

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. J. GUMBEL

## Étude statistique de la fatigue des matériaux

*Revue de statistique appliquée*, tome 5, n° 4 (1957), p. 51-86

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1957\\_\\_5\\_4\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1957__5_4_51_0)

© Société française de statistique, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDE STATISTIQUE DE LA FATIGUE DES MATÉRIAUX <sup>(1)</sup>

par

**E. J. GUMBEL**

*Columbia University (New York)*

*Le but de cet article est la clarification logique de certaines notions physiques et statistiques communément utilisées dans les études de fatigue. Le second est l'analyse elle-même.*

*Les éprouvettes étudiées sous une contrainte constante S se rompent au bout d'un certain nombre de cycles N. La proportion des survivants est d'autant plus petite que N est plus grand. Les éprouvettes essayées jusqu'à un nombre fixé de cycles N et sous une contrainte constante S peuvent se briser ou ne pas se briser. Si le nombre des éprouvettes essayées est suffisamment grand, la proportion des survivants décroît lorsque la contrainte augmente. Le premier phénomène définit la durée de vie à la fatigue, le second la « résistance à la fatigue ». Dans la suite, N et S sont considérées comme des variables aléatoires; les probabilités de survie et leur estimation sont étudiées au paragraphe 2. Ces considérations sont indépendantes de la forme analytique des fonctions de survie. L'analyse suivante est basée sur la théorie des valeurs extrêmes expliquée au paragraphe 3 et appliquée à la représentation des durées de vie et des résistances à la fatigue aux deux paragraphes suivants. Des applications numériques sont données à la fin de cet article.*

## SOMMAIRE

1. Probabilités de survie et conditions limites
2. Estimation et nature analytique de ces probabilités
3. Théorie des valeurs extrêmes
4. Les fonctions de survie et le diagramme  $(S, N)_f$  pour  $N_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$
5. Vie minimum et limite d'endurance
6. Exemples numériques
7. Propositions faites aux ingénieurs.

## I - PROBABILITÉS DE SURVIE ET CONDITIONS LIMITES

Le nombre de cycles N au bout desquels il y a rupture, sous contrainte constante S, et la contrainte S pour laquelle il y a rupture après un nombre constant de cycles N sont des variables aléatoires non négatives, continues. Si F(x) est la probabilité qu'une variable aléatoire soit inférieure à x, la probabilité de survie est

$$(1.1) \quad f(x) = 1 - F(x),$$

fonction continue, décroissante de l'unité à zéro. Pour caractériser cette "fonction de survie", il est coutume d'introduire les quantiles de la distribution F(x)

(1) Etude faite sous les auspices de la Fondation Higgins.

et il est commode d'utiliser les valeurs de N et S qui leur correspondent, en particulier à

$$(1.2) \quad l(x) = \frac{1}{e}$$

où e est la base des logarithmes naturels.

Soit  $N = V_s$  et  $S = S_v$  ces quantiles, appelés "vie caractéristique" et "contrainte caractéristique". Soit  $l_s(N)$  la probabilité de survie pour S constant et  $l_N(S)$  celle relative à N constant.

Ces deux probabilités ont les propriétés suivantes :

a) Si S (ou N) est constant et si nous augmentons N (ou S) la probabilité de survie décroît; ainsi les graphiques  $l_s(N)$  se déplacent vers la gauche quand S croît, sans jamais se couper. La vie caractéristique  $V_s$  et la contrainte caractéristique  $S_v$  sont respectivement des fonctions décroissantes de S et N. Si  $l_s(N)$  peut être linéarisée par un choix convenable des échelles, les graphiques de  $l_s(N)$  en fonction de N pour différentes valeurs de S sont des droites parallèles se déplaçant vers la gauche pour des valeurs croissantes de S.

b) Il est possible de considérer les probabilités de survie  $l_N(S)$  comme des fonctions de S pour des valeurs de N constantes; leurs graphiques forment un système de courbes qui se déplacent vers la gauche quand N augmente, sans avoir de point commun; dans la mesure où elles peuvent être linéarisées, celles-ci constituent un système de droites parallèles.

Dans l'étude de N et S comme variables statistiques, nous ne faisons pas l'hypothèse de l'existence d'une distribution à deux variables N et S. Une telle distribution est telle que l'intégration par rapport à l'une des variables donne la distribution de l'autre. Cependant, dans notre cas, la probabilité de survie en tant que fonction de N (ou S) dépend de la valeur choisie pour S (ou N) et cette influence ne peut être éliminée. Puisqu'il n'est pas de distribution marginale de N (ou S), l'introduction des deux probabilités de survie n'implique pas l'existence d'une distribution à deux variables et toute conclusion tirée d'une telle hypothèse conduirait à une contradiction de la réalité.

c) En plus de ces deux probabilités de survie, il est possible de représenter S en fonction de N; pour une probabilité de survie  $l$  choisie,  $S_l$  est une fonction décroissante de N. Les courbes correspondant aux grandes probabilités  $l$  sont situées à gauche de la courbe originale qui représente  $V_s$  en fonction de S ou  $S_v$  en fonction de N. Si les deux fonctions de survie peuvent être linéarisées, ces courbes sont encore des droites parallèles. A un choix de probabilités  $l$  prises dans l'intervalle (0,01 ; 0,99) correspond un système de courbes  $(S,N)_l$  sans point commun, rangées de la droite vers la gauche lorsque  $l$  croît.

Le domaine du diagramme  $(S,N)_l$  est limité par des considérations physiques. L'effet des contraintes dynamiques est caractérisé par une déformation plastique du matériel, alors que sous les efforts statiques, les déformations sont élastiques. Par conséquent, le second problème ne peut être considéré comme un cas limite du premier pour  $N = 1$ ; le diagramme  $(N,S)_l$  ne peut être extrapolé pour de petites valeurs de N.

Le diagramme  $(N,S)_l$  est obtenu à partir des courbes  $l_s(N)$  et conduit à son tour aux courbes  $l_N(S)$ . Comme les courbes  $l_s(N)$  sont continues, il en est de même des courbes  $(S,N)_l$ .

Les trois fonctions  $l_s(N)$ ,  $l_N(S)$  et  $(S,N)_l$  doivent être compatibles. Chacune d'elles implique les deux autres. Cette condition fondamentale est souvent ignorée des ingénieurs qui introduisent des hypothèses empiriques sur l'une de ces fonctions sans égard pour les deux autres. Il n'est donc pas admissible de consi-

dériver uniquement l'une des fonctions de survie. Toute étude de la distribution de  $N$  entraîne celle de  $S$  et réciproquement. Les probabilités  $l_s(N)$  [ ou  $l_N(S)$  ] contiennent des paramètres qui dépendent de  $S$  (ou  $N$ ). Le rôle de ces paramètres est tel que pour des valeurs constantes de  $N$  (ou  $S$ ),  $l_s(N)$  (ou  $l_N(S)$ ) fournit  $l_N(S)$  ( ou  $l_s(N)$  ). Par suite le choix des expressions analytiques des fonctions de survie et l'introduction de paramètres sont tout à fait limités.

En premier lieu, on peut supposer que la rupture commence dès le premier cycle et que toutes les éprouvettes essayées sous une contrainte donnée se brisent si le nombre de cycles est assez grand. Toutefois, l'expérience a montré que ces conditions limites doivent être modifiées par l'introduction d'une limite de sensibilité qui a deux aspects : le premier, qui résulte de l'échouage, est l'expérience d'une valeur minimum  $N_{0,s}$  du nombre des cycles avant lequel aucune rupture ne se produit sous une tension donnée  $S$ . Pour  $N \leq N_{0,s}$ ,  $l_s(N) = 1$ . Ce nombre est appelé "vie minimum". C'est une constante physique pour un matériau et un type d'essai donnés. La vie minimum est une fonction décroissante de  $S$ , qui ne peut devenir négative. Elle joue le rôle d'un paramètre pour  $l_s(N)$ . Son estimation est sujette à des fluctuations, mais elle doit être inférieure au plus petit nombre de cycles observés pour qu'il y ait rupture.

Si la probabilité  $l_s(N)$  a été linéarisée avec l'hypothèse  $N_{0,s} = 0$ , les courbes cesseront d'être linéaires si  $N_{0,s} > 0$ . Elles seront incurvées vers la droite, du côté des petites valeurs de  $N$  pour les valeurs de  $S$  où la durée de vie minimum ne s'annule pas. Lorsque le nombre de cycles approche la durée de vie minimum, la fonction "survie" tend à être parallèle à l'axe des  $N$ ; là encore, les courbes de survie correspondant à différentes valeurs de  $S$  ne se coupent jamais. Dans le diagramme  $(S,N)_l$ , le graphique de la fonction de  $S, N_{0,s}$  constitue la frontière de l'aire à l'intérieur de laquelle se produisent toutes les ruptures. Pour toutes les combinaisons de  $S$  et  $N$  donnant un point situé au dessous de cette courbe, la survie est certaine. Ainsi le domaine  $(S,N)_l$  comprend trois parties : au centre se trouve le domaine où la rupture se produit avec une probabilité  $l$ , à gauche est la région de survie permanente et à droite celle de rupture certaine.

L'existence d'une valeur  $N_{0,s}$  non nulle n'empêche pas la fonction de survie de tendre vers 0 lorsque  $N$  augmente. En effet, pour certains métaux doux, tels que le nickel pur, le cuivre et l'aluminium, toutes les éprouvettes se rompent au bout d'un nombre de cycles assez grand. Toutefois, dans de nombreux cas, des éprouvettes d'acier essayées sous de faibles contraintes survivent pendant des millions de cycles et la fréquence des survies tracée en fonction de  $N$  converge, lorsque  $N$  est grand, vers une droite parallèle à l'axe des abscisses. Ceci est le deuxième aspect des conditions limites. Il est lié à l'existence de  $N_{0,s}$  d'une manière que nous allons expliquer maintenant.

On appelle endurance la contrainte  $S_{0N}$  au-dessous de laquelle aucune rupture ne se produit, lorsque la durée de l'expérience est de  $N$  cycles. Cette fonction de  $N$  est la fonction inverse de la vie minimum  $N_{0,s}$ , fonction de  $S$ . Par suite,  $S_{0N}$  décroît lorsque  $N$  augmente. Toutefois, il existe des cas dégénérés où  $N_{0,s} \neq 0$  n'est plus une fonction de  $S$  (où  $S_{0N} \neq 0$  n'est plus une fonction de  $N$ ). Pour plus de clarté il est utile de considérer les quatre cas

$$\begin{aligned} N_0 = 0 & , S_0 = 0 \\ N_0 = 0 & , S_0 = \text{constante} > 0 \\ N_0 = \text{constante} > 0 & , S_0 = 0 \\ N_0 = \text{constante} > 0 & \text{ et } S_0 = \text{constante} > 0 \end{aligned}$$

Mais ces quatre cas ont l'inconvénient de ne pas correspondre à une réalité physique. Dans les trois derniers cas, le diagramme  $(N,S)_l$  est limité par une parallèle à l'axe  $N$  qui représente  $S_0$  (ou par une parallèle à l'axe  $S$  qui représente  $N_0$ ). Ainsi  $N_0$  peut s'annuler tandis que  $S_0$  est différent de zéro et inversement. Dans

le 4ème cas, la courbe  $N_{0,S}$  est constituée par deux droites, l'une parallèle aux abscisses à une distance  $S_0$  de cet axe, l'autre parallèle aux ordonnées et d'abscisse  $N_0$ . Du point de vue physique  $N_{0,S}$  est une fonction de  $S$  et, par suite,  $S_{0,N}$  est une fonction de  $N$ . La valeur non nulle  $S_0$  prise par  $S_{0,N}$  lorsque  $N$  augmente indéfiniment est appelée limite d'endurance.

$$(1.3) \quad S_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{0,N} \geq 0.$$

La question de savoir si la limite d'endurance s'annule ou non est du plus haut intérêt pour l'étude des structures. Si  $S_0 > 0$ , nous sommes assurés de pouvoir choisir des tensions suffisamment petites pour qu'aucune rupture ne se produise quelle que soit la durée de l'épreuve.

La notion de limite d'endurance crée une différence logique entre les probabilités  $l_s(N)$  et  $l_N(S)$ . Il peut en effet exister une fonction limite :

$$(1.4) \quad l_\infty(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} l_N(S)$$

dont le graphique est situé à gauche des courbes de survie, non nulle pour les petites tensions. Mais la courbe correspondante  $l_N(\infty)$  ne peut exister puisque tous les spécimens se brisent dès le premier cycle lorsque la tension  $S$  est très grande.

La probabilité limite (1.4) peut être appelée "probabilité de survie permanente". Lorsque  $S$  décroît, cette probabilité augmente et atteint l'unité à la limite d'endurance  $S_0 \geq 0$ . Puisque l'extrapolation de  $l_\infty(S)$  jusqu'à l'unité peut conduire à trouver  $S_0 = 0$ , l'existence d'une durée de vie minimum non nulle n'entraîne pas celle d'une limite d'endurance non nulle; les quatre cas envisagés ci-dessus sont donc compatibles avec l'existence d'une probabilité non nulle de survie permanente.

