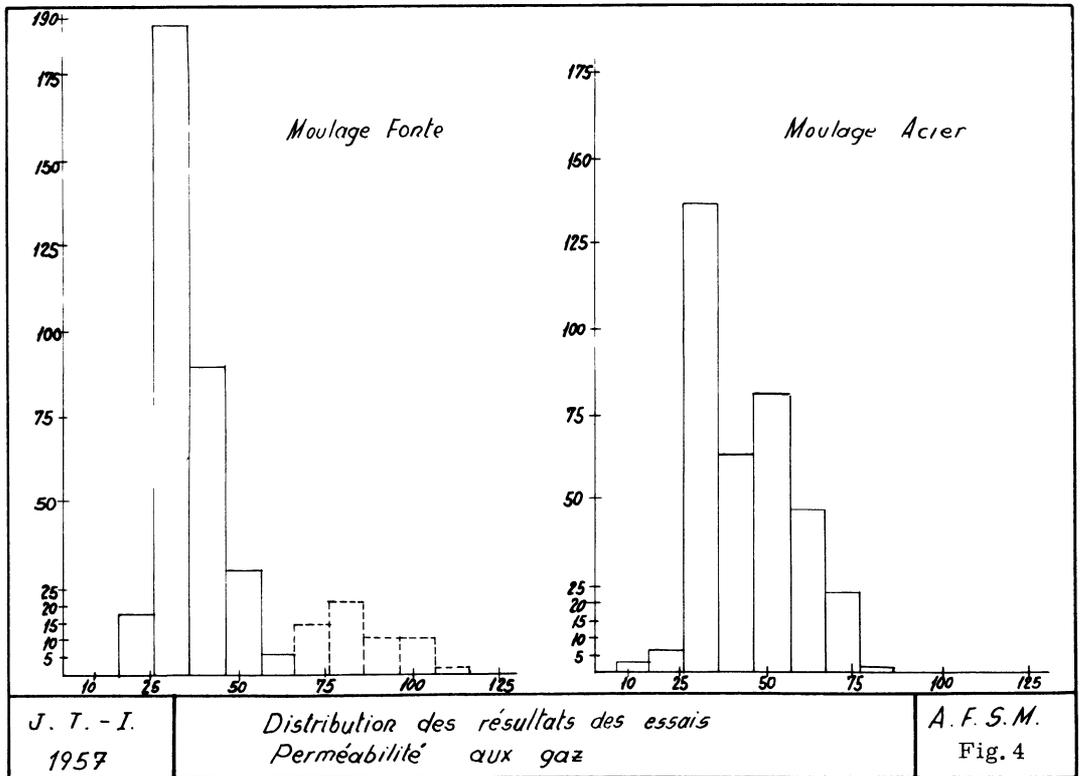
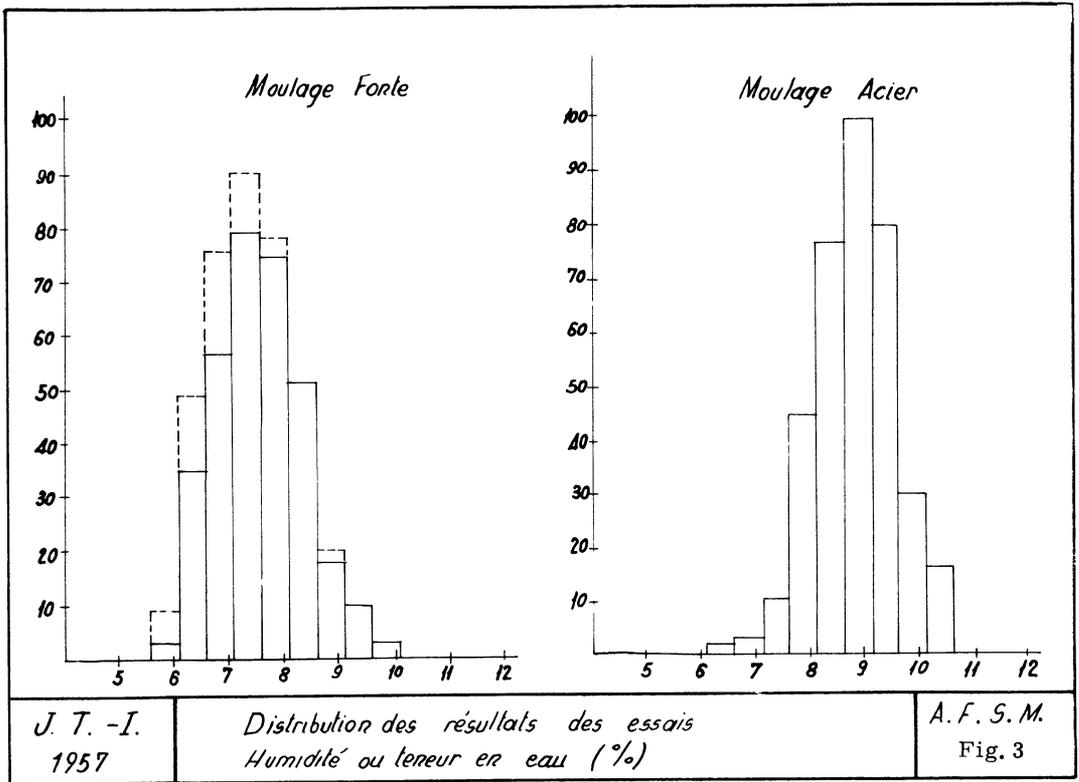
La totalité des expériences peut être résumée selon le tableau I.

Tableau I

Propriétés physiques	Sables pour le moulage de l'acier		Sables pour le moulage de la fonte	
	$m_1$	$\sigma$	$m_1$	$\sigma$
Résistance au cisaillement (Kg/cm <sup>2</sup> )	208,54	28,97	215,81	32,38
Résistance à la compression (Kg/cm <sup>2</sup> )	898,90	132,58	933,34	153,84
Teneur en eau (%)	8,82	0,654	7,50	0,806
Perméabilité aux gaz	42,80	12,72	40,77	19,38
Degré de serrage (%)	46,52	1,98	49,38	3,08

Avant de calculer les corrélations entre ces variables, nous avons tracé des histogrammes correspondants afin d'avoir une idée de leurs distributions sans besoin de longs calculs (Fig. 1 à 5). A la vue de ces histogrammes on peut admettre que les distributions considérées sont, en général, unimodales et qu'elles appartiennent à des populations sensiblement normales. Cependant, certaines caractéristiques sont assez éloignées de cette propriété, sans doute en raison





du manque d'homogénéité des sables acquis ou bien des insuffisances du mélange ou de la préparation. Cela se produit tout spécialement en ce qui concerne la perméabilité aux gaz, surtout dans les sables pour la fonte, dans lesquels on trouve deux modes, l'un pour les valeurs comprises entre 25,125 et 35,125 et l'autre pour les valeurs comprises entre 75,125 et 85,125. Le degré de serrage, par contre, se trouve distribué en un nombre très réduit des classes, lesquelles, correspondent aux mesures directement fournies par l'appareil ne peuvent pas être sous-divisées; ainsi, cette caractéristique doit être considérée comme peu précise pour notre propos, qui n'était autre que l'étude des rapports statistiques entre les diverses épreuves de contrôle des sables de moulage.

Nous avons calculé ensuite les corrélations mutuelles qui lient ces caractéristiques physiques des sables. Certaines, parmi elles, sont très élevées, comme l'on pouvait déjà prévoir, les essais de résistance au cisaillement et à la compression, notamment. Le tableau II donne des coefficients d'intercorrélation des propriétés physiques contrôlées pour les sables destinés au moulage de l'acier.

Tableau II

Sables pour le moulage de l'acier

Corrélations	Rés. comp.	Humidité	Perméab.	Serrage
Résistance cisaillement	0,777	-0,442	-0,332	0,000
Résistance compression		-0,457	-0,297	0,093
Humidité			0,629	0,081
Perméabilité aux gaz				0,019

Il faut remarquer que d'après les études faites par plusieurs expérimentateurs la liaison stochastique entre la teneur en eau (humidité) et la résistance à la compression n'est pas linéaire; la courbe de regression est d'abord ascendante et descend ensuite, présentant un maximum pour un certain degré d'humidité (Fig. 6)<sup>(1)</sup>. Les chiffres antérieurs, cependant, correspondent à un intervalle des valeurs de la teneur en eau pour lesquelles la résistance à la compression décroît lorsque l'humidité augmente, ce qui est confirmé par le signe du coefficient de corrélation.

Par contre, notre étude est en contradiction avec le graphique de la figure 6, en ce qui concerne la diminution de la perméabilité lorsque la teneur en eau croît, puisque nous avons trouvé une corrélation assez élevée et positive entre ces deux variables. Entre le degré de serrage et toutes les autres variables la corrélation est très petite ; elle peut être considérée comme nulle, compte tenu des fluctuations d'échantillonnage.

L'étude relative aux sables de moulage destinés à la fonte a permis de dresser le tableau III des coefficients de corrélation.

-----  
 (1) "La préparation des sables de moulage". Supplément au n°76 (Avril-Mai 1956) du "Journal d'Information techniques des Industries de la Fonderie".

Tableau III

## Sables pour le moulage de la fonte

Corrélations	Rés. comp.	Humidité	Perméab.	Serrage
Résistance au cisaillement	0,817	0,301	-0,057	0,130
Résistance à la compression		0,206	0,137	-0,088
Humidité			-0,257	-0,116
Perméabilité aux gaz				-0,111

Le manque d'homogénéité décelé au moyen de l'histogramme de la figure 4 dans les sables de moulage pour la fonte, objet de cette étude, recommande de séparer pour une analyse plus précise de ces sables, les observations dans lesquelles les chiffres de la perméabilité sont supérieurs à 65,125. Une fois éliminées ces données le nombre des observations se réduit à 335, mais l'ensemble est plus homogène. Dans les figures 1 à 4 (moitié gauche) sont représentés ces effectifs plus réduits au moyen des lignes à trait continu, celles à trait interrompu étant la représentation des effectifs complets; les tableaux I et III subsistent alors les modifications que voici (Tableau IV) :

Tableau IV

## Sables pour le moulage de la fonte

Propriétés physiques	$m_1$	$\sigma$	Corrélation avec permé.
Résistance cisaillement	217,85	33,75	0,087
Résistance compression	932,58	198,00	0,129
Teneur en eau	7,61	0,79	0,049
Perméabilité aux gaz	34,54	7,92	-----

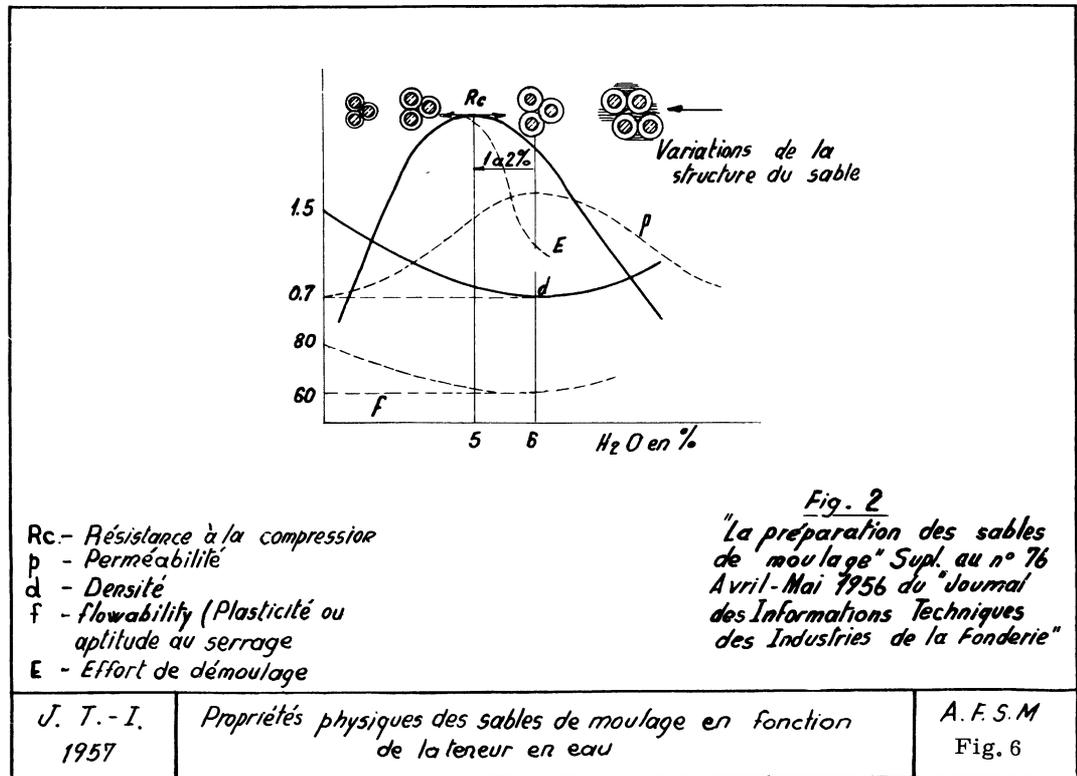
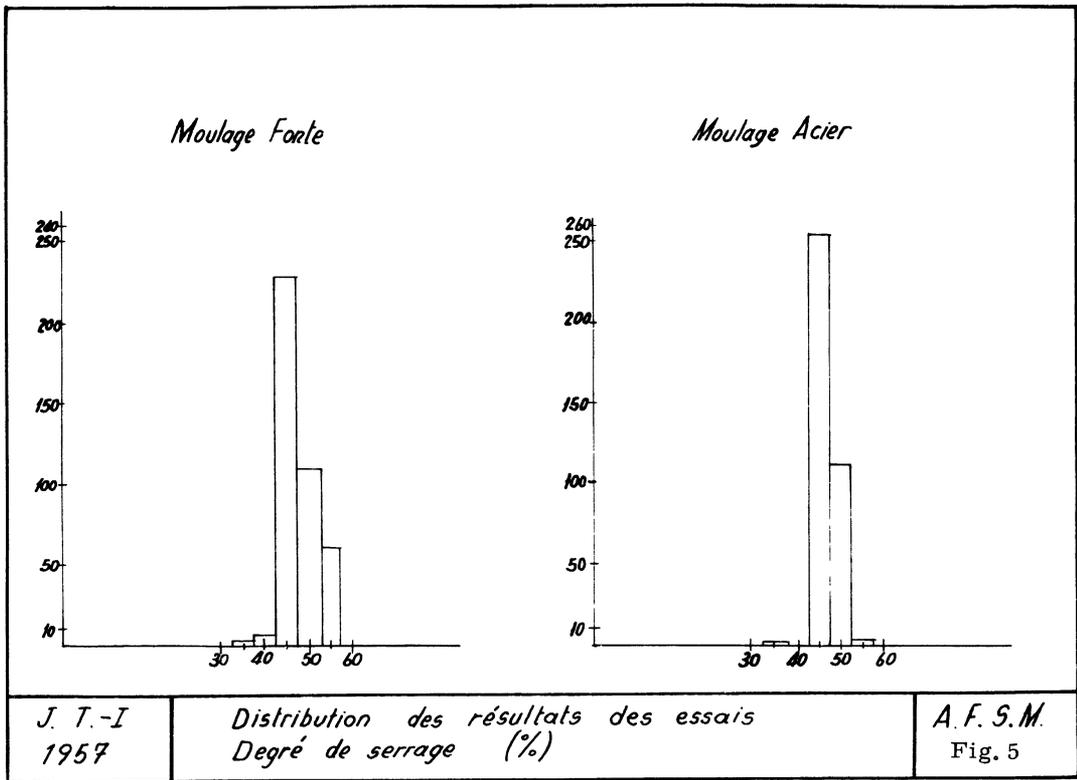
Cette fois nous n'avons pas calculé les valeurs relatives au degré de serrage à cause de leur signification si réduite, ce qui est évident si l'on remarque la petite dispersion de leurs valeurs et les corrélations presque nulles qui les lient avec toutes les autres propriétés physiques.

L'ensemble des coefficients de corrélation totaux pour les sables de moulage de la fonte est donc moins instructif, du point de vue statistique, que celui des sables de moulage pour l'acier, puisqu'il y a beaucoup de coefficients de corrélation qui ne sont pas significativement différents de 0. L'étude factorielle que nous entreprendrons sera limitée, par conséquent, aux sables de moulage destinés aux pièces d'acier.

## 2 - ANALYSE FACTORIELLE : ORIGINE ET IDEES GENERALES -

En quoi consiste l'analyse factorielle? Pour en comprendre mieux l'essence, il sera bon d'en exposer l'origine.

Si nous laissons de côté certains essais possibles non systématiques de description factorielle entrepris par plusieurs statisticiens, la vraie paternité de



ces méthodes doit être attribuée à SPEARMAN, psychologue anglais du début de ce siècle<sup>(1)</sup>. Se rendant compte de la corrélation positive élevée existante entre les résultats des tests psychologiques et psychotechniques appliqués dans les épreuves d'orientation professionnelle, il a établi la théorie de l'existence d'un certain facteur qui serait la cause de ces corrélations. Ce facteur, appelé par SPEARMAN facteur général, serait variable d'un individu à un autre et caractéristique de chacun. L'analyse factorielle a comme objet son estimation au moyen des corrélations constatées entre les résultats des tests.