L'inverse de la fonction (1.4), c'est-à-dire les contraintes  $S_{0,\ell}$  (fonction de  $\ell$ ) peuvent être appelées contraintes de fatigue. Elles correspondent à l'existence d'une probabilité de survie permanente. Lorsque  $\ell$  augmente,  $S_{0,\ell}$  décroît et atteint la limite d'endurance pour  $\ell = 1$ . Les contraintes de fatigue  $S_{0,\ell}$  ne doivent pas être confondues avec les durées  $S_{0,N}$ . Les contraintes de fatigue sont ces faibles contraintes pour lesquelles  $l_\infty(S)$  ne s'annule pas, c'est-à-dire lorsque quelques-unes des pièces testées survivent, quelle que soit la durée de l'épreuve. Les durées sont par contre toutes des tensions pour lesquelles la durée de vie minimum ne s'annule pas.

L'existence d'une probabilité de survie permanente, fonction de la contrainte pour un nombre infini de cycles met en évidence l'existence d'"immortels". Dans ce cas, la probabilité de survie  $l_s(N)$  doit être modifiée. Au lieu de tendre vers zéro lorsque  $N$  augmente, elle tend vers la valeur  $l_\infty(S)$ , proportion des "immortels". La proportion des pièces qui se brisent est  $1 - l_\infty(S)$ . La probabilité de survie pour ces pièces brisées appelée probabilité partielle est désignée par  $L_s(N)$  et tend vers 0 lorsque  $N$  croît.

Il reste à trouver maintenant la relation entre  $l_s(N)$ ,  $L_s(N)$  et  $l_\infty(S)$ . A cette fin, considérons les conditions limites pour les  $l_\infty(S)$  et  $L_s(N)$ .

a) Si  $S$  est suffisamment petit, ( $S \leq S_0$ ), toutes les pièces survivent même lorsque le nombre de cycles est infini et

$$l_\infty(S) = 1 \quad ; \quad l_s(N) = 1 \quad ; \quad L_s(N) = 1$$

b) Si  $S$  est assez grand pour que les  $l_\infty(S) = 0$ , ou si  $N_{0,S} = 0$ ,

$$l_s(N) = L_s(N)$$

c) Si  $N$  est petit,  $N \leq N_{0,s}$ , toutes les pièces survivent et

$$l_s(N) = L_s(N) = 1$$

d) Si  $N$  est assez grand pour que  $L_s(N) = 0$ , alors :

$$l_s(N) = l_\infty(S)$$

Les quatre conditions limites sont exprimées par :

$$(1.5) \quad l_s(N) = l_\infty(S) + [1 - l_\infty(S)] L_s(N)$$

Cette équation donne la probabilité totale de survie  $l_s(N)$  en fonction de la probabilité de survie permanente  $l_\infty(S)$  et la probabilité partielle  $L_s(N)$ . Si les tensions sont grandes la probabilité  $l_\infty(S)$  est petite; il en est de même du nombre de cycles à la rupture  $N$ . Alors  $1 - l_\infty(S)$  est grande et la condition limite pour la probabilité totale,  $N$  petit, est, comme dans le cas (b),

$$(1.6) \quad l_s(N) \simeq L_s(N).$$

Toutefois, quand  $N$  croît, la probabilité  $L_s(N)$  devient très petite, de sorte qu'en première approximation et pour  $N$  grand, la condition limite relative à la probabilité totale est, comme dans le cas (d),

$$(1.6') \quad l_s(N) \simeq l_\infty(S)$$

ainsi,  $l_s(N)$  tend à devenir parallèle à l'axe des  $N$ . Si la tension diminue, le parallélisme commence plus tard et la distance entre  $l_\infty(S)$  et l'abscisse augmente.

La construction de la fonction de survie totale comme fonction de  $N$  comprend ainsi trois étapes. Au premier stade, on suppose que  $N_{0,s}$  s'annule. Les durées sont constantes ou nulles et l'endurance limite a cette même valeur.

La seconde (ou troisième) étape introduit des durées de vie minimum non nulles et la troisième (ou seconde) fait intervenir la probabilité d'une survie permanente dans le cas où cette dernière existe pour le matériel étudié et le type d'expérience. Dans ce cas, les courbes  $(S, N)_\ell$  tendent, pour de grandes valeurs de  $N$ , à devenir parallèles à l'axe des abscisses. Ainsi, il y a 4 situations limites possibles à envisager dans le diagramme  $(S, N)_\ell$  :

(1) [ ou (2) ] : Les courbes  $(S, N)_\ell$  tendent à devenir parallèles à l'axe des abscisses et la limite d'endurance s'annule [ ou non. ] Des contraintes de fatigues  $S_{0,\ell}$  différentes de 0 existent. Quand  $\ell$  croît, ou bien elles s'annulent, ou bien elles tendent vers une valeur positive, la limite d'endurance.

(3) [ ou (4) ] : Les courbes  $(S, N)_\ell$  pour  $\ell < 1$ , n'ont pas tendance à devenir parallèles à l'axe des abscisses. Alors, les tensions de fatigue  $S_{0,\ell}$  n'existent pas. Les courbes  $(S, N)_\ell$  se confondent lorsque  $N$  augmente avec la courbe  $S_{0,N}$ , et peuvent finalement devenir parallèles à l'axe des abscisses [ ou tendre vers cet axe ]. Malheureusement les observations actuelles ne mettent pas clairement en évidence quel est le cas à considérer.

## II - ESTIMATION ET NATURE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS

Jusqu'à maintenant, nous avons simplement tiré des conclusions logiques de la notion de fonction de survie. Il s'agit maintenant d'appliquer ce schéma théorique aux observations; au lieu de probabilités nous parlons de fréquence de survie.

La première question est de savoir quelle fréquence attribuer à  $N_i$ , numéro du cycle auquel se produit la  $i$ ème rupture; ces numéros, dates de rupture, étant rangés par ordre de grandeurs croissantes. Pour résoudre ce problème statisti-

que, considérons une variable continue  $x$  et un échantillon d'effectif  $n$ . Soit  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) la  $i^{\text{ème}}$  des observations classées par ordre de grandeur croissante. Des répétitions de l'expérience pour la même taille de l'échantillon conduisent à des nombres  $x_i$  qui peuvent coïncider avec les  $x_i$  ou non. Par suite, chaque  $x_i$  a une distribution spécifique  $\varphi_n(x_i)$  qui dépend uniquement de la distribution initiale et des nombres  $n$  et  $i$ .

Soit :

$$(2.1) \quad F(x) = 1 - \ell(x)$$

la probabilité initiale.

La densité correspondante est :

$$f(x) = - \ell'(x)$$

et la  $i^{\text{ème}}$  observation  $x_i$  a la distribution (densité de probabilité)

$$(2.2) \quad \varphi_n(x_i) = C_n^i \left[ F(x_i) \right]^{i-1} \left[ 1 - F(x_i) \right]^{n-i} f(x_i)$$

Faisons le changement de variable  $F(x_i) = F_i$  ; cette nouvelle variable a une moyenne :

$$(2.3) \quad \bar{F}_i = \frac{i}{n+1}$$

indépendante de la distribution initiale  $f(x)$ . Par suite  $\bar{F}_i$  peut être utilisée comme fréquence cumulée de la  $i^{\text{ème}}$  observation et la fréquence d'une survie supérieure à la  $i^{\text{ème}}$  valeur observée  $x_i$  dans une expérience portant sur  $n$  éléments est :

$$(2.4) \quad \hat{\ell}(x_i) = 1 - \frac{i}{n+1}$$

Faisant  $x_i = N_i$ ,  $n = n_s$  nombre des éléments testés sous la tension  $S$ ,

$$(2.5) \quad \hat{\ell}(N_i) = 1 - \frac{i}{n_s + 1}$$

Cette estimation de la probabilité de survie a été proposée par Weibull [(8)]. Elle est particulièrement adaptée à une utilisation des graphiques de probabilité. La variable  $N_i$  est portée en abscisses et les fréquences de survie  $\hat{\ell}_s(N_i)$  constituent les ordonnées. Si les points observés sont joints par des segments de droite, on obtient une approximation de la probabilité théorique de survie qui tend vers celle-là lorsqu'augmente l'effectif de l'échantillon. Les points représentatifs de (2.5) conduisent à une estimation rapide du nombre caractéristique  $V_s$  des cycles de rupture. Puisque le paramètre  $V_s$  est la valeur de la variable correspondant à une probabilité de survie  $1/e$ , il peut être estimé comme un nombre de cycles  $N_i$ , dont la fréquence est

$$1 - \frac{i}{n_s + 1} = 1/e$$

d'où :

$$(2.5') \quad i = 0.63212 (n_s + 1)$$

En fait, on n'observe que des rangs  $i$  entiers;  $V_s$  s'obtient donc par interpolation linéaire entre deux nombres  $N_i$  et  $N_{i+1}$ , tels que  $i < i' < i + 1$ . Par exemple, pour  $n = 20$  observations, la valeur caractéristique correspond au rang  $i = 13,274 53$ . Cette estimation de  $V_s$  à partir des observations ordonnées est d'autant plus précise que la différence entre  $N_i$  et  $N_{i+1}$  est plus petite. En pratique, l'interpolation est faite sur  $\log N$  pour des raisons qui seront données au paragraphe 4.

La méthode (2.4) va maintenant être appliquée à l'estimation des probabilités de survie  $\hat{l}_N(S)$  en fonction de la tension pour un nombre constant de cycles. Le procédé usuel est le suivant : Soit  $n_s$  le nombre des éprouvettes essayées sous contrainte  $S$  et durant  $N$  cycles, soit  $n'_s \leq n_s$  le nombre des éprouvettes rompues; les probabilités de survie sont estimées à l'aide des fréquences

$$\hat{l}_N(S) = (n_s - n'_s) / n_s$$

Ces estimations s'annulent pour  $n'_s = n_s$ , c'est-à-dire lorsque tous les spécimens se rompent; elles sont égales à 1 si  $n'_s = 0$ , c'est-à-dire s'il n'y a aucune rupture. Une telle estimation, obtenue à l'aide d'un petit nombre d'éprouvettes est sujette à critique.

Utilisons :

$$(2.6) \quad \hat{l}_N(S) = (n_s - n'_s) / (n_s + 1)$$

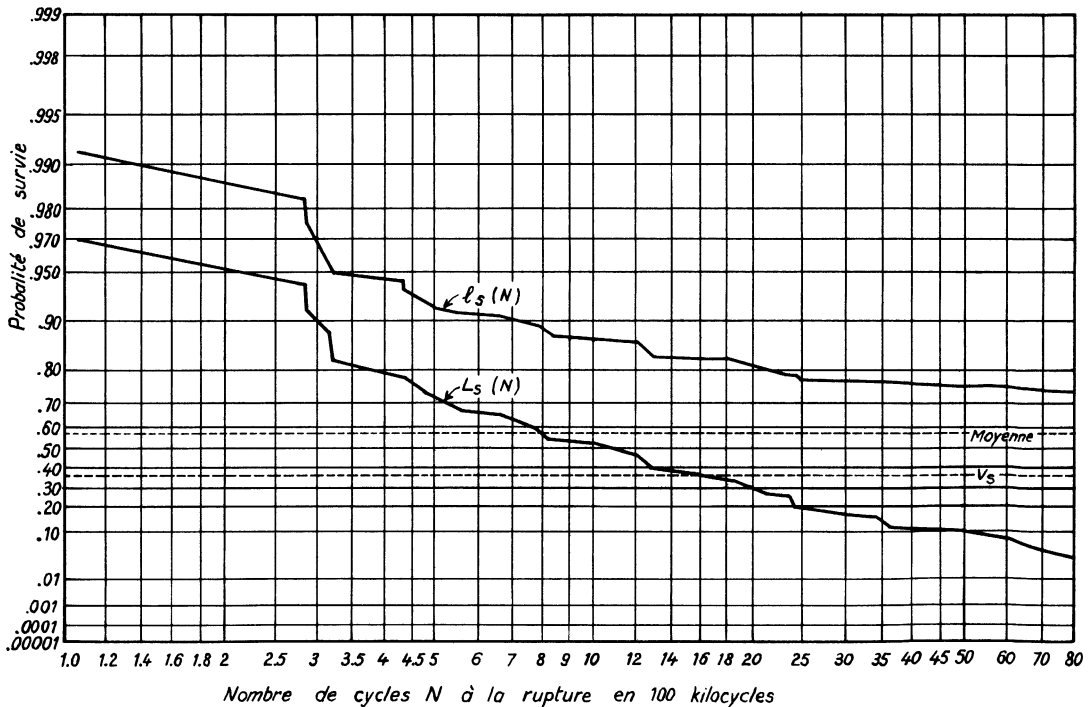
Cette fréquence s'annule aussi pour  $n'_s = n_s$ ; mais si  $n'_s = 0$ , elle converge seulement vers l'unité lorsque  $n_s$  augmente indéfiniment.

L'estimation (2.6) découle de la méthode générale (2.4). Pour le prouver, considérons la fonction de survie partielle  $L_S(N)$  relative aux  $n'_s$  spécimens brisés. L'expression (2.4) fournit la fréquence de survie à la date  $N_i$  de la  $i$ ème rupture.

$$(2.7) \quad \hat{L}_S(N_i) = 1 - \frac{i}{n'_s + 1}$$

Par suite, les  $N_i$  sont les mêmes que ceux considérés dans la série toute entière constituée par les pièces brisées et non brisées. De plus, les séries partielles  $L_S(N)$  sont liées aux séries totales  $l_S(N)$  par (1.5); les deux fréquences (2.6) et

FONCTIONS DE SURVIE PARTIELLE ET TOTALE



Graphique 1



(2.7) des nombres observés  $N_i$  sont conformes puisque (1.5) et (2.6) conduisent à

$$\hat{\ell}_s(N_i) = 1 - \frac{n'_s + 1}{n_s + 1} + \frac{n'_s + 1}{n_s + 1} \left( 1 - \frac{i}{n'_s + 1} \right) = 1 - \frac{i}{n_s + 1}$$

équation qui justifie l'usage de (2.6).

Les deux courbes  $\ell_s(N)$  et  $L_s(N)$  et leurs relations avec  $\ell_\infty(S)$  sont montrées dans le graphique 1; elles ont été tracées à l'aide d'observations faites par Bender [1]. Celui-ci a étudié  $n_s = 122$  spécimens durant  $8 \cdot 10^6$  cycles sous une faible contrainte. Seulement  $n'_s = 32$  spécimens se brisèrent. En conséquence la probabilité de survie permanente est en raison de (2.6) :

$$\ell_\infty(S) = \frac{90}{123} = 0.73171$$

La relation (1.5) entre  $\ell_s(N)$ ,  $L_s(N)$  et l'estimation (2.6) pour  $\ell_N(S)$  est indépendante de l'échelle des ordonnées utilisées. L'échelle du graphique (1) sera expliquée au paragraphe 3.

Expérimentalement, la contrainte  $S$  est fixée à l'intérieur de chaque série et varie entre les séries. Pour la première fonction de survie  $\ell_s(N)$  on observe la variable  $N$  et les probabilités sont estimées à partir des rangs des cycles de rupture. Dans la deuxième fonction de survie  $\ell_N(S)$ , les fréquences sont estimées à partir du nombre relatif des pièces brisées et non brisées, au bout de  $N$  cycles. Par conséquent, l'estimation (2.5) pour  $\ell_s(N)$  assure que les fréquences sont également espacées sur l'échelle des probabilités tandis que ceci n'est plus le cas pour l'estimation (2.6) de  $\ell_N(S)$ .

La formule (2.6) peut aussi être utilisée pour estimer la probabilité de survie permanente. Toutefois, dans l'expérience, le nombre infini de cycles doit être remplacé par un grand nombre, soit  $10^7$ . Puisque la vérification d'une théorie doit être basée sur des observations, nous devons accepter cette restriction, malgré notre désir de faire durer l'expérience un nombre de cycles plus grand.

Si les fréquences d'une survie permanente sont connues pour des valeurs de  $S$  fixées, ou si  $S$  est donné en fonction de ces fréquences, l'extrapolation dans la région des petites fréquences conduit à une contrainte si grande que toutes les pièces essayées se briseraient. Ceci peut être vérifié à l'aide d'observations. D'autre part, l'extrapolation de la fréquence d'une survie permanente au voisinage de l'unité fournit la limite d'endurance. L'existence d'une durée de vie minimum peut être vérifiée par le fait qu'aucun spécimen ne se brise avant cette date sous la contrainte donnée. Mais l'estimation de la limite d'endurance ne peut être rigoureuse puisque le postulat qu'aucune rupture ne se produira jamais ne peut être vérifié.

Les fréquences observées sont entachées d'erreurs d'échantillonnage qui empêchent de mettre en évidence les propriétés théoriques correspondantes. Si l'une quelconque de ces propriétés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , données dans le premier paragraphe n'est pas vraie, ceci peut être dû à l'une ou l'autre des raisons suivantes :

a) Les spécimens, le mode d'expérimentation ou les machines utilisées ne sont pas homogènes. Si des machines différentes sont utilisées ou des parties remplacées, de nouvelles variations sont introduites qui peuvent être dominantes et invalident ainsi l'expérience.

b) Les amplitudes des contraintes correspondant à différentes séries ne sont pas suffisamment distinctes, de sorte que les courbes semblent se chevaucher.

c) Le nombre des observations dans l'une quelconque ou toutes les séries est insuffisant pour justifier une méthode statistique efficace.

d) Les dates de rupture (exprimées en cycles) sont erronées ou insuffisamment précises.

L'expérience a montré qu'une bonne hypothèse de travail consiste à postuler les propriétés théoriques pour les séries estimées. En comparant deux séries  $\hat{L}_s(N)$  on peut ainsi rejeter une observation contradictoire (pourvu qu'il soit clair laquelle est-ce) et utiliser seulement un nombre plus petit d'observations. On peut encore rejeter toute une série d'observations qui contiennent des contradictions évidentes. Le même postulat peut être appliqué aux séries  $\hat{L}_N(S)$ . Si le nombre des pièces testées est petit, il peut arriver que les fréquences augmentent lorsque la tension croît. Une telle estimation contredit la notion de probabilité de survie et nécessite d'autres observations sur les tensions. Si ceci ne peut être fait, une méthode consiste à grouper toutes les pièces testées sous deux tensions voisines, et à attribuer la fréquence résultante de survie à une tension moyenne. Malheureusement ce procédé n'est pas unique puisque nous pouvons combiner toute fréquence choisie soit avec la précédente, soit avec la suivante.

De tels procédés sont raisonnables puisque les propriétés théoriques qui résultent de la notion de probabilité ne sont basées sur aucune hypothèse analytique. En même temps ils sont dangereux, puisqu'ils comprennent souvent des décisions arbitraires.

Maintenant, les fonctions de survie vont être données sous forme analytique. Le nombre des cycles au bout desquels il y a rupture est très grand et est par suite exprimé par milliers. L'influence d'un accroissement de  $N$  doit décroître avec le nombre des cycles déjà écoulés. Il est par suite raisonnable d'admettre que c'est l'accroissement relatif  $\frac{\Delta N}{N}$  qui cause la rupture par fatigue. On est alors conduit à l'hypothèse que la probabilité de rupture est fonction de  $\log N$ . C'est la raison pour laquelle une fonction de survie logarithmico-normale a souvent été utilisée. La durée de vie minimum est alors nulle. De plus, cela implique que la probabilité de survie tende de la même façon vers l'unité lorsque  $\log N$  décroît et vers 0 si  $\log N$  croît. Cette symétrie n'a jamais été observée et il se serait difficile de la justifier physiquement.

Quelques auteurs pensent que la distribution de la durée de vie à la fatigue est exponentielle. Toutefois cette distribution est la seule pour laquelle l'espérance de vie à un instant donné soit indépendante de l'âge. Ainsi, l'utilisation de cette distribution revient à nier l'influence du facteur "âge" que nous sommes en train d'étudier. D'autres études sont basées sur l'hypothèse que les contraintes  $S$  sont normalement distribuées et, ce qui est assez étrange, les mêmes auteurs affirment l'existence d'une limite d'endurance non nulle.

La vérification statistique d'une hypothèse quelconque est fortement handicapée par la rareté des observations concrètes, soit par exemple, 10 éprouvettes pour chaque niveau de contrainte. Les courbes de fréquences établies d'après des échantillons de cet effectif permettent de justifier à peu près n'importe quelle théorie.

Les considérations suivantes conduisent au choix d'une distribution :

1° L'éprouvette qui se brise la première est la moins résistante et elle se brise au bout du plus petit nombre de cycles (ou sous les tensions les plus faibles). La distribution des cycles à rupture (tensions) est donc une distribution de "la plus petite valeur". Chaque cycle est une observation sur la rupture ou la survie. Le nombre de ces observations est grand, nous devons donc utiliser la forme asymptotique de cette distribution.

2° La rupture se produit au point le plus faible de l'élément. Une telle faiblesse est due aux imperfections que nous pouvons considérer comme distribuées

au hasard en grandeur et en position. Le défaut le plus grave est la cause de la rupture. Il est raisonnable de penser que le nombre des cycles (contraintes) nécessaires à la rupture est une fonction linéaire décroissante de la taille du plus grand défaut. Puisque la distribution d'une fonction linéaire décroissante de "la plus grande valeur" est une distribution de la "plus petite valeur", et puisque le nombre des défauts est certainement grand, nous devons utiliser la distribution asymptotique de la plus petite valeur.

3° La résistance de l'éprouvette, mesurée par la distribution du nombre des cycles à rupture doit être de la même forme que celle de la résistance de n'importe quelle partie de cet élément. Les deux distributions doivent donc être les mêmes, aux valeurs des paramètres près. Cette forme de "stabilité" a lieu pour la distribution asymptotique de la plus petite valeur.

### III - THÉORIE ASYMPTOTIQUE DES VALEURS EXTRÊMES

Il est nécessaire d'expliquer brièvement la théorie asymptotique "des plus petites valeurs". Si nous faisons  $i = 1$  dans l'équation (2.2) la loi élémentaire  $\varphi_n(x)$  et la fonction de probabilité  $\Phi_n(x)$  de la plus petite parmi  $n$  valeurs  $x_i = x$  deviennent

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x) &= n [1 - F(x)]^{n-1} f(x) \\ \Phi_n(x) &= [1 - F(x)]^n = 1 - P_n(x). \end{aligned}$$

Ici,  $P_n(x)$  qui est une fonction de survie est la probabilité pour que la plus petite valeur soit supérieure ou égale à  $x$ . Fisher et Tippett[(2)] ont montré l'existence de trois lois limites lorsque  $n$  croît; deux d'entre elles sont d'intérêt ici, notamment la première.

$$(3.2) \quad P^{(1)}(x) = \exp[-e^y]$$

où :

$$(3.2') \quad y = \alpha(x - u)$$

est appelée variable réduite et la troisième :

$$(3.3) \quad P^{(3)}(x) = \exp\left[-\left(\frac{x - \varepsilon}{v - \varepsilon}\right)^\alpha\right];$$

$$\alpha > 0 ; \quad x \geq \varepsilon \geq 0 ; \quad v > \varepsilon$$

La première formule (3.2) est valable pour une variable non bornée à gauche, pourvu que la probabilité initiale  $1 - F(x)$  converge vers 0 au moins aussi rapidement que  $e^{-x}$  lorsque  $x$  croît. La seconde formule convient à une variable bornée par  $\varepsilon$  et satisfaisant à d'autres conditions analytiques. Aucune de ces conditions ne peut en général être vérifiée par les observations.

Dans la première formule (3.2), le paramètre  $\frac{1}{\alpha}$  a la même dimension que  $x$ ; dans la deuxième formule (3.3),  $\alpha$  n'a pas de dimension.

Dans les formules (3.2) et (3.3), les valeurs  $x = u$  ou  $x = v$  correspondent à la probabilité :

$$(3.4) \quad P^{(1)}(u) = \frac{1}{e} = P^{(3)}(v)$$

Les paramètres  $u$  et  $v$  sont appelés "les plus petites valeurs caractéristiques".

La transformée linéaire d'une valeur extrême a la distribution d'une valeur extrême. Par suite, dans les deux formules, la distribution exacte du minimum de la "plus petite valeur" est encore la distribution asymptotique de la plus petite valeur à un changement de paramètre près. Cette propriété est appelée "stabilité".

La première formule (3.2) est connue des actuaires comme la fonction de survie de Gompertz

$$(3.5) \quad l(x) = C \exp \left[ - e^{\alpha(x-u)} \right]$$

L'introduction du paramètre C est nécessaire pour que les âges de décès ne soient pas négatifs. Le sens philosophique de cette formule est que la mort frappe à chaque âge l'individu le moins résistant.

La relation entre la variable réduite y et la probabilité  $P^{(1)}(x)$  obtenue à l'aide de (3.2) et (3.2') est :

$$(3.6) \quad y = \log (- \log P^{(1)}(x))$$

La probabilité  $P^{(1)}(x)$  égale  $10^{-3}$  pour  $y = 2,443 46$  et augmente lorsque y diminue. Elle atteint  $0,95 143$  à  $y = -3$  et  $1 - 10^{-5}$  à  $y = - 11,51 292$ . Une table de la fonction (3.6) a été publiée par le National Bureau of Standards (6). Elle peut être utilisée pour construire une échelle graphique graduée en probabilités où les longueurs sont proportionnelles à la valeur de la variable réduite y. Si x est porté en abscisses et si la théorie est exacte, les plus petites valeurs observées sont alors dispersées autour de la droite ascendante (3.2') qu'on peut écrire :

$$(3.7) \quad x = u + \frac{y}{\alpha}$$

Le mode de la variable réduite y est nul et le mode  $\tilde{x}$  de la variable x coïncide avec la valeur caractéristique.

$$(3.8) \quad \tilde{x} = u$$

La fonction génératrice des moments  $G_x(t)$  est :

$$(3.9) \quad G_x(t) = e^{ut} \Gamma \left( 1 + \frac{t}{\alpha} \right)$$

Les deux paramètres u et  $1/\alpha$  peuvent être estimés à l'aide de la moyenne empirique m et de l'écart type s par les formules :

$$(3.10) \quad \hat{u} = m + \frac{\gamma}{\alpha} ; \quad \frac{1}{\hat{\alpha}} = \frac{s \sqrt{6}}{\pi}$$

où  $\gamma = 0,57722$  est la constante d'Euler.

Dans un procédé un peu différent, la moyenne  $\gamma$  et l'écart type  $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$  sont remplacés par la moyenne  $\bar{y}_n$  et l'écart type  $\sigma_n$  calculés à partir d'échantillons de taille n. Une table  $\bar{y}_n$  et  $\sigma_n$  est donnée dans [3]

L'asymétrie est constante

$$(3.10') \quad \sqrt{\beta_1} = - 1, 13 960$$

et la distance réduite du mode à la moyenne

$$(3.10'') \quad \frac{(u - \bar{x})}{\sigma} = \gamma \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0,45005$$

Enfin,  $\beta_2$  est donné par :

$$(3.10''') \quad \beta_2 = 5,4$$

Considérons maintenant la probabilité  $P^{(3)}(x)$ . La formule (3.3) a été obtenue par W. Weibull pour la probabilité de survie exprimée en fonction de la contrainte sur une base purement heuristique. Le cas  $\alpha = 1$  est celui de la loi exponentielle. Cependant, toutes les applications aux problèmes de fatigue ont conduit à des estimations  $\hat{\alpha} > 1$ . Le cas  $\alpha = 2$ ;  $\varepsilon = 0$  est celui d'une loi de Rayleigh et se rencontre en analyse des trajets aléatoires.