Voyons d'abord un peu comment se présente le problème du point de vue du psychotechnicien. Dans l'étude des individus par rapport à leurs activités professionnelles, il semble que le succès ou l'échec de celles-ci puissent provenir de la possession ou non de certaines qualités. Lorsqu'on soumet les candidats à un poste à des tests psychotechniques, ce qui nous intéresse réellement ce n'est pas de connaître les points obtenus dans les tests, mais de connaître ce que la réalisation des tests signifie par rapport aux individus examinés et au métier choisi. D'une part chaque test ne donne pas la mesure juste d'une aptitude professionnelle à son état pur; d'autre part nous ne connaissons pas exactement les aptitudes propres à chaque métier. Un test, en outre, s'il est bon pour détecter une certaine aptitude, étendra aussi son pouvoir de détection sur une surface plus ou moins grande correspondant à des aptitudes voisines; il ne sera donc pas étonnant qu'il existe des corrélations élevées entre des tests s'adressant à des aptitudes voisines. Cette double imprécision de la signification de chaque test et des aptitudes reconnues nécessaires pour exercer efficacement un métier, permet de comprendre que l'on puisse attribuer à certains facteurs individuels ce qui produit la coïncidence des deux schémas. Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, que ces facteurs aient un vrai caractère objectif; SPEARMAN, par exemple, essayait de définir son facteur g d'une batterie de tests d'une façon purement mathématique afin que l'on ne soit pas tenté de l'identifier à l'intelligence. Mais, il n'y a pas de doute que les cas les plus intéressants, au point de vue des applications pratiques industrielles, seront ceux dans lesquels les facteurs auront une interprétation physique ou, tout au moins objective.

### 3 - LES PROBLEMES DE L'ANALYSE FACTORIELLE; LEUR FORMULATION MATHEMATIQUE -

Le problème qu'il s'agit de résoudre peut être formulé schématiquement comme une tentative de décomposition et de transformation d'un groupe de variables en un autre groupe plus réduit, dont la réalité physique peut être moins bien définie mais qui, en revanche, a une signification transcendante supérieure. Dans sa forme la plus générale on peut proposer le système d'équations suivant :

$$x_j = \varphi_j(f_1, f_2, \dots, f_m, u_j) \quad (3.1)$$

dans lequel  $x_j$  est une des variables mesurées expérimentalement et  $f_1, f_2, \dots, f_m, u_j$ , les facteurs que l'on considère comme agissant dans la réalisation du phénomène étudié, bien que, en général, ils ne puissent être calculés ni mesurés directement. La forme la plus simple que l'on peut attribuer aux équations du système précédent est la forme linéaire, c'est-à-dire que :

$$x_j = a_{j_1} f_1 + a_{j_2} f_2 + \dots + a_{j_m} f_m + a_j u_j \quad (3.2)$$

-----  
 (1) SPEARMAN (C.) "General Intelligence objectively determined and measured". "Amer. Journ. of Psychology", 1904, v. 15, p. 201-293.

Du point de vue de la théorie mathématique, cette limitation à la linéarité peut paraître très restrictive, mais dans la pratique elle ne l'est vraiment pas, puisque la majorité des phénomènes peuvent être étudiés, au moins en première approximation, comme résultant d'une liaison linéaire de facteurs hypothétiques, ce qui facilite considérablement les calculs, sans rien ôter à l'analyse de son intérêt pratique.

Si les variables  $x_j$  et les facteurs  $f_i$  sont centrés et réduits (c'est-à-dire ont une moyenne nulle et un écart type unité), la valeur moyenne du carré des variables  $x$  sera :

$$1 = \sigma_{x_j}^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \dots + a_{jm}^2 + a_j^2 + 2(a_{j1}a_{j2}r_{f_1f_2} + \dots + a_{jm}a_j r_{f_m u_j}) \quad (3.3)$$

Dans le cas où tous les facteurs seraient orthogonaux (sans corrélation entre eux) la parenthèse s'annule et il reste seule la somme des carrés des coefficients  $a_{ji}$ ,  $a_j$ . Le dernier carré,  $a_j^2$ , constitue l'unicité et la somme de tous les autres la communauté de chacune des variables expérimentales :

$$h_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \dots + a_{jm}^2 \quad (3.4.)$$

Le produit de chacune des équations antérieures par les facteurs hypothétiques considérés donne un autre système d'équations, duquel on calcule aussi les valeurs moyennes :

$$r_{x_j f_i} = a_{j1} r_{f_1 f_i} + a_{j2} r_{f_2 f_i} + \dots + a_{ji} + \dots + a_{jm} r_{f_m f_i} \quad (3.5)$$

Cette équation se réduit à :

$$r_{x_j f_i} = a_{ji} \quad (3.5')$$

lorsque les facteurs sont orthogonaux.

Si maintenant nous calculons les valeurs moyennes des produits des équations du système, prises deux par deux, nous aurons :

$$r'_{jk} = a_{j1} a_{k1} + a_{j2} a_{k2} + \dots + a_{jm} a_{km} + (a_{j1} a_{k2} + a_{j2} a_{k1}) r_{f_1 f_2} + \dots + a_{j1} a_k r_{f_1 u_k} + \dots + a_{km} a_j r_{f_m u_j} + a_j a_k r_{u_j u_k} \quad (3.6)$$

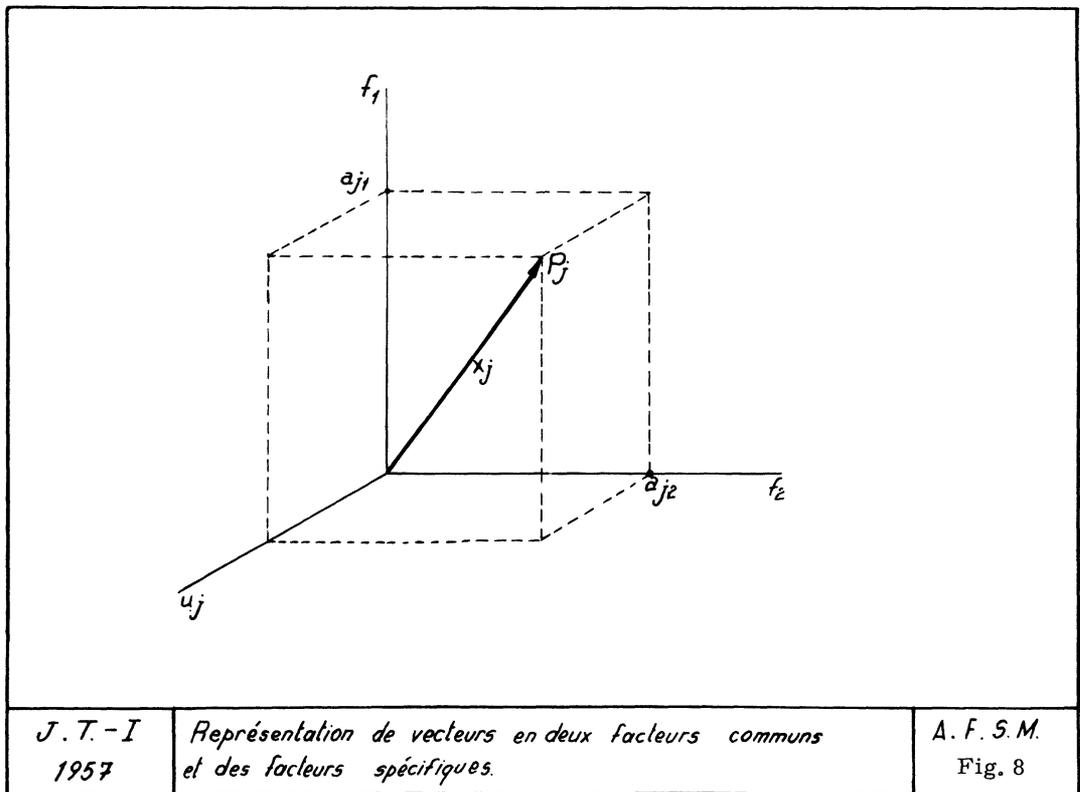
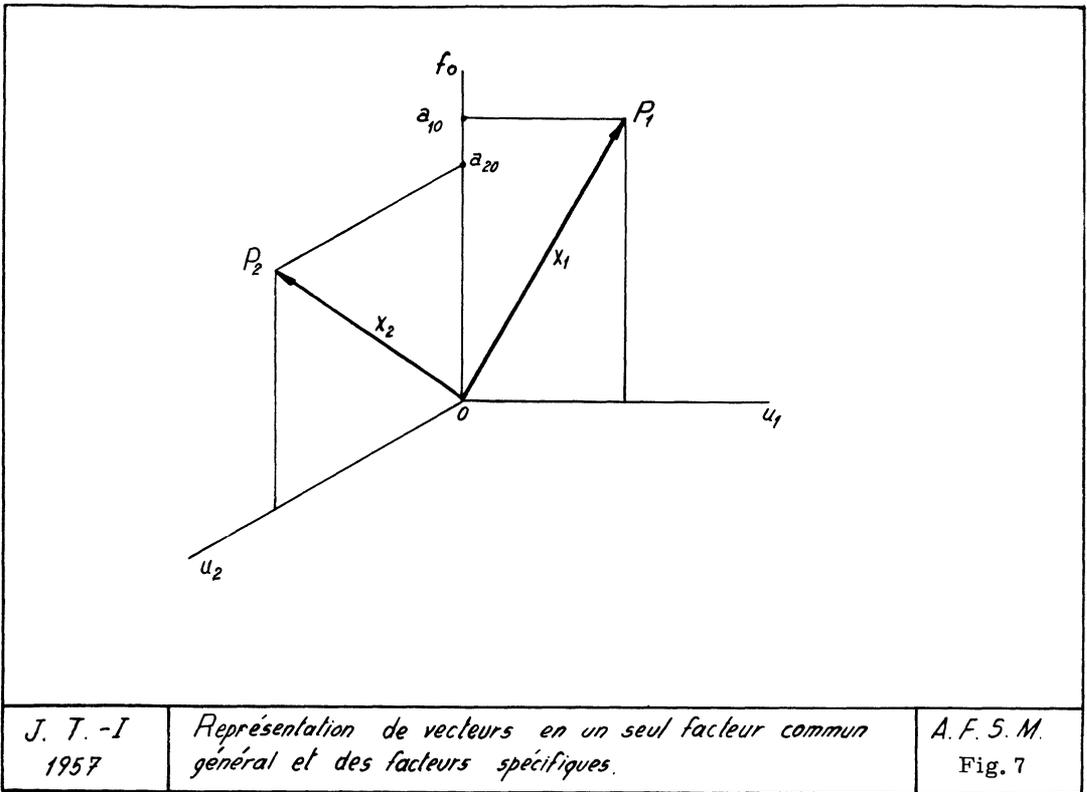
Dans chacune de ces équations les termes affectés par un coefficient de corrélation peuvent aussi être nuls, si les facteurs correspondants sont considérés comme sans corrélation. Alors :