La fonction (3.3) se réduit à la première fonction (3.2) au moyen de la transformation :  $x - \varepsilon = e^z$ ;  $v - \varepsilon = e^u$ .

Par suite,  $\log [x - \varepsilon]$  dans la troisième distribution asymptotique suit la première loi. L'usage d'un papier gradué en probabilités de valeurs extrêmes conduit à une droite pour la représentation de la loi du logarithme de la variable, pourvu que la limite inférieure  $\varepsilon$  soit nulle. Dans ce cas nous introduisons la transformation :

$$(3.11) \quad \alpha [\lg x - \lg v] = y = \alpha' [\log x - \log v]$$

dans (3.3). Dans (3.11),  $\lg$  est un logarithme naturel et  $\log$  est un logarithme décimal. Par suite les paramètres  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont liés par :

$$(3.12) \quad \alpha' = 2,30\,259\,\alpha$$

Si la théorie est valable avec  $\varepsilon = 0$ , les logarithmes des plus petites valeurs observées doivent être répartis au voisinage de la droite :

$$(3.13) \quad \log x = \log v + \frac{y}{\alpha'}$$

L'estimation des paramètres de (3.11) est :

$$(3.14) \quad \log \hat{v} = \overline{\log x} + \frac{\bar{y}}{\hat{\alpha}'} ; \quad \frac{1}{\hat{\alpha}'} = \sqrt{6} s (\log x) / \pi$$

Si la limite inférieure  $\varepsilon$  diffère de 0, les probabilités  $P^{(3)}(x)$  sont pour de petites valeurs de  $x$  systématiquement supérieures aux valeurs trouvées à l'aide de la droite (3.13).

Il y a un mode si, et seulement si  $\alpha > 1$ . La valeur  $\tilde{x}$  est obtenue à l'aide de (3.3) après deux différenciations et est la solution de :

$$(3.15) \quad \frac{\tilde{x} - \varepsilon}{v - \varepsilon} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} ; \quad \alpha > 1.$$

Le quotient (3.15) fonction de  $1/\alpha$  est fourni dans la table I.

TABLE I  
Valeurs de  $(1 - 1/\alpha)^{1/\alpha}$  et  $\beta_2$  en fonction de  $1/\alpha$

$1/\alpha$	$(1 - 1/\alpha)^{1/\alpha}$	$\beta_2$	$1/\alpha$	$(1 - 1/\alpha)^{1/\alpha}$	$\beta_2$
0,01	0,999899	5.06	0,1	0,98952	3.5700
0,02	0,999596	4.81	0,2	0,95635	2.8803
0,03	0,999087	4.67	0,3	0,89852	2.7146
0,04	0,998368	4.4534	0,4	0,81519	2.8574
0,05	0,997438	4.2641	0,5	0,70711	3.2454
0,06	0,996295	4.1012	0,6	0,57708	3.8559
0,07	0,994933	3.9496	0,7	0,43051	4.6984
0,08	0,993352	3.8100	0,8	0,27595	5.8022
0,09	0,991548	3.6843	0,9	0,12589	7.2143
			1,0	0,00000	9.0000

En suite, de (3.15), il résulte :

$$(3.16) \quad \frac{v - \bar{x}}{v - \varepsilon} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

Le mode est d'autant plus près de la plus petite valeur caractéristique que  $1/\alpha$  est plus petit.

Les moments réduits d'ordre  $r$  sont :

$$(3.17) \quad \left(\frac{\bar{x} - \varepsilon}{v - \varepsilon}\right)^r = \Gamma\left(1 + \frac{r}{\alpha}\right)$$

Il en résulte que, pour  $r = 1$ , la valeur caractéristique et la moyenne sont liées par :

$$(3.17') \quad \bar{x} - \varepsilon = (v - \varepsilon) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

d'où, pour toute valeur de  $\alpha > 1$ ,

$$(3.18) \quad \bar{x} - \varepsilon \geq (v - \varepsilon) 0,88560$$

et pour  $\varepsilon = 0$ ,

$$(3.18') \quad \bar{x} > 0,88560 v$$

Tant que  $\alpha > 1$ , la formule (3.18) peut servir de critère de validité de la théorie et de l'estimation de  $v$ .

En raison de (3.17), les trois paramètres  $\alpha$ ,  $v$  et  $\varepsilon$  peuvent être estimés à l'aide du coefficient d'asymétrie  $\sqrt{b_1}$ , de l'écart-type  $s$  et de la moyenne empirique  $m$  en utilisant la formule :

$$(3.19) \quad \sqrt{b_1} = \left[ \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) - 3 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + 2 \Gamma^3\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right] B^3(\alpha)$$

Soit  $\hat{\alpha}$  la solution de cette équation, alors on obtient :

$$(3.20) \quad \hat{v} = m + s A(\hat{\alpha}) \quad ; \quad \hat{\varepsilon} = \hat{v} - s B(\hat{\alpha})$$

où les fonctions  $A(\alpha)$  et  $B(\alpha)$  sont définies par :

$$(3.21) \quad B(\alpha) = \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right]^{-1/2}$$

$$A(\alpha) = \left[ 1 - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right] B(\alpha).$$

Une table des trois fonctions  $\sqrt{\beta_1(\alpha)}$ ,  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  est donnée dans [4].

Lorsque  $1/\alpha$  croît, l'asymétrie augmente alors  $B(\alpha)$  diminue rapidement, tandis que  $A(\alpha)$  décroît lentement. L'estimation de  $v$  est très peu influencée par l'estimation de  $\alpha$ .

Le coefficient  $\beta_2$  calculé d'après (3.17) a une expression analogue à (3.19), soit :

$$(3.22) \quad \beta_2(\alpha) = \left[ \Gamma\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right) - 4 \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + 6 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - 3 \Gamma^4\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right] B^4(\alpha)$$

La table 1 fournit quelques valeurs numériques de  $\beta_2$ . Elles sont portées en fonction de  $\sqrt{\beta_1}$  sur le graphique 2.

Il résulte de (3.3), (3.15) et (3.17') que la médiane, le mode et la moyenne dépendent des trois paramètres  $v$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ , tandis que  $v$ , la valeur caractéristique, est elle-même l'un des paramètres. Il suit que le paramètre de localisation  $v$  est mieux adapté pour caractériser les plus petites valeurs que la moyenne, le mode ou la médiane.

La distribution asymptotique normale de la moyenne est valable pour la moyenne géométrique de la troisième distribution asymptotique. Si nous posons pour les valeurs réduites :

$$(3.23) \quad z = \frac{x - \varepsilon}{v - \varepsilon}$$

la fonction génératrice des moments de  $\lg z$  est, d'après (3.9) :

$$G_{\lg z}(t) = \Gamma\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)$$

et la fonction génératrice des moments  $G_{\lg \bar{z}}(t)$  de la moyenne géométrique de  $n$  observations de  $z$  est :

$$G_{\lg \bar{z}}(t) = e^{n \log \Gamma(1+t/na)}$$

Le développement classique du logarithme de la fonction Gamma donne

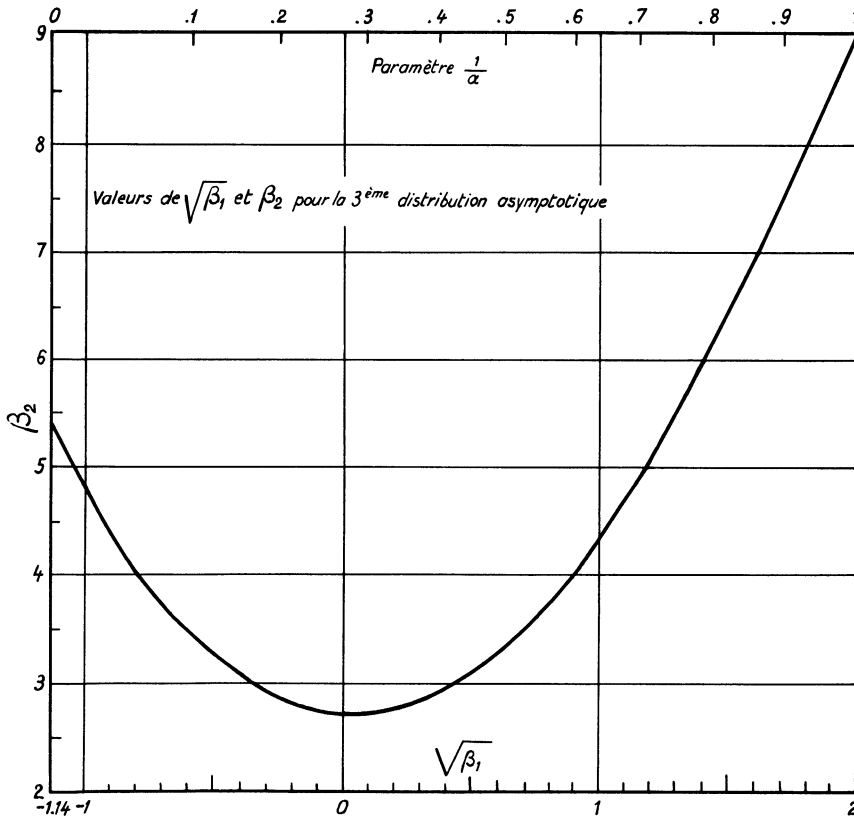
$$(3.24) \quad G_{\lg \bar{z}}(t) = \exp \left[ n \left( -\frac{\gamma t}{n\alpha} + \frac{s_2 t^2}{2n^2\alpha^2} - \frac{s_3 t^3}{3n^3\alpha^3} + \dots \right) \right]$$

où les

$$(3.24') \quad s_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{-\nu}, \quad \text{pour } \nu \geq 2 \quad (s_2 = \frac{\pi^2}{6})$$

convergent rapidement vers l'unité pour des valeurs croissantes de  $\nu$ . Pour de grandes valeurs de  $n$ , l'expression asymptotique de (3.24) devient :

$$(3.25) \quad G_{\lg \bar{z}}(t) \approx \exp \left[ -\frac{\gamma t}{\alpha} + \frac{s_2 t^2}{2n\alpha^2} \right]$$



Graphique 2

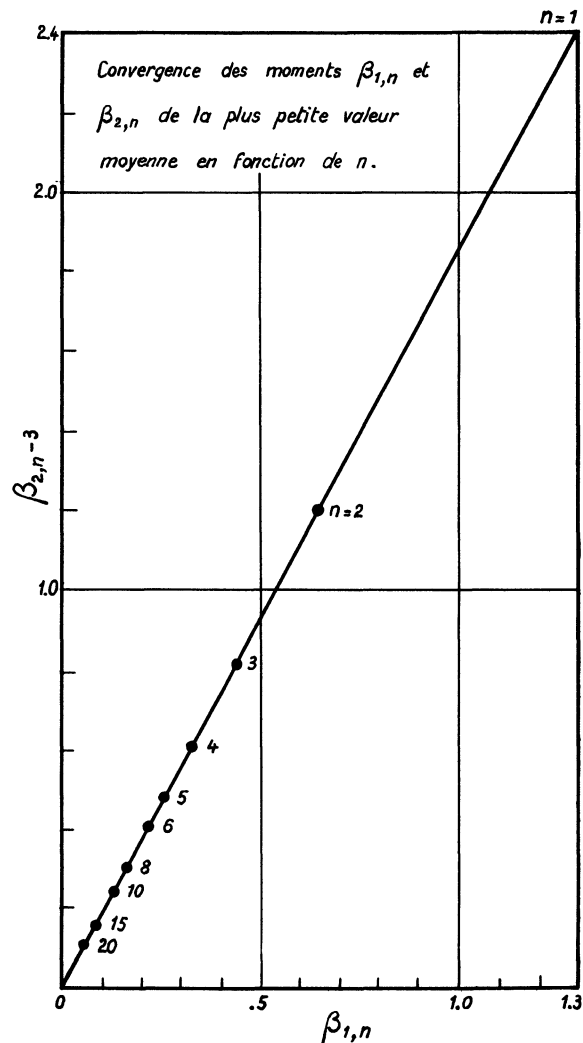
C'est la fonction génératrice des moments d'une variable normale dont la moyenne est  $\frac{\gamma}{\alpha}$  et la variance  $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6n\alpha^2}$

Par conséquent, la moyenne géométrique des différences entre la variable et sa valeur minimum est asymptotiquement normalement distribuée avec moyenne

$$\overline{\log(x - \varepsilon)} = \log(v - \varepsilon) = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Il reste à étudier la rapidité de la convergence vers cette distribution asymptotique. Considérons à cet effet les moments  $\beta_{1,n}$   $\beta_{2,n}$  de la moyenne géométrique. D'après (3.25), (3.10') et (3.10'') on a :

$$(3.25') \quad \begin{aligned} \beta_{1,n} &= -1,29857/n \\ \beta_{2,n} - 3 &= 2,4/n \end{aligned}$$



Graphique 3

Ces valeurs sont portées en fonction de  $n$  sur le graphique 3; on en déduit la validité de l'approximation normale dès que  $n \geq 20$ . Cette propriété peut être utilisée pour tester la signification des différences de moyennes géométriques observées pourvu que l'on connaisse des estimations de  $\alpha$  et  $\varepsilon$ .



Lorsque  $\alpha$  est grand, la distribution est très concentrée et ce cas mérite une considération spéciale; il conduit à une nouvelle relation entre la première et la troisième distribution asymptotique des "plus petites valeurs". Si nous posons :

$$(3.26) \quad \frac{x - \varepsilon}{v - \varepsilon} = 1 + \frac{y}{\alpha}$$

la probabilité  $P^{(3)}(x)$  considérée en (3.3) converge vers :

$$P^{(3)}(x) = \exp \left[ - e^y \right]$$

c'est la probabilité (3.2) écrite sous la forme

$$P^{(1)}(x) = \exp \left[ - e^{\delta(x-v)} \right]; \quad \delta = \frac{\alpha}{v - \varepsilon}$$

Pour de grandes valeurs de  $\alpha$ , la valeur caractéristique  $v$  subsiste et elle devient en même temps la valeur la plus probable. Le paramètre de dispersion est réduit et la limite supérieure disparaît.

Pour de grandes valeurs de  $\alpha$ , il est indifférent d'utiliser  $\log x$  ou  $x$  elle-même lorsque l'on marque les points sur le papier graphique gradué en probabilités de valeurs extrêmes.

Il reste à étudier les valeurs limites des fonctions (3.15), (3.19), (3.21) et (3.22). Elles convergent vers les valeurs qu'elles prennent pour la première loi de probabilité, notamment :

$$\frac{\tilde{x} - \varepsilon}{v - \varepsilon} = 1 \quad ; \quad \begin{array}{l} A(\alpha) = 0,45005 \\ \text{Limite} \end{array} \quad ; \quad \sqrt{\beta_1} = -1,1396 \quad ; \quad \beta_2 = 5,4$$

Ces valeurs limites expriment les conditions de validité de la troisième distribution. Ainsi, cette dernière peut être utilisée lorsque les valeurs observées sont telles que :

$$(3.27) \quad \sqrt{b_1} > -1,1396 \quad (v - m)/s < 0,45005$$

#### IV - LES FONCTIONS DE SURVIE ET LE DIAGRAMME $(S, N)_2$ POUR $N_0 = 0, S_0 = 0$

Puisque nous avons vu au paragraphe 2 que  $N$  et  $S$  peuvent être considérés comme les plus petites valeurs d'une variable non négative, la troisième distribution asymptotique va maintenant être utilisée aux durées de vie à la fatigue et aux contraintes. Faisons d'abord l'hypothèse que la durée de vie minimum s'annule. Dans ces conditions, la probabilité de survie à contrainte constante, fonction du nombre de cycles, s'obtient à l'aide de (3.3) en remplaçant  $x$  par  $N$ ,  $P^{(3)}$  par  $l_s(N)$  et  $v$  par  $V_s$ ,  $\alpha$  par  $\alpha_1$  et  $\varepsilon$  par 0; soit :

$$(4.1) \quad l_s(N) = \exp \left[ \left( - \frac{N}{V_s} \right)^{\alpha_1} \right]$$

Le nombre caractéristique des cycles à rupture défini par :

$$(4.2) \quad l_s(V_s) = 1/e$$

décroit lorsque  $S$  croît (paragraphe 1).

La transformation :

$$(4.3) \quad x = \lg N, \quad u_s = \lg V_s$$

conduit à la première distribution asymptotique (3.2). Par suite les deux paramètres peuvent être estimée à l'aide de (3.10). Si nous posons comme dans (3.6)

$$(4.4) \quad y = \lg \left[ - \lg \ell_S(N) \right]$$

la relation (4.1) prend la forme

$$(4.5) \quad y = \alpha_1 (x - u_s)$$

ou, en raison de (4.3) et (3.12)

$$(4.6) \quad \lg N = \lg V_S + \frac{y}{\alpha_1}$$

$$\log N = \log V_S + \frac{y}{\alpha_1}$$

Les fonctions de survie  $\ell_S(N)$  sont des droites qui passent par les différentes valeurs  $V_S$  pour  $y = 0$ , et se déplacent vers la droite lorsque  $S$  décroît. Comme ces droites ne doivent pas se couper, leur pente (paramètre  $\alpha_1$ ) est indépendante de  $S$ .

Toutefois, en raison des fluctuations d'échantillonnage, les estimations de  $\alpha_1$  diffèrent avec  $S$ . Le domaine acceptable de variation de ces estimations ne peut être établi a priori puisqu'il est fonction des écarts entre les niveaux de contraintes, c'est-à-dire de l'expérimentation. On est ainsi amené au problème d'obtenir une seule valeur représentative  $1/\hat{\alpha}$  valable quelle que soit la contrainte. Dans ce but, on peut, ou bien calculer la moyenne arithmétique des estimations de  $1/\alpha$  obtenues pour différentes contraintes, ou bien construire une fonction de survie unique fictive, indépendante de la contrainte : Pour  $k$  contraintes et  $n$  spécimens utilisés à chaque niveau de contrainte, soit :

$$(4.7) \quad N_{S,i} / V_{S,i} = Z_{S,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) ;$$

le nombre relatif des cycles atteints à chaque fréquence. On a suivant (2.5) :

$$\hat{\ell}_i (Z_{S,i}) = 1 - \frac{i}{n+1}$$

Prenons les moyennes  $\overline{Z}_i$  des  $k$  valeurs obtenues au rang  $i$ , nous obtiendrons de manière analogue à (4.1) la fonction de survie unique :

$$(4.8) \quad \ell_i (\overline{Z}_i) = \exp - Z_i^{\overline{\alpha}}$$

L'expression (3.10) fournit l'estimation :

$$(4.9) \quad \frac{1}{\overline{\alpha}} = \sqrt{6} s (\log \overline{Z}_i) / \pi ;$$

de la valeur connue de  $1/\alpha$  indépendante des tensions.

Pour obtenir les relations entre  $V_S$  et  $S$ , et entre  $\sigma_S(N)$ , l'écart-type de  $N$ , et  $S$ , considérons la probabilité de survie  $\ell_N(S)$  comme fonction de la contrainte  $S$  pour un nombre constant de cycles. Pour des raisons données au paragraphe 2, nous utilisons encore la troisième distribution asymptotique de la plus petite valeur et faisons tout d'abord l'hypothèse que les durées  $S_{0,N}$  s'annulent. Si dans (3.3) nous remplaçons  $x$  par  $S$ ,  $v$  par  $S_v$ ,  $P^{(3)}(x)$  par  $\ell_N(S)$ ,  $\alpha$  par  $\beta_1$ , et posons  $\varepsilon = 0$ , nous obtenons :

$$(4.10) \quad \ell_N(S) = \exp \left[ - \left( \frac{S}{S_v} \right)^{\beta_1} \right]$$

où  $S_v$  est de nouveau la contrainte caractéristique de rupture. La fonction de survie tracée sur du papier logarithmique correspondant à la loi de la plus petite valeur est constituée de nouveau par des droites parallèles de pente  $\beta_1$  constante.

Les contraintes S peuvent être mesurées en livres par pouce carré\* ou en kg/mm<sup>2</sup>. Pour obtenir une échelle abstraite, nous introduisons une tension fictive  $\Sigma$  dont la signification sera expliquée tout à l'heure.

$$(4.10') \quad l_N(S) = \exp \left[ - \left( \frac{S/\Sigma}{S_V/\Sigma} \right)^{\beta_1} \right]$$

Il reste à montrer que les hypothèses relatives à  $l_S(N)$  et  $l_N(S)$  sont compatibles. A cette fin, considérons d'abord le nombre caractéristique  $V_S$ . Les expressions (4.1) et (4.10') sont compatibles si :

$$(4.11) \quad V_S^{-\alpha_1} = \left( \frac{S}{\Sigma} \right)^{\beta_1} \quad ; \quad (S_V/\Sigma)^{\beta_1} = N^{-\alpha_1}$$

Ces deux équations doivent être identiques; elles fournissent  $V_S$  en fonction de S et  $S_V$  en fonction de N, notamment :

$$(4.11') \quad \log V_S = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \log \Sigma - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \log S ;$$

$$\log S_V = \log \Sigma - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \log N.$$

On en déduit que  $\Sigma$  est une contrainte si grande que  $V_\Sigma$  est égale à l'unité, la valeur de  $\Sigma$  est par suite peu différente de la contrainte statique caractéristique. Comme les deux paramètres  $\beta_1$  et  $\alpha_1$  sont positifs, log  $V_S$  décroît linéairement en fonction de log S et, de même, log  $S_V$  en fonction de log N; la courbe  $(S, N)_{y_e}$  est une droite de pente :

$$(4.12) \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

Ce résultat peut être vérifié en portant les valeurs estimées de  $V_S$  en fonction de S sur du papier doublement logarithmique. Si, pour de petites contraintes, les valeurs de  $V_S$  s'écartent systématiquement de la droite, ceci peut être considéré comme l'indication que la durée de vie minimum n'est plus nulle.

Les autres courbes  $(S, N)_l$  s'obtiennent en choisissant des valeurs de y différentes de zéro. En raison de (4.6), ces droites deviennent :

$$(4.13) \quad \log N = \text{constante} - \gamma_1 \log S + y / \alpha_1$$

L'unique valeur de  $1/\alpha$  est tirée de (4.9).

La relation linéaire (4.13) entre les logarithmes de N et de S, pour des valeurs constantes de la probabilité de survie a souvent été observée. Quelques ingénieurs proposent d'y substituer une relation linéaire entre log N et S. Etant donné que la grandeur des contraintes utilisées dans les expériences ne varie que dans le rapport de un à deux (ou moins), la représentation graphique ne peut guère conduire à une claire distinction entre les deux hypothèses.

Si  $10^{-5}$  est négligé devant l'unité, les deux droites qui correspondent à  $y = 2,45$  et  $y = -11,51$  déterminent la frontière entre les domaines de survie certaine et de rupture certaine.

Si  $N_0$  diffère de zéro mais est indépendant de S et (ou si  $S_0$  diffère de zéro mais est indépendant de N) la linéarité logarithmique est encore vraie pour  $N - N_0$  en fonction de  $S - S_0$ . Mais cette relation linéaire n'est plus valable si  $N_{0,S}$  dépend de S et, par suite  $S_{0,N}$  dépend de N.

Après avoir estimé la pente  $\gamma_1$  à l'aide de (4.11'), la pente  $\beta_1$  des probabilités de survie en fonction du logarithme de la contrainte est estimée à l'aide de (4.12).

\* Système (malheureusement) encore en usage aux Etats-Unis.

L'écart type  $\sigma_S(N)$  de  $N$  en fonction de  $S$  est obtenu au moyen de (3.17) pour  $\varepsilon = 0$ , soit :

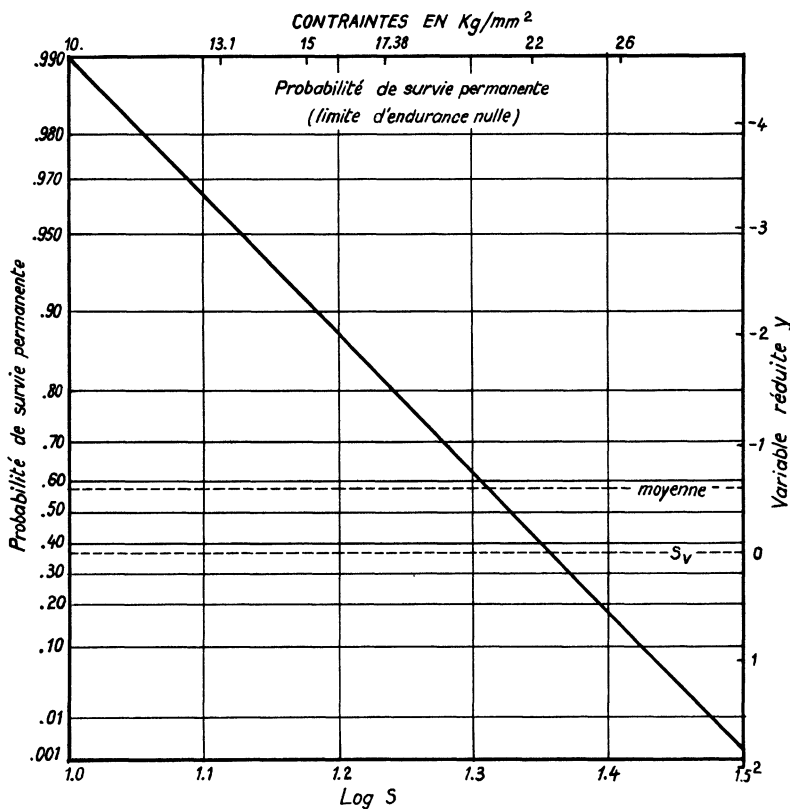
$$(4.14) \quad \sigma_S(N) = V_S / B(\alpha_1)$$

d'où, en tenant compte de (4.11') et (4.12)

$$(4.14') \quad \log \sigma_S(N) = \text{constante} - \log B(\alpha_1) - \gamma_1 \log S$$

Le logarithme de l'écart type de  $N$  décroît linéairement en fonction du logarithme des contraintes, tandis que l'écart type du logarithme de  $N$  est indépendant de  $S$ . Ainsi les écarts types peuvent être utilisés pour contrôler la validité de la théorie et, en particulier, l'hypothèse que les durées de vie minima et les durées s'annulent.