$$r'_{jk} = a_{j1} a_{k1} + a_{j2} a_{k2} + \dots + a_{jm} a_{km} \quad (3.7)$$

L'on peut comparer les coefficients de corrélation théoriques  $r'_{jk}$  obtenus au moyen de ces équations et les coefficients expérimentaux  $r_{jk}$  déterminés antérieurement. Par différence on trouve les corrélations résiduelles :

$$\overline{r}_{jk} = r'_{jk} - r_{jk} \quad (3.8)$$

L'analyse factorielle d'un ensemble de variables peut être envisagée aussi comme une décomposition et transformation vectorielle dans un espace multidimensionnel. La représentation des variables expérimentales étant faite dans cet espace, avec autant de dimensions que de variables, l'on passe à un autre espace, d'un plus petit nombre de dimensions, en projetant les points du premier dans le second. Le premier espace est celui des variables ou tests, tandis que le second est l'espace factoriel. Pour faciliter la compréhension de cette façon de procéder nous supposons que l'ensemble des variables considérées peut être résumé en un seul facteur commun et un facteur spécifique pour chaque variable,



tous sans corrélation mutuelle. A chaque variable correspondra un plan, déterminé par l'axe du facteur commun  $f_0$  (Fig. 7) et l'axe du facteur spécifique  $u_j$ . L'ensemble des variables sera constitué par tous ces plans, qui ont un axe commun, mais qui sont orthogonaux parce que les axes des facteurs spécifiques sont perpendiculaires entre eux. La figure 7 représente deux variables qui ont un facteur commun; elles se décomposent en deux facteurs,  $f_0$  et  $u_j$ , perpendiculaires entre eux et avec tous les autres.

On pourra encore représenter dans notre espace normal à trois dimensions, le cas d'une variable qui se décompose en deux facteurs communs et un facteur spécifique (Fig. 8), mais chaque variable occuperait tout l'espace. Le plan  $f_1 f_2$  serait commun à toutes les variables et les troisièmes axes, correspondants aux facteurs spécifiques, seraient orthogonaux entre eux et sortiraient de l'espace représenté dans la figure pour toutes les variables autres que  $x_j$ .

Le même problème de l'analyse factorielle peut être considéré d'un autre point de vue mathématique, tout aussi intéressant: celui de l'algèbre matricielle. Au moyen de cette notation le système d'équations (3.7) s'exprime: (3,9)

$$\Delta = \begin{vmatrix} h^2_1 & r'_{12} & r'_{13} & \dots & r'_{1n} \\ r'_{21} & h^2_2 & r'_{23} & \dots & r'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r'_{n1} & r'_{n2} & r'_{n3} & \dots & h^2_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Considérons, d'autre part, la matrice de l'ensemble de toutes les variables:

$$\|x_{ij}\| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nN} \end{vmatrix} \text{ et sa transposée } \|x_{ji}\| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} \end{vmatrix}$$

Multiplions ces deux matrices entre elles et divisons le produit par N:

$$\frac{\|x_{ij}\| \times \|x_{ji}\|}{N} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \|r_{ij}\| \quad (3.10)$$

On démontre que les coordonnées de n points contenus dans un espace linéaire à m dimensions (autrement dit, lorsque les vecteurs de ces n points peuvent être décrits analytiquement en fonction linéaire de m vecteurs parallèles aux axes de l'espace considéré) constituent une matrice de rang m<sup>(1)</sup> et que son rang reste le même quand elle est multipliée par sa matrice transposée.

Si l'on compare les matrices des corrélations expérimentales  $r_{jk}$  avec celles des corrélations que nous avons appelées théoriques  $r'_{jk}$ , on voit que les valeurs expérimentales  $x_{jk}$  peuvent s'exprimer en fonction linéaire de m + n facteurs, tandis que les valeurs théoriques  $x'_{jk}$  que l'on obtiendrait à partir des corrélations  $r'_{jk}$  s'expriment en fonction linéaire de m facteurs seulement. Ainsi,

(1) Une matrice est appelée de rang m lorsque tous les mineurs d'ordre m + 1 sont nuls, mais pas ceux d'ordre m.

les matrices  $||x_{ij}||$  et  $||r_{ij}||$  sont non singulières c'est-à-dire différentes de 0, et les matrices  $||x'_{ij}||$  et  $||r'_{ij}||$  sont de rang m, c'est-à-dire que dans celles-ci tous les mineurs d'ordre m + 1 sont nuls.

Ces considérations permettent de comprendre comment l'on peut déterminer le nombre des facteurs communs d'un groupe quelconque de variables données. Il suffit, tout au moins en théorie, de construire la matrice des corrélations théoriques, sans oublier les communautés correspondantes dans la diagonale principale, et d'étudier quel est son rang; le nombre des facteurs communs est, en effet, égal au chiffre de ce rang. Pratiquement, à la place de la matrice des corrélations théoriques on prend la matrice des corrélations expérimentales et l'on détermine les communautés de façon que le rang de la matrice résultante soit minimum.

#### 4 - DIVERSES METHODES D'ANALYSE FACTORIELLE : THEORIE DES DEUX FACTEURS; ANALYSE BIFACTORIELLE; ANALYSE MULTIFACTORIELLE; COMPOSANTES PRINCIPALES -

Le nombre de facteurs communs nécessaires et suffisants pour décrire un ensemble de variables donné est donc égal au rang de la matrice des coefficients de corrélation expérimentaux, complétée avec les communautés dans la diagonale principale.

SPEARMAN dans l'application de l'analyse factorielle à l'expérimentation psychotechnique suppose que tous les tests que l'on peut faire subir à un groupe d'individus définissent un seul facteur général g, commun à tous les tests, et un facteur spécifique propre à chaque test. Dans ces conditions la matrice des corrélations serait de rang 1, c'est-à-dire que si les tests sont placés dans un certain ordre (ordre hiérarchique) les lignes et les colonnes de la matrice suivent, à peu près, une loi de proportionnalité. En choisissant tous les mineurs possibles d'ordre 2 et en les annulant, nous aurons :

$$\begin{vmatrix} r_{12} & r_{14} \\ r_{32} & r_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou bien} \quad r_{12}r_{34} - r_{14}r_{32} = 0 \text{ etc.} \quad (4.1)$$

SPEARMAN exprime cette propriété de ces matrices en disant que les différences tétrades s'annulent. Le même théorème permet d'écrire la suite suivante d'égalités où chaque membre est une expression différente et équivalente de la même communauté.

$$h_1^2 = \frac{r_{12} r_{13}}{r_{23}} = \frac{r_{12} r_{14}}{r_{24}} = \dots = \frac{r_{1j} r_{1k}}{r_{jk}} = \dots = a_1^2 \quad (4.2)$$

Il y a donc plusieurs méthodes pour vérifier si dans la réalisation d'un phénomène agit un seul facteur commun :

- Etudier la matrice des corrélations pour constater si les coefficients sont ordonnés hiérarchiquement;
- Déterminer toutes les différences tétrades et étudier leur distribution, notamment au point de vue de sa normalité;
- Estimer les communautés au moyen de toutes les expressions possibles et tester leur égalité.