La probabilité d'une survie permanente fonction de  $S$  peut aussi être analysée à l'aide de (4.10) pourvu que la limite d'endurance s'annule. Les contraintes dans cette formule sont ainsi des contraintes de fatigue. Enfin, cette méthode peut servir à la construction de la probabilité de survie totale (1.5) en fonction du



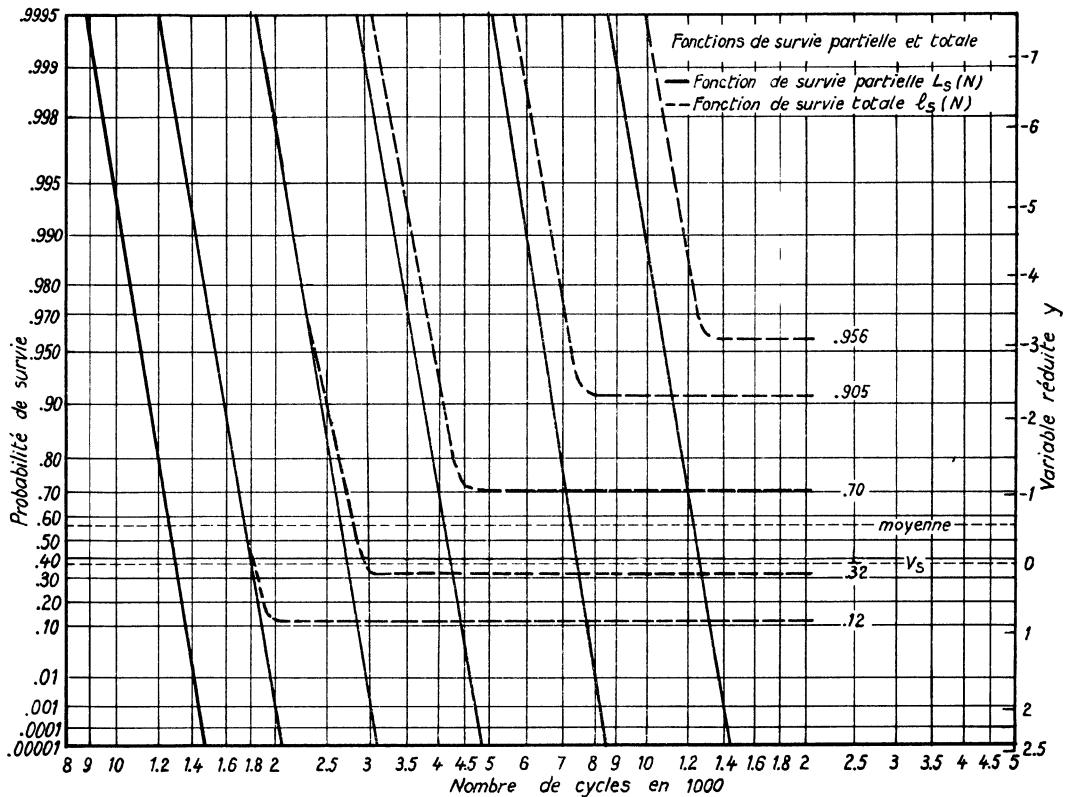
Graphique 4

nombre de cycles. Vu le manque d'observations systématiques portant sur la survie permanente, des observations fictives sont données au tableau 2. La première et la deuxième colonne sont choisies de manière à donner une droite en coordonnées de probabilité, comme indiqué sur le graphique 4. Ceci implique l'hypothèse que la limite d'endurance est nulle. De plus, nous faisons l'hypothèse que les durées de vie caractéristiques dans les fonctions de survie partielles sont celles données dans la troisième colonne, que les durées de vie minima sont

TABLE II

Schéma d'une fonction de survie totale

Contrainte en kg/mm <sup>2</sup>	Probabilité de survie permanente $\ell_{\infty}(S)$	Vie caractéristique (en 10 <sup>3</sup> cycles) $V_S$
31	--	13
26	0,120	18
22	0,320	27
17,38	0,700	43
15,00	0,905	74
13,10	0,956	128

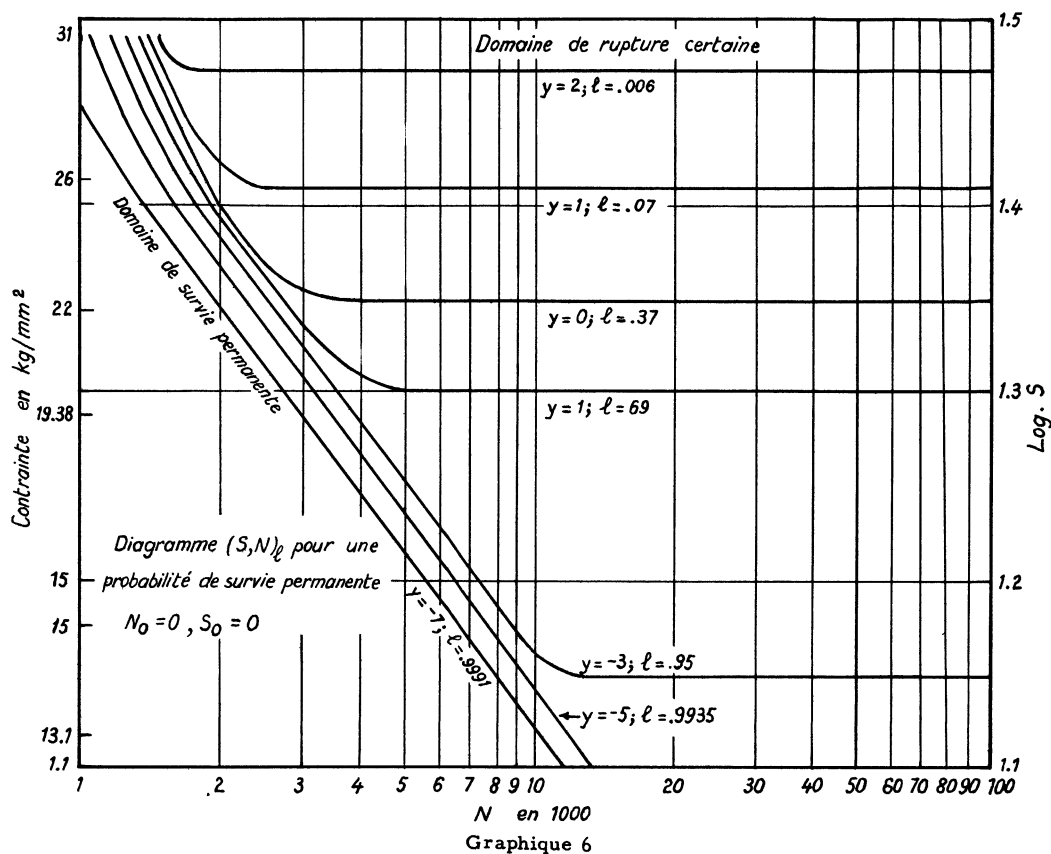


nulles, et que  $1/\alpha_1 = 0,05$  est indépendant de la contrainte. Les fonctions de survie partielle

$$(4.15) \quad L_S(N) = \exp \left[ - \left( \frac{N}{V_S} \right)^{-0,05} \right]$$

ainsi obtenues sont tracées sur le graphique 5. La formule (1.5) et les valeurs de  $\ell_{\infty}(S)$  de la table 2 conduisent aux fonctions de survie totales  $\ell_S(N)$  tracées également sur le graphique 5. On voit que les durées de vie minimum et les durées nulles sont compatibles avec l'existence de probabilités de survie permanente et qu'il n'est pas nécessaire de tronquer la distribution des durées de vie. L'exis-

tence d'une probabilité de survie permanente réduit considérablement le domaine de rupture certaine sur le diagramme représentatif de  $(S, N)_\ell$  tracé sur le graphique 6. Pour toutes les combinaisons de S et N où  $\ell_S(N) = \ell_\infty(S)$ , les valeurs de  $S_\ell$  fonction de N ne décroissent plus lorsque N croît. Elles deviennent au contraire des parallèles à l'axe des N. Le nombre des cycles N à partir duquel la courbe



est parallèle à l'axe des N est d'autant plus petit que la probabilité  $\ell$  est elle-même plus petite. Contrairement à l'opinion courante, le parallélisme des courbes  $(S, N)_\ell$  ne prouve pas l'existence d'une limite d'endurance non nulle; l'extrapolation de  $\ell_\infty(S)$  au voisinage de l'unité peut donner zéro (voir le tableau 2).

Les formules de ce paragraphe ont fourni des expressions analytiques des fonctions de survie en fonction de N et S, les probabilités de survie permanente et le diagramme  $(S, N)_\ell$  dans le cas simple où les durées de vie minima et d'endurance s'annulent ou sont constantes.

## V - DURÉE DE VIE MINIMUM ET LIMITE D'ENDURANCE

Dans le modèle précédent, une probabilité de rupture existe même au premier cycle. Ceci conduit à un ajustement correct aux observations faites sur le cuivre, l'aluminium et le nickel soumis à des contraintes très élevées [4]. Toutefois, pour de faibles tensions, nous devons utiliser (3.3) avec une durée de vie minimum non nulle  $N_{0S}$ .

Les substitutions utilisées précédemment donnent la fonction de survie

$$(5.1) \quad \ell_s(N) = \exp \left[ - \left( \frac{N - N_{0,s}}{V_s - N_{0,s}} \right)^{\alpha_s} \right] \quad \text{si } N \geq N_{0,s}$$

$$= 1 \quad \text{si } N < N_{0,s}$$

avec

$$(5.2) \quad \ell_s(V_s) = 1/e$$

Dans le modèle précédent, le paramètre  $\alpha$  était indépendant de  $S$  et ses estimations à partir de la fonction de survie pour différentes tensions différaient seulement en raison des fluctuations d'échantillonnage. Puisque les fonctions de survie ne sont plus linéaires, nous écrirons maintenant  $\alpha_s$  au lieu de  $\alpha_1$ . D'un point de vue purement logique,  $\alpha_s$  peut être indépendant de  $S$ , bien que  $N_{0,s}$  soit une fonction décroissante de  $S$ . Les observations conduisent à l'hypothèse que  $\frac{1}{\alpha_s}$  est également une fonction décroissante de  $S$ . On se demande comment l'estimation  $\hat{N}_{0,s} = 0$  ou  $\hat{N}_{0,s} > 0$ , influence celle de  $\alpha$ . Ce problème se rencontre lorsque l'on passe d'un modèle linéaire qui a donné un ajustement suffisant pour les contraintes élevées au présent modèle à 3 paramètres utilisé pour les faibles contraintes. Il existe donc des contraintes intermédiaires où l'on ne voit pas clairement lequel des deux modèles utiliser. Les variances pour les modèles à deux et trois paramètres sont respectivement (voir 4.14)

$$(5.3) \quad \sigma_s^2(N) = V_s^2 / B^2(\alpha_1)$$

et

$$(5.3') \quad \sigma^2(N - N_{0,s}) = (V_s - N_{0,s})^2 / B^2(\alpha_s)$$

Les estimations  $\frac{1}{\alpha_s}$  et  $\frac{1}{\hat{\alpha}_1}$ , dues aux mêmes observations, sont alors reliées par :

$$(5.3'') \quad V_s^2 / B^2(\hat{\alpha}_1) = (V_s - N_{0,s})^2 B^2(\hat{\alpha}_s) < V_s^2 / B^2(\hat{\alpha}_s)$$

d'où

$$B(\hat{\alpha}_s) < B(\hat{\alpha}_1)$$

Puisque  $B(\alpha)$  est une fonction décroissante de  $1/\alpha$ ,

$$(5.4) \quad \frac{1}{\hat{\alpha}_1} < \frac{1}{\hat{\alpha}_s}$$

Si les mêmes observations sont interprétées au moyen de deux modèles et si la méthode des moments est utilisée pour l'estimation des paramètres, alors  $1/\hat{\alpha}_s$  du modèle à 3 paramètres est supérieur à  $1/\hat{\alpha}_1$  de la théorie linéaire. Voir [4]

La valeur la plus probable du nombre de cycles à la rupture  $\tilde{N}_s$  obtenue après deux différenciations de (5.1) est :

$$(5.5) \quad \tilde{N}_s = N_{0,s} + (V_s - N_{0,s}) \left( 1 - \frac{1}{\alpha_s} \right)^{\frac{1}{\alpha_s}}$$

La distance du mode au nombre caractéristique, relativement à celle du nombre caractéristique à la vie minimum est :

$$(5.6) \quad \frac{V_s - \tilde{N}_s}{V_s - N_{0,s}} = 1 - \left( 1 - \frac{1}{\alpha_s} \right)^{\frac{1}{\alpha_s}} < 1$$

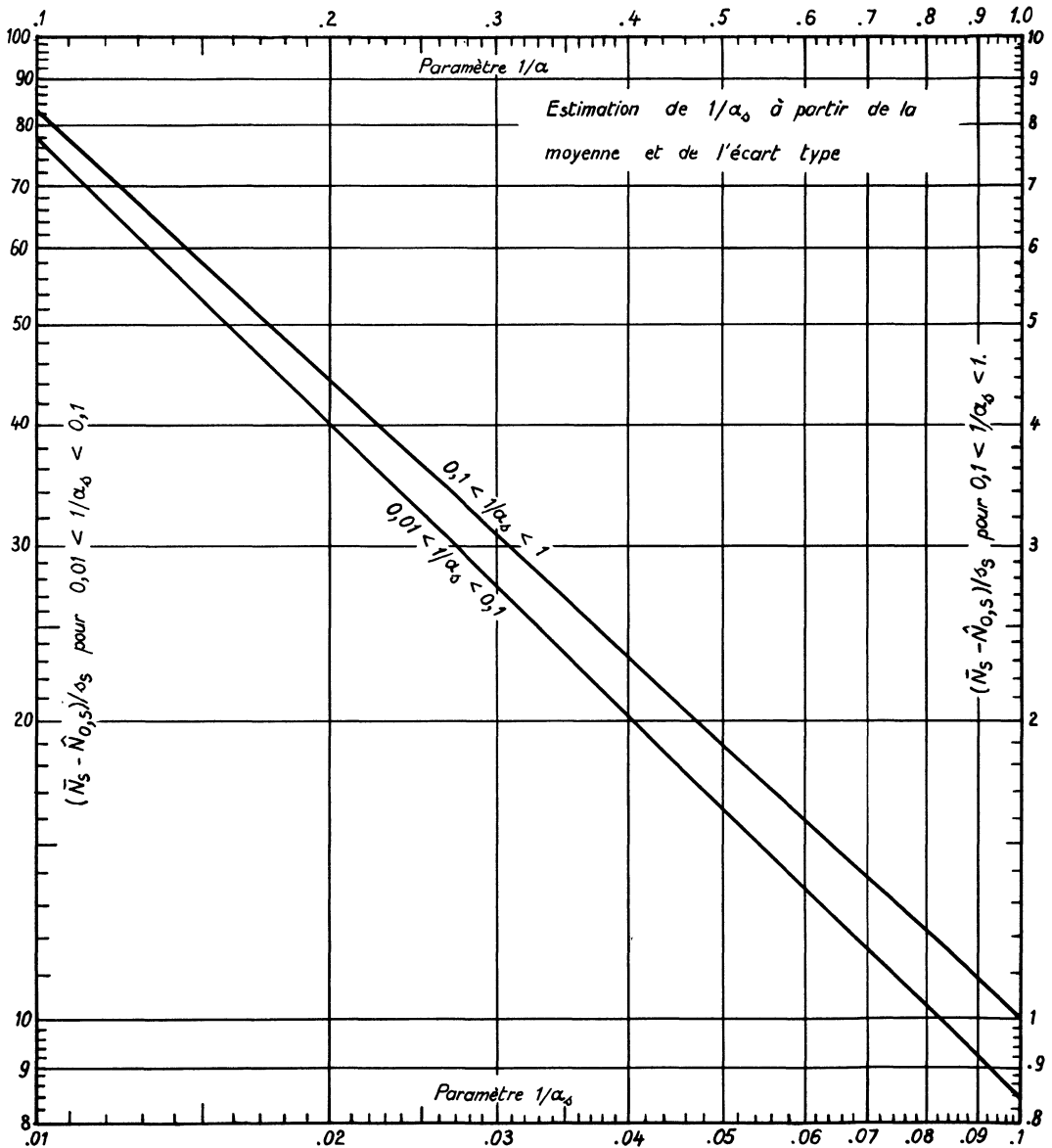
C'est une fonction décroissante de  $1/\alpha_s$  et la table (1) est valable pour  $N_{0,s} \geq 0$

Pour représenter graphiquement les cycles à rupture, on utilise la variable réduite  $y$  définie par (4.5). L'équation (5.1) devient alors, par analogie à (4.6) :

$$(5.7) \quad N = N_{0,s} + (V_s - N_{0,s}) e^{y/\alpha_s}$$

L'estimation des trois paramètres  $V_s$ ,  $N_{0,s}$  et  $\alpha_s$  à l'aide de (3.19) et (3.20) nécessite le calcul des trois moments mais le troisième moment est sujet à d'importantes fluctuations d'échantillonnage. Pour éviter l'usage du troisième moment la valeur caractéristique  $V_s$  peut être estimée comme une observation ordonnée d'après (2.5) et (2.5'). Comme on ne porte pas en abscisse  $N$ , mais  $\log N$ , l'interpolation linéaire entre les deux valeurs voisines s'applique à  $\log N$ . Les deux autres paramètres s'obtiennent au moyen de (3.20) dont résulte

$$(5.8) \quad \begin{aligned} (\hat{V}_s - \bar{N}_s) / s_s &= A(\alpha_s); \\ \hat{N}_{0,s} &= V_s - s_s B(\hat{\alpha}_s). \end{aligned}$$



Graphique 7



Utilisant la table de  $A(\alpha)$ , la première équation donne l'estimation de  $\alpha_s$  et la seconde mène à l'estimation de la limite inférieure  $N_{0,s}$ . Cette méthode requiert seulement le calcul des deux premiers moments. On peut l'utiliser pourvu que les estimations  $\hat{V}_s$ ,  $1/\hat{\alpha}_s$  et l'écart type  $s_s$  soient tels que :

$$(5.8') \quad \frac{\hat{V}_s}{s_s} > B(\hat{\alpha}_s),$$

condition qui résulte de (3.20). Pratiquement, il y a peu d'écarts entre les différentes estimations de  $V_s$ . Les procédés d'estimation (3.19) et (5.8) ne garantissent pas que la durée de vie minimum estimée soit plus petite que la plus faible durée de vie observée  $N_1$ . Or, on ne peut accepter une estimation  $\hat{N}_{0,s} > N_1$ . Dans ce cas, une modification devient donc nécessaire.

Une première estimation de la durée de vie minimum s'obtient en choisissant différentes valeurs  $N_{0,s}$  et en portant les observations réduites  $(N - \hat{N}_{0,s})$  sur du papier logarithmique à probabilité de la plus petite valeur, jusqu'à ce que l'on obtienne approximativement une droite. Si cette méthode donne un bon ajustement et si  $N_{0,s}$  a été estimé par ce procédé, l'estimation de  $1/\hat{\alpha}_s$  est obtenue de (3.20) comme solution de :

$$(5.9) \quad (\bar{N}_s - \hat{N}_{0,s})/s_s = B(\alpha_s) \Gamma(1 + 1/\alpha_s)$$

La table 3 donne ce produit en fonction de  $1/\alpha_s$ . Cette relation est représentée dans le graphique 7 qui donne immédiatement une estimation de  $\alpha_s$ .

TABLE 3

Les fonctions  $B(\alpha)\Gamma(1 + 1/\alpha)$ , (5.9) et  $D(20, 1/\alpha)$ , (5.13)

$1/\alpha$	$B(\alpha)\Gamma(1+1/\alpha)$	$D(20, 1/\alpha)$	$1/\alpha$	$B(\alpha)\Gamma(1+1/\alpha)$	$D(20, 1/\alpha)$
0,00	---	1,88569	0,30	3,02431	1,79170
0,01	78,53356	1,89082	0,35	2,63373	1,74294
0,02	39,54293	1,89468	0,40	2,33696	1,68914
0,03	26,54229	1,89821	0,45	2,10392	1,63245
0,04	20,03920	1,90103	0,50	1,91306	1,57176
0,05	16,13520	1,90290	0,55	1,75541	1,51037
0,06	13,53077	1,90445	0,60	1,62207	1,44846
0,07	11,66900	1,90535	0,65	1,50754	1,38677
0,08	10,27141	1,90557	0,70	1,40786	1,32593
0,09	9,18330	1,90536	0,75	1,32015	1,26645
0,10	8,31185	1,90447	0,80	1,24223	1,20872
0,15	5,68829	1,89217	0,85	1,17243	1,15306
0,20	4,36580	1,86801	0,90	1,10944	1,09966
0,25	3,56450	1,83392	0,95	1,05224	1,04862
			1,00	1,00000	1,00000

Le second membre de (5.9) diminue lorsque  $1/\alpha_s$  augmente. Par conséquent les estimations de  $\hat{N}_{0,s}$  et  $1/\hat{\alpha}_s$  sont liées de la manière suivante : si l'estimation  $\hat{N}_{0,s}$  est augmentée, l'estimation  $1/\hat{\alpha}_s$  doit décroître. En conséquence, un faible écart type peut indiquer ou une large valeur de la vie minimum ou une petite valeur de  $1/\alpha_s$ .

Après l'estimation de  $\hat{N}_{0,s}$  et  $1/\hat{\alpha}_s$ , la vie caractéristique est estimée à l'aide de (3.20) en remplaçant  $m$  par  $\bar{N}_s$  et  $\hat{V}$  par  $V_s$ .

Une autre méthode utilise la plus petite observation  $N_1$  pour l'estimation de  $N_{0,s}$ . Elle repose sur l'hypothèse que  $N_1$  est la plus petite valeur la plus proba-

ble du temps de rupture pour n observations. Cette valeur  $\tilde{N}_1$  s'obtient à partir de la fonction de survie.

$$(5.9') \quad \ell_S(N_1) = \ell_S^n(N)$$

D'après (5.1)

$$(5.9'') \quad \ell_S(N_1) = \exp \left[ - \left( \frac{n^{1/\alpha_S} (N - N_{0,S})}{V_S - N_{0,S}} \right)^{\alpha_S} \right]$$

Le plus petit nombre de cycles au bout desquels il y a rupture a la même distribution que ce nombre lui-même, à une modification près des paramètres. La valeur la plus probable du plus petit nombre de cycles obtenue de la même manière que le mode (5.5) de la distribution de N est solution de :

$$(5.10) \quad (\tilde{N}_1 - N_{0,S}) = (V_S - N_{0,S}) \left(1 - \frac{1}{\alpha_S}\right)^{1/\alpha_S} n^{-1/\alpha_S}$$

Si nous remplaçons la plus petite valeur la plus probable  $\tilde{N}_1$  par la plus petite valeur observée  $N_1$ , ceci conduit à une équation pour l'estimation des trois paramètres inconnus  $V_S$ ,  $N_{0,S}$ ,  $1/\alpha_S$ . Les deux autres équations peuvent se déduire de la vie moyenne

$$(5.11) \quad \bar{N}_S - N_{0,S} = (V_S - N_{0,S}) \Gamma(1 + 1/\alpha_S)$$

et de l'écart type

$$(5.12) \quad s_S = (V_S - N_{0,S}) / B(\alpha_S)$$

Des trois équations (5.10), (5.11) et (5.12), il résulte que

$$(5.13) \quad (\bar{N}_S - N_1) / s_S = \left[ \Gamma(1 + 1/\alpha_S) - \left(1 - 1/\alpha_S\right)^{1/\alpha_S} n^{-1/\alpha_S} \right] B(\alpha_S) = D(n, 1/\alpha_S)$$

dépend seulement de  $\alpha_S$ .

Le second membre est donné dans la table (3) pour  $n = 20$ . La valeur du premier membre de (5.13) est déduite de l'échantillon. On obtient ainsi une estimation du paramètre  $1/\alpha_S$

Pour des valeurs décroissantes de  $1/\alpha_S$ , le second membre de (5.13) converge vers l'expression correspondante dans la première distribution des plus petites valeurs

$$(5.13') \quad \lim_{1/\alpha_S \rightarrow 0} D(n, 1/\alpha_S) = \sqrt{6} (\lg n - \gamma)$$

Après estimation de  $\alpha_S$  à partir de (5.13), les deux autres paramètres s'obtiennent aisément à l'aide de (5.8), comme précédemment. Les formules (5.11) et (5.12) conservent la moyenne et l'écart type. L'utilisation de (5.10) garantit que la vie minimum soit plus petite que la plus petite vie observée.

Après avoir estimé la durée de vie minimum, il reste à effectuer celle de la limite d'endurance. Les considérations du premier paragraphe indiquent trois procédés possibles.

1) Si la forme analytique de  $N_{0,S}$  fonction de S est connue à partir de considérations physiques ou peut être approchée, on peut extrapoler sa fonction inverse, l'endurance  $S_{0,N}$ , fonction de N, jusqu'à  $N = \infty$ .

2) Si, au cours de l'expérience, un certain pourcentage des éprouvettes n'est pas brisé, même au bout de  $10^7$  à  $10^8$  cycles, la probabilité d'une survie permanente peut être estimée en tant que fonction de S. L'extrapolation au voisinage de l'unité fournit un estimateur de la limite d'endurance.

3) Si, au contraire, les tensions de fatigue  $S_{0,\ell}$  sont connues en fonction de  $\ell$ , on peut utiliser de la même manière  $\ell = 1$ .

Puisqu'on ne connaît aucune loi physique pour  $N_{0,S}$  ou  $S_{0,N}$ , nous sommes contraints d'utiliser les procédés statistiques. Mais nous sommes fortement handicapés par le manque d'observations correctes. C'est pourquoi nous exposons seulement la méthode.

Considérons la probabilité d'une survie permanente (1.4) comme une fonction de survie. Dans l'équation (4.10) nous avons fait l'hypothèse que les limites d'endurance  $S_{0,N}$  s'annulent. Si nous introduisons la limite d'endurance  $S_0$ , la probabilité d'une survie permanente  $\ell_\infty(S)$  devient comme en (5.1)

$$(5.14) \quad \ell_\infty(S) = \exp \left[ - \left( \frac{S - S_0}{S_V - S_0} \right)^\beta \right]$$

avec

$$\ell_\infty(S_V) = \frac{1}{e} \quad ; \quad \ell_\infty(S_0) = 1.$$

La variable  $S$  est la contrainte de fatigue; le paramètre  $S_V$  est la contrainte de fatigue caractéristique. Pour l'estimation des trois paramètres  $S_V$ ,  $S_0$  et  $\beta$ , nous posons, comme dans (4.4) :

$$(5.15) \quad y = \lg \left[ - \lg (\ell_\infty(S)) \right]$$

De (5.14) et pour  $r$  contraintes  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ), on tire :

$$(5.16) \quad y_j = \beta \lg (S_j - S_0) - \beta \lg (S_V - S_0)$$

Les valeurs  $y_j$  s'obtiennent au moyen des fréquences estimées de survie permanente  $\ell_\infty(S)$  et de (5.15) à l'aide des tables du Bureau de Standards [6]

Si les contraintes observées  $S_j$  reportées sur du papier logarithmique à probabilités des plus petites valeurs en fonction de leurs fréquences  $\hat{\ell}_\infty(S)$  donnent des points répartis autour d'une droite (voir le graphique 4), la limite d'endurance peut être considérée comme nulle à moins d'objections de nature physique.