Dans tous les cas si l'existence d'un seul facteur commun est démontrée, les coefficients de regression des facteurs ou saturations sont égaux aux communautés correspondantes.

$$a_i^2 = h_i^2 = \frac{\sum r_{ij} r_{ik}}{\sum r_{jk}} \simeq E \left[ \frac{r_{ij} r_{ik}}{r_{jk}} \right] \quad (4.3)$$

Bientôt il est apparu que l'application simple de la théorie et la méthode d'analyse développée par SPEARMAN ne permettait pas d'expliquer complètement beaucoup de phénomènes. En psychotechnique, spécialement, il y a des tests assez proches, par exemple ceux qui sont basés sur les diverses manifestations de la mémoire, dont la parenté est très grande; dans le groupe formé par ces tests il apparaît un facteur, appelé facteur de groupe qui ne se manifeste pas avec les autres tests, et qu'il ne faut pas confondre avec le facteur général, commun à tous.

Si dans l'étude d'un phénomène il ressort qu'un seul facteur commun est suffisant pour l'expliquer, les coefficients de corrélation expérimentaux peuvent être reconstitués avec une approximation plus ou moins grande au moyen des formules suivantes :

$$r'_{jk} = a_{j_0} \cdot a_{k_0} \cong r_{jk} \quad (4.4)$$

Par contre s'il existe des facteurs de groupe cette égalité ne sera valable que pour les couples des tests ou variables n'appartenant pas au même groupe. Si l'on calcule alors

$$\hat{r}_{jk} = r_{jk} - a_{j_0} \cdot a_{k_0} \quad (4.5)$$

les différences ne seront pas toutes nulles (Fig. 9).

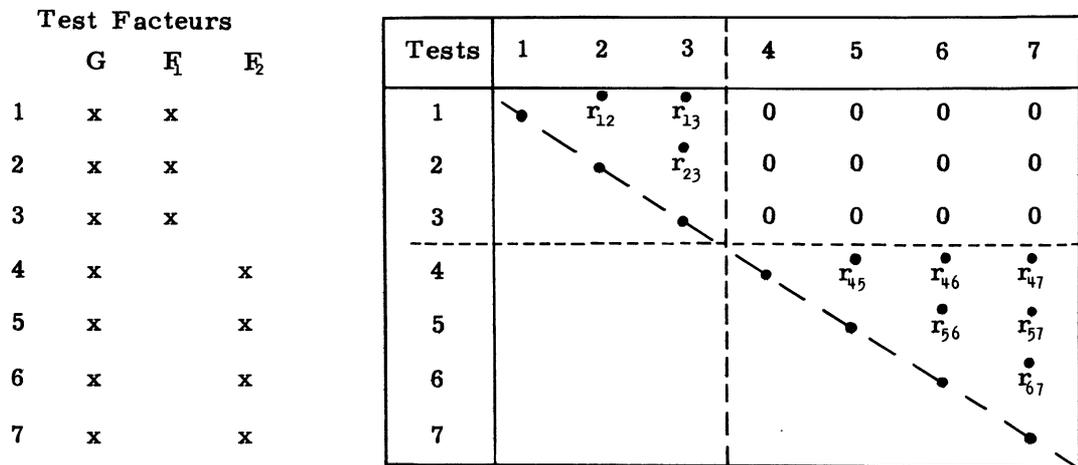


Fig. 9

Pour résoudre le problème qui se présente dans ces cas, on élimine d'abord le facteur commun, et on étudie ensuite séparément chaque groupe pour déterminer les facteurs de groupe existants.

La vraie généralisation des méthodes d'analyse factorielle a été entreprise par THURSTONE sous le nom d'analyse multifactorielle. Dans cette méthode on ne limite pas à priori le nombre des facteurs mais cette limitation découle des calculs. Il n'est plus possible, naturellement, de procéder de la façon exposée jusqu'ici; la méthode qu'il faut suivre est tout-à-fait différente et basée sur les considérations géométriques suivantes.

La représentation de toutes les variables dans l'espace des facteurs communs, à m dimensions, donnera une nébuleuse de points plus ou moins concentrés autour de leur centre de gravité ou centroïde. Il est logique de choisir comme axe du plus important des facteurs celui qui passe par ce centroïde. Dans l'espace des facteurs communs les coordonnées du centre de gravité de tous les points s'exprimeront :

$$\frac{1}{n} \sum_j a_{jt}$$

et seront toutes nulles, excepté pour le premier axe; la première coordonnée exprime, en plus, la distance du centre de gravité à l'origine. On démontre qu'elle vaut :

$$a_{j1} = \frac{\sum_k r_{jk}}{\sqrt{\sum_j \sum_k r_{jk}}} \quad (4.6)$$

En retranchant des corrélations expérimentales, les corrélations théoriques dues à ce premier facteur, il restera :

$${}_1r_{jk} = r_{jk} - a_{j1} a_{k1} = a_{j2} a_{k2} + a_{j3} a_{k3} + \dots + a_{jm} a_{km} \quad (4.7)$$

ou corrélations résiduelles dans un espace à  $m - 1$  dimensions ou facteurs communs. Le centre de gravité des points représentatifs des variables se trouve maintenant à l'origine des coordonnées; pour pouvoir appliquer à nouveau la même méthode il faut séparer le centre de gravité de l'origine des coordonnées. Cela est obtenu au moyen d'une rotation de  $180^\circ$  d'une partie des variables, en les changeant de signe (de préférence on choisit celles qui donnent des coefficients négatifs dans la matrice des corrélations résiduelles) et en prenant note des changements pour pouvoir les corriger à la fin. Au moyen d'une méthode et de formules pareilles à celles employées pour la détermination du premier facteur, on calcule les coefficients  $a_{j2}$  et on sépare des premières corrélations résiduelles, les produits ( $a_{j2} a_{k2}$ ) équivalents aux corrélations théoriques dues au deuxième facteur. Alors, il reste :

$${}_2r_{jk} = {}_1r_{jk} - a_{j2} a_{k2} = a_{j3} a_{k3} + \dots + a_{jm} a_{km} \quad (4.8)$$

Cette méthode est continuée jusqu'à ce que l'on trouve des coefficients de corrélations résiduelles qui ne soient pas significativement différents de 0.

Il faut remarquer que les matrices des corrélations doivent être complètes, c'est-à-dire, telles que dans la diagonale principale toutes les valeurs 1 aient été remplacées par des estimations des communautés. La répétition du calcul avec les valeurs trouvées pour les communautés permet de trouver, de proche en proche, des solutions de plus en plus précises et exactes.

HOTELLING a cherché la solution du problème de l'analyse factorielle suivant une conception géométrique aussi, mais très différente de la précédente. Il part de l'idée que la représentation des variables dans un système d'axes coordonnés multidimensionnaux donne des nébuleuses de points dont la forme est celle d'ellipsoïdes. Les axes de ces ellipsoïdes sont donc choisis comme axes des facteurs, sous la dénomination de composantes principales, en commençant par les plus importants et considérant comme nuls les derniers. Les unités de la diagonale principale de la matrice des corrélations peuvent être remplacées par des estimations des communautés, ce qui réduit le nombre des axes de l'ellipsoïde ayant une importance géométrique réelle.

La méthode géométrique de détermination des axes d'un ellipsoïde, possible lorsque celui-ci a trois dimensions, devient bientôt très compliquée quand le nombre des dimensions augmente. Dans la résolution pratique de ce problème l'on emploie une méthode itérative due à HOTELLING, laquelle a l'avantage d'être d'une routine simple, encore que la théorie ne le soit pas.

Dans notre exposé nous nous limiterons à expliquer la méthode du point de vue pratique, parce que le développement des considérations théoriques sur lesquelles la méthode est basée, nous entraîneraient trop loin. Comme toujours, nous partons du système des équations (3.2) de décomposition de la variable en facteurs communs, mais sans facteurs spécifiques :

$$x_j = a_{j1} f_1 + a_{j2} f_2 + \dots + a_{jm} f_m \quad (4.9)$$

La communauté concernant la variable x sera :

$$h_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + a_{j3}^2 + \dots + a_{jm}^2 \quad (4.10)$$

et la contribution totale du facteur  $f_i$  aux communautés de toutes les variables :

$$A_i = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 \quad (4.11)$$

restant valables les conditions fondamentales :

$$r_{jk} \simeq r_{jk}^! = \sum_i a_{ji} a_{ki} \quad (4.12)$$

L'emploi de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE permet d'établir le système d'équations suivant :

$$r_{j1} a_{11} + r_{j2} a_{21} + \dots + (r_{jj} - \lambda_1) a_{j1} + \dots + r_{jn} a_{n1} = 0 \quad (4.13)$$

La méthode développée par HOTELLING consiste en l'obtention simultanée de la racine caractéristique  $\lambda_1$  et des coefficients  $a_{j1}$ . Pour cela il faut chercher une série de valeurs  $\alpha_{j1}$  qui soient proportionnels aux coefficients vrais. L'on part de la matrice R des corrélations complètes, c'est-à-dire dans laquelle les unités de la diagonale principale ont été remplacées par des estimations des communautés. Multipliant chaque fois les matrices par elles-mêmes on calcule le carré de R, après la quatrième puissance de R, la huitième, la seizième, etc..., et pour chaque matrice résultante on additionne les valeurs de chaque ligne et on divise la somme par la plus grande d'entre elles :

$$\left( \begin{array}{cccc} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{j1} & r_{j2} & \dots & r_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} {}_1S_1 = \sum_k r_{1k} \\ \dots \\ {}_1S_j = \sum_k r_{jk} \\ \dots \\ {}_1S_n = \sum_k r_{nk} \end{array} \quad \begin{array}{l} " \\ " \\ " \\ " \end{array} \quad \begin{array}{l} {}_1\alpha_{11} = \frac{{}_1S_1}{{}_1S_{\max}} \\ \dots \\ {}_1\alpha_{j1} = \frac{{}_1S_j}{{}_1S_{\max}} \\ \dots \end{array} \quad (4.14)$$

Lorsque deux matrices successives  $R^e$  et  $R^{2e}$  donnent des valeurs  $\alpha$  assez voisines, avec l'approximation désirée, on arrête les multiplications et on calcule les coefficients  $a_{j1}$  moyennant les formules ci-après :

$$(4.15) \quad \alpha_{j1}^! = \sum_k r_{kje} \alpha_{j1} \quad " \quad \lambda_1 = \alpha_{j1}^! \quad (\max.) \quad (4.16)$$

$$(4.17) \quad \alpha_{j1} = \frac{\alpha_{j1}^!}{\lambda_1} \simeq e \alpha_{j1} \quad " \quad a_{j1} = \alpha_{j1} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\sum_j \alpha_{j1}^2}} \quad (4.18)$$

On peut alors séparer le premier facteur ou composante principale de la matrice des corrélations expérimentales, ce qui donne :

$$R_1 = |||_1 r_{jk} ||| = ||| (r_{jk} - a_{j1} a_{k1}) ||| \quad (4.19)$$

A la matrice des corrélations résiduelles, ainsi construite, l'on applique le même procédé de calcul qu'à la matrice primitive et l'on obtient les coefficients  $a_{j2}$  correspondants au deuxième facteur ou composante principale. Et les calculs sont continués de la même façon jusqu'à ce que la matrice des corrélations résiduelles soit constituée par des éléments virtuellement nuls.

## 5 - DETERMINATION DES CORRELATIONS DES VARIABLES AVEC LES FACTEURS -

Les coefficients  $a_{jk}$  calculés jusqu'ici sont les coefficients de regression des variables  $x_j$  en fonction des facteurs  $f_k$ . La représentation des variables dans l'espace des facteurs communs est telle que les coefficients  $a_{jk}$  deviennent les projections des vecteurs ou variables sur les axes ou facteurs. La longueur des vecteurs est proportionnelle aux communautés.

Il est possible aussi de représenter graphiquement les corrélations entre variables sur le même schéma : la corrélation entre les variables  $i$  et  $j$  s'exprime par le produit scalaire des deux vecteurs correspondants (Fig. 10) :

$$r_{ij} = h_i h_j \cos \alpha_{ij} \quad (5.1)$$

Cette expression étant indépendante des axes ou facteurs de référence, il est possible de faire tourner le faisceau des communautés dans l'espace des facteurs communs, jusqu'à placer cette configuration des vecteurs en une situation telle que la plupart d'entre eux soient presque parallèles aux axes d'un autre système de référence, du même nombre de facteurs; ce nouveau système d'axes de référence n'est pas obligatoirement orthogonal. THURSTONE, dans son analyse multifactorielle, admet parfaitement ces solutions obliques et même se base sur elles pour définir des facteurs du second ordre.

Dans le cas le plus général des facteurs obliques, la détermination des coefficients de corrélation théoriques des variables par rapport aux facteurs peut se faire au moyen du système d'équations (3.5) déjà antérieurement exposé :

$$r_{x_j f_i} = a_{j1} r_{f_1 f_i} + a_{j2} r_{f_2 f_i} + \dots + a_{ji} + \dots + a_{jm} r_{f_m f_i} \quad (5.2) = (3.5)$$

Si les facteurs communs sont orthogonaux cette expression se réduit à celle-ci :

$$r_{x_j f_i} = a_{ji} \quad (5.2') = (3.5')$$

## 6 - ESTIMATION DES FACTEURS COMMUNS -

Une fois déterminés les modèles et structures factoriels du phénomène en question, pour que les facteurs représentatifs des variables analysées soient mis en évidence, et une fois calculés les coefficients de régression des variables en fonction des facteurs, il est intéressant de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire, procéder à la détermination des équations de régression qui doivent permettre de calculer les valeurs individuelles des facteurs en fonction des mesures expérimentales des variables. Ces équations seront :

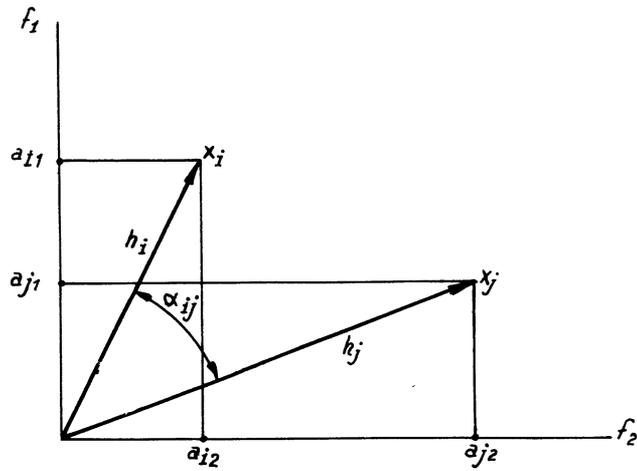
$$f_{pi} = b_{p1} x_{1i} + b_{p2} x_{2i} + \dots + b_{pj} x_{ji} + \dots + b_{pn} x_{ni} \quad (6.1)$$

Ces équations de régression se distinguent des équations de régression normalement rencontrées dans l'étude statistique des corrélations en ce que, ici, seules les variables  $x_{ji}$  sont connues directement par des expériences. Dans ce système d'équations, donc, il y a plus d'inconnues que d'égalités; pour le résoudre il faut multiplier successivement chacune des équations par chaque variable  $x_{ji}$  et calculer les valeurs moyennes; nous obtenons ainsi le système d'équations suivant, où les variables aussi bien que les facteurs sont centrés et réduits :

$$r_{s1} \beta_{p1} + r_{s2} \beta_{p2} + \dots + \beta_{ps} + \dots + r_{sn} \beta_{pn} = r_{s f_p} \quad (6.2)$$

Dans ce système d'équations les seules inconnues sont les coefficients  $\beta$  et il y a autant d'équations que d'inconnues. Il est donc possible de le résoudre suivant les méthodes classiques, par exemple celle de CRAMER, ou mieux celle de GAUSS adaptée par DOOLITTLE et par MINEUR, ou celle d'AITKEN. Toutes ces méthodes ont l'avantage de permettre un contrôle constant des opérations successives jusqu'à la détermination complète des coefficients cherchés; elles permettent de faire les calculs de tous les facteurs à la fois, ce qui est aussi un avantage certain du point de vue pratique.

En utilisant des opérations d'algèbre matricielle, LEDERMAN a présenté une autre méthode (généralisée après par HARMAN pour des facteurs obliques) dans laquelle le nombre d'inconnues de chaque équation devient égal au nombre

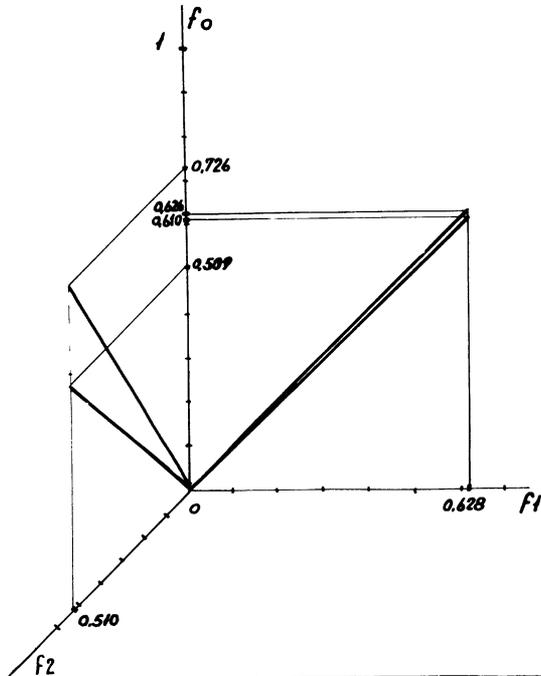


J. T. - I.  
1957

Représentation des corrélations entre variables

A. F. S. M.  
Fig. 10

- $\alpha_{10} = 0,626$
- $\alpha_{20} = 0,610$
- $\alpha_{30} = 0,726$
- $\alpha_{40} = 0,509$
  
- $\alpha_{11} = 0,628$
- $\alpha_{21} = 0,628$
- $\alpha_{32} = 0,510$
- $\alpha_{42} = 0,510$



J. T. - I  
1957

Représentation des facteurs des propriétés des sables de moulage pour l'acier suivant une analyse bifactorielle.

A. F. S. M.  
Fig. 11

des facteurs, au lieu de l'être au nombre des tests, ce qui facilite beaucoup les opérations parce que celui-ci est toujours plus grand (et parfois beaucoup plus grand) que celui-là.

## 7 - APPLICATION A L'ETUDE DES SABLES DE MOULAGE -

Prenons la matrice des coefficients de corrélation des propriétés physiques des sables destinés au moulage des pièces d'acier, sans considérer la variable "Degré de serrage" pour les raisons données antérieurement :

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1^2 & 0,777 & +0,442 & +0,332 \\ 0,777 & h_2^2 & +0,457 & +0,297 \\ +0,442 & +0,457 & h_3^2 & 0,629 \\ +0,332 & +0,297 & 0,629 & h_4^2 \end{vmatrix}$$

Nous avons changé, en plus, les signes des variables "Teneur en eau" et "Perméabilité aux gaz" afin d'avoir seulement des corrélations positives dans la matrice.

L'application systématique des différentes méthodes d'analyse factorielle exposées antérieurement, à l'objet de déterminer les communautés  $h^2$  et les coefficients de regression a des variables en fonction des facteurs, permet de constater que la matrice  $\Delta$  n'est pas de rang 1, quelles que soient les valeurs choisies pour les communautés. La théorie des deux facteurs de SPEARMAN n'est pas donc applicable aux sables de moulage.

Nous avons trouvé des possibilités meilleures avec l'application des méthodes de l'analyse bi-factorielle. Dans ce cas apparaissent un facteur commun et deux facteurs de groupe, lesquels épuisent presque complètement la signification des corrélations. La représentation graphique des quatre caractéristiques étudiées, dans l'espace des facteurs communs se trouve dans la figure 11. Les valeurs des saturations des variables dans chacun des facteurs sont :

	Facteur commun	1er facteur	2nd facteur
Résistance cisaillement	$a_{10} = 0,626$	$a_{11} = 0,628$	---
Résistance compression	$a_{20} = 0,610$	$a_{21} = 0,628$	---
Teneur en eau	$a_{30} = 0,726$	---	$a_{32} = 0,510$
Perméabilité aux gaz	$a_{40} = 0,509$	---	$a_{42} = 0,510$

Du point de vue physique ces facteurs peuvent être conçus de la façon suivante : Un facteur commun qui correspondrait au "corps" du sable, c'est-à-dire à cette propriété que l'on détecte lorsqu'on presse une poignée de sable; un facteur de groupe concernant sa capacité de résistance mécanique, et un autre facteur de groupe se rapportant à la compacité.

L'analyse multifactorielle, suivant la méthode de THURSTONE, fait apparaître deux facteurs communs orthogonaux, le premier ayant caractère positif pour toutes les caractéristiques contrôlées, le second avec des signes opposés pour les deux premières par rapport aux deux dernières.

	<u>1<sup>er</sup> facteur commun</u>	<u>2<sup>nd</sup> facteur commun</u>
Résistance au cisaillement	$a_{11} = 0,787$	$a_{12} = 0,393$
Résistance à la compression	$a_{21} = 0,784$	$a_{22} = 0,409$
Teneur en eau	$a_{31} = 0,734$	$a_{32} = -0,324$
Perméabilité aux gaz	$a_{41} = 0,644$	$a_{42} = -0,477$

Leur représentation graphique est celle de la figure 12. A la vue de celle ci il apparait qu'il est possible de changer les axes orthogonaux dessinés par des axes obliques, passant le premier entre les vecteurs concernant les résistances à la compression et au cisaillement et le deuxième entre ceux concernant l'humidité et la perméabilité.

La méthode d'HOTELLING ou des composantes principales permet une représentation très proche de la précédente. En effet, suivant cette méthode, on trouve une première composante positive pour tous les résultats des essais et une seconde composante affectée de signes différents, selon la variable, comme pour les vecteurs de THURSTONE.

	<u>1<sup>e</sup> composante</u>	<u>2<sup>e</sup> composante</u>
Résistance au cisaillement	$a_{11} = 0,807$	$a_{12} = -0,344$
Résistance à la compression	$a_{21} = 0,805$	$a_{22} = -0,368$
Teneur en eau	$a_{31} = 0,718$	$a_{32} = 0,362$
Perméabilité aux gaz	$a_{41} = 0,617$	$a_{42} = 0,512$

La représentation graphique (Fig. 13) est très semblable à celle de l'analyse multifactorielle, au moins en ce qui concerne la structure générale. Ici aussi les axes orthogonaux peuvent être remplacés par des axes obliques plus représentatifs des propriétés des sables de moulage, choisissant pour cela les bissectrices de chaque paire de vecteurs de la figure 13.

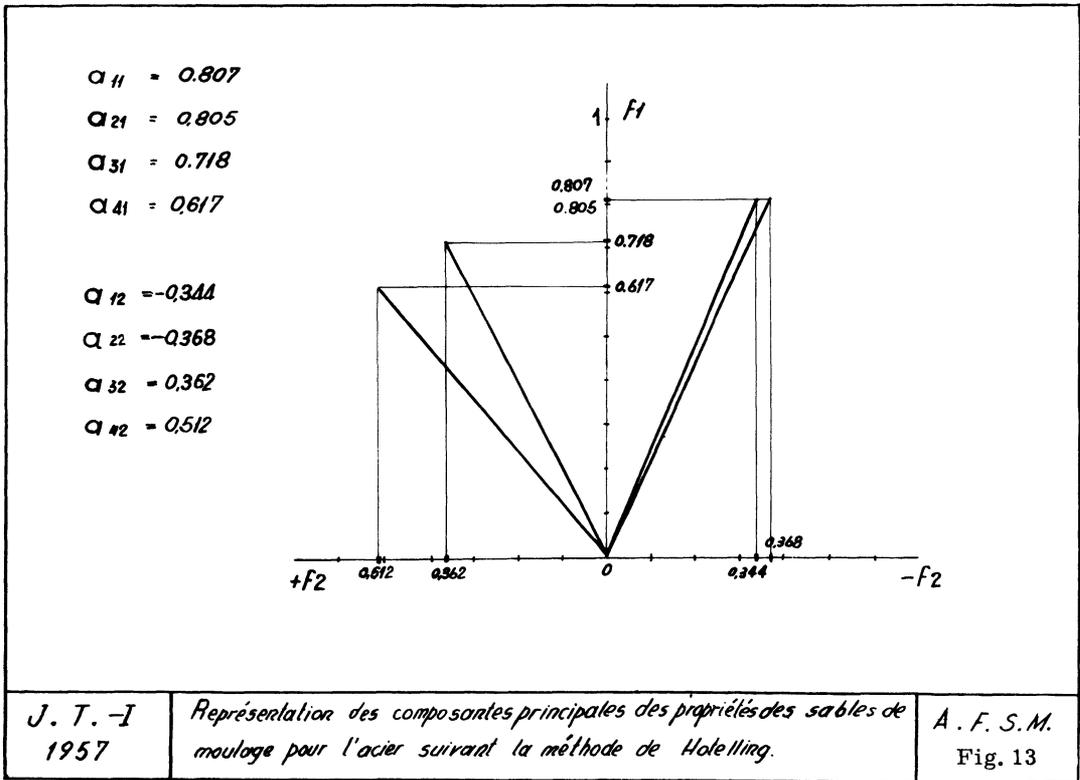
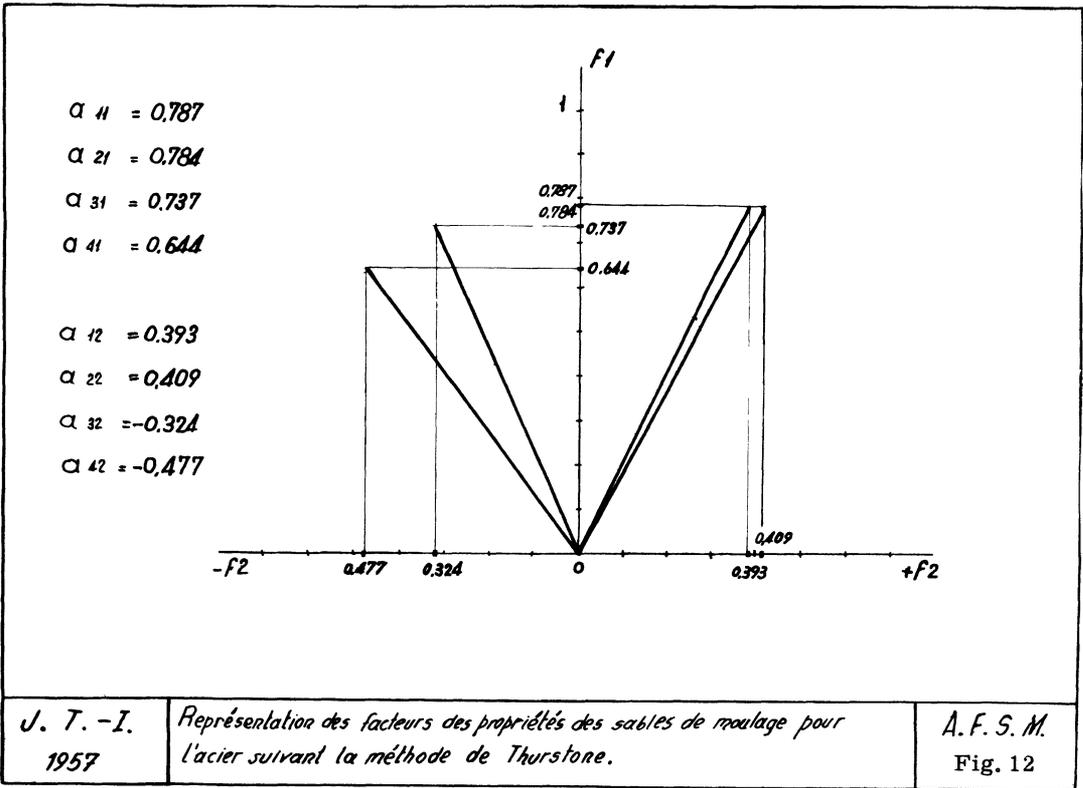
Les différentes méthodes d'analyse factorielle donnent donc des représentations différentes du même phénomène, toutes néanmoins pareillement acceptables du point de vue mathématique. Cette multiplicité de solutions n'est pas, en soi, un inconvénient puisqu'elle permet de choisir la solution qui s'adapte davantage aux conditions physiques du phénomène analysé. Dans ce cas la meilleure solution semble être celle donnée par l'analyse bifactorielle, laquelle permet, comme nous l'avons indiqué, une interprétation physique simple et objective des facteurs. Nous nous baserons donc sur cette solution pour estimer les facteurs concernant chacun des sables que l'on contrôle.

La détermination des coefficients de regression des facteurs en fonction des propriétés physiques des sables contrôlés journallement a permis d'établir les équations ci-après :

$$f_0 = 0,245 \frac{X_1 - 208,54}{28,97} + 0,182 \frac{X_2 - 898,9}{132,34} - 0,497 \frac{X_3 - 8,82}{0,654} - 0,06 \frac{X_4 - 42,8}{12,72}$$

$$= 0,00845 X_1 + 0,001375 X_2 - 0,76 X_3 - 0,0047 X_4 + 3,91.$$

$$f_1 = 0,354 \frac{X_1 - 208,54}{28,97} + 0,354 \frac{X_2 - 898,9}{132,34} = 0,0122 X_1 + 0,00268 X_2 - 4,95$$



$$f_2 = 0,313 \frac{8,82 - X_3}{0,654} + 0,313 \frac{42,8 - X_4}{12,72} = 5,28 - 0,479 X_3 - 0,0246 X_4$$

Les estimations de ces facteurs sont centrées et réduites, c'est-à-dire qu'elles ont une moyenne nulle (dans le domaine d'utilisation des sables aptes pour le moulage des pièces d'acier) et un écart-type unitaire. Etant donné que l'on peut admettre que ces facteurs se distribuent normalement, les valeurs absolues supérieures à 3 seront exceptionnelles et, en ce qui concerne le facteur commun, un sable coté -3 devrait être refusé. Les variables  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ , correspondant aux quatre caractéristiques des sables contrôlés (c'est-à-dire respectivement  $X_1$  = résistance au cisaillement;  $X_2$  = résistance à la compression;  $X_3$  = teneur en eau ou humidité;  $X_4$  = perméabilité aux gaz), sont mesurées directement à l'échelle des expériences.

Pour faciliter la compréhension de la façon dont peut être utilisée l'information donnée par les résultats du contrôle des sables, nous appliquerons les équations antérieures à quelques cas pratiques, prélevés parmi ceux des expériences qui ont précédé cette étude :

Tableau V

Estimation des facteurs en fonction des propriétés physiques des sables

Echantillon	Propriétés physiques contrôlées				Facteurs		
	Rés.cis.	Rés.com.	Humid.	Perméab.	Fact.com.	1 <sup>er</sup> f.grou.	2 <sup>e</sup> f.groupe
A	140	680	10,50	63	-2,511	-1,42	1,305
B	175	910	9	26	-0,32	-0,37	-0,24
C	250	1110	8,25	33,5	1,13	1,075	-0,50
D	342	1020	6,2	54	2,25	1,935	-0,98

La comparaison des propriétés physiques de ces sables est facilitée d'une façon remarquable par les facteurs. La simple lecture de ce tableau nous renseigne tellement sur les sables échantillonnés qu'il ne paraît pas nécessaire d'y ajouter des observations ou des explications quelles qu'elles soient.

## 8 - CONCLUSION ET RESUME -

Les méthodes d'analyse factorielle ont un domaine d'application beaucoup plus vaste que la seule étude psychotechnique des aptitudes humaines qui a été leur origine. Dans le Colloque International célébré à Paris en 1955, sous l'égide du Centre National de la Recherche Scientifique, sur "l'Analyse factorielle et ses applications" on a vu que nombre de problèmes très divers pouvaient se résoudre par l'emploi de ces méthodes. Nous avons cherché, dans notre étude, à appliquer l'analyse factorielle à un problème industriel particulièrement intéressant, bien qu'assez simple, ce qui lui donne son double aspect d'exemple et, pourrait-on dire, d'exercice d'analyse factorielle, de facile exécution.

Envisagée du point de vue industriel, l'analyse réalisée permet d'établir des bases pour une classification des sables de fonderie destinés au moulage des pièces d'acier, d'après leurs conditions essentielles, c'est-à-dire les facteurs physiques que nous avons décelé, au lieu de se baser sur les résultats bruts des essais, qui ne sont, en réalité, que le reflet de ceux-là.

## BIBLIOGRAPHIE

- C. N. R. S. - "L'Analyse Factorielle et ses Applications". 45e Colloque International du Centre National de la Recherche Scientifique Paris, 1956.
- HOLZINGER (K.J.) et HARMAN (H. H.) - "Factor Analysis. A synthesis of factorial methods". The University of Chicago Press, 3<sup>e</sup>. ed. 1951.
- THOMSON (G. H.) - "L'Analyse Factorielle des Aptitudes Humaines" - Trad. par P. Naville. Presses Universitaires de France. 1<sup>e</sup> ed. 1950.
- THURSTONE (L. L.) - "Multiple-Factor Analysis". The University of Chicago Press, 3<sup>e</sup> ed. 1950.
- VILLE (M. J.) - "Principes d'Analyse Matricielle" - Institut de Statistique de l'Université de Paris, Vol. IV, Fascicule 2-3, 1955.