Si l'hypothèse  $S_0 = 0$  n'est pas acceptable, pour des raisons statistiques ou physiques, il est nécessaire d'estimer les trois paramètres. La contrainte de fatigue caractéristique  $S_V$  peut être obtenue de la même manière que  $V_S$  par interpolation linéaire entre les logarithmes de deux contraintes voisines pourvu que les fréquences de survie correspondantes ne soient pas trop différentes de  $\ell_\infty(S_V) = 0,36788$ . Pour estimer les deux paramètres restant  $S_0$  et  $\beta$ , nous choisissons un premier estimateur  $E$  de  $S_0$  à l'aide du procédé graphique indiqué précédemment pour  $N_{0,S}$  et nous écrivons en première approximation :

$$(5.17) \quad S_0 = E + \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est à estimer. Alors (5.16) devient, après développement du logarithme :

$$(5.18) \quad y_j = \beta \lg (S_j - E) + \beta \varepsilon / (S_j - \varepsilon) - \beta \lg (S_V - E) - \beta \varepsilon / (S_V - E)$$

Si nous introduisons  $\beta' = 2,30259 \beta$ ,

$$\beta \varepsilon = \delta$$

$$\log \frac{S_j - E}{S_V - E} = a_j \quad \frac{1}{S_j - E} - \frac{1}{S_V - E} = b_j$$

L'équation (5.18) devient linéaire :

$$(5.19) \quad y_j = \beta' a_j + \delta b_j$$

$y_j$ ,  $a_j$  et  $b_j$  sont connus. La méthode des moindres carrés conduit aux équations normales :

$$\begin{aligned}\sum a_j y_j &= \beta \sum a_j^2 + \delta \sum a_j b_j \\ \sum b_j y_j &= \beta \sum a_j b_j + \delta \sum b_j^2\end{aligned}$$

Soient  $\hat{\beta}'$  et  $\hat{\delta}$  les solutions de ce système; alors la limite d'endurance est estimée par :

$$(5.20) \quad \hat{S}_0 = E - \frac{\hat{\delta}}{\hat{\beta}}$$

et les contraintes théoriques  $\hat{S}_j$  à comparer à celles observées  $S_j$  sont, en raison de (5.14) et (5.15)

$$(5.21) \quad \hat{S}_j = \hat{S}_0 + (\hat{S}_V - \hat{S}_0) e^{y_j/\hat{\beta}}$$

Malheureusement, les quelques fréquences de survie permanente observées ne permettent pas une estimation correcte de la limite d'endurance. Puisqu'une analyse qui ne peut être vérifiée semble impraticable, on ne peut pas encore construire une probabilité totale de survie en fonction de  $N$  ni analyser des courbes  $(S, N)_l$  dans le cas où  $S_{0,N}$  est fonction de  $N$ .

## VI - EXEMPLES NUMÉRIQUES

Les méthodes décrites dans les paragraphes précédents seront employées dorénavant dans la mesure où les observations le permettent. Nous commençons par des résultats d'essais faits sur de l'acier et du nickel où la durée de vie minimum est nulle.

Ravilly [7] a fait des observations de vie-fatigue sur de l'acier dont la résistance au cisaillement était égale à 7,8 kg/mm<sup>2</sup>; l'expérience a été réalisée à 6 niveaux de contrainte entre 12,5 et 51 kg/mm<sup>2</sup>. Les paramètres estimés sont donnés dans la Table 4.

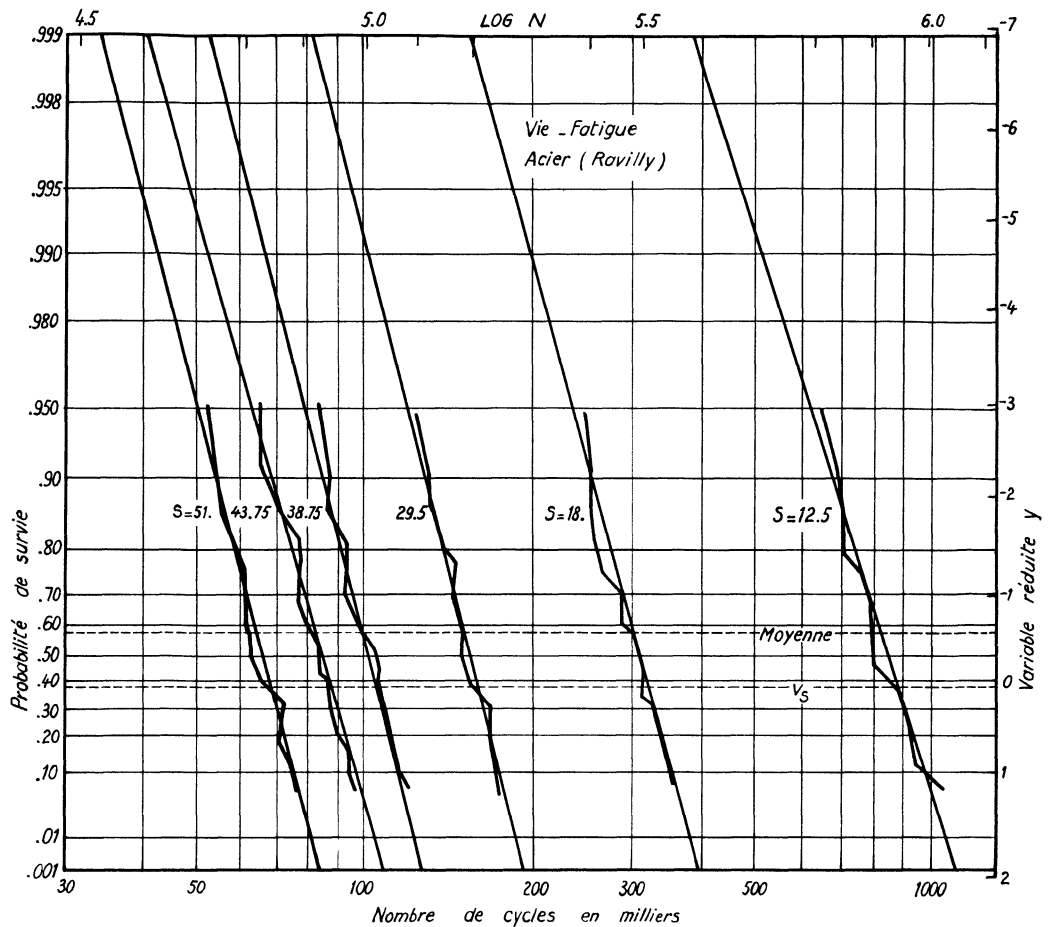
TABLE 4

Paramètres de l'acier (Ravilly)

Contrainte $S$ en Kg/mm <sup>2</sup>	51	43.75	38.75	29.5	18	12.5
Caractéristique $\log V_S$	4,83481	4,93533	5,02464	5,20397	5,50321	5,93976
Nombre $V_S \cdot 10^{-3}$	68,362	86,165	105,84	159,95	318,58	870,48
Paramètre scalaire $1/\alpha'$	0,04215	0,04593	0,04064	0,04080	0,04470	0,04982

Les observations et les droites théoriques tracées sur le graphique 8 sont en bon accord. En espèce les droites sont pratiquement parallèles, fait prévu par la théorie.

D'autres durées de vie observées par Ravilly [7] pour de l'acier recuit de perméabilité magnétique constante et pour 10 niveaux de contrainte sont transcrites sur les graphiques 9 et 10. La table 5 contient les paramètres estimés.



Graphique 8

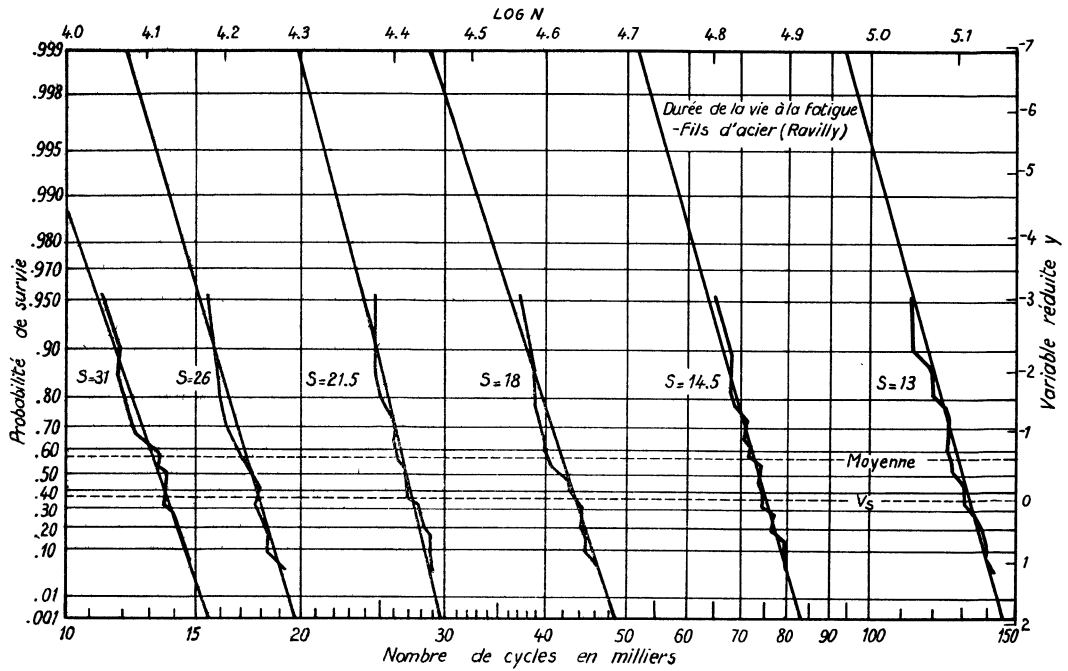
TABLE 5

Paramètre des fils d'acier (Ravilly)

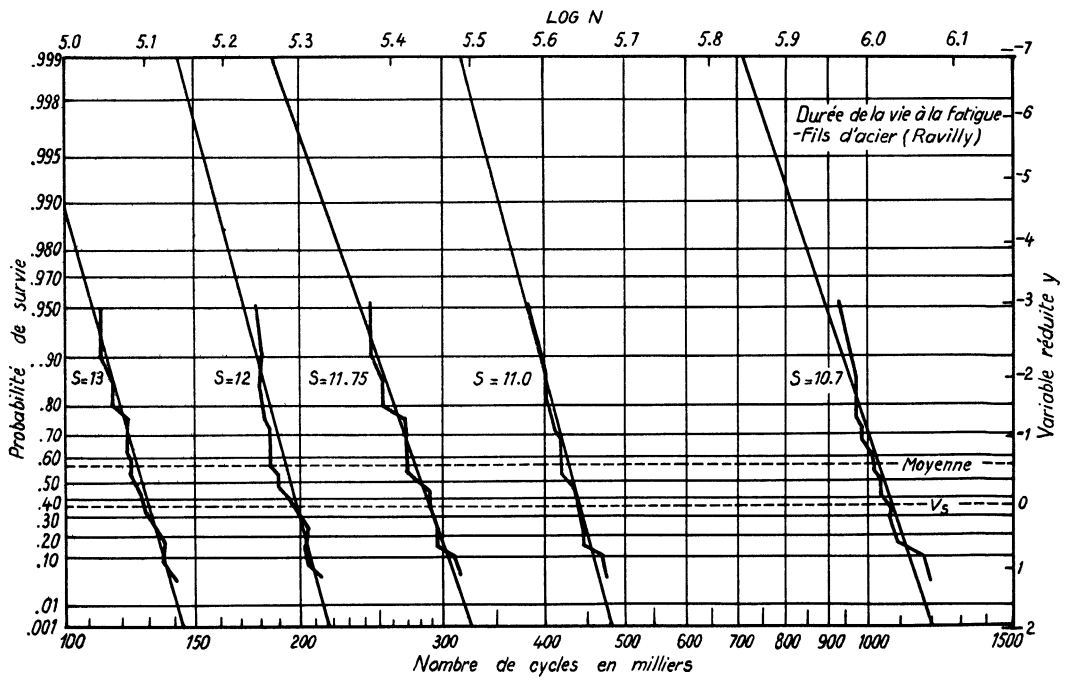
Contrainte S	Nombre caractéristique $\log (V_S / 1000), V_S / 1000$		Paramètre scalaire $1/\alpha_1$
31,0	1,12814	13.432	0,029120
26,0	1,24732	17.673	0,024837
21,5	1,43425	27.180	0,020186
18,0	1,62982	42.640	0,026426
14,5	1,87056	74.227	0,023428
13,0	2,10581	127.59	0,022982
12,0	2,29314	196.40	0,026050
11,75	2,45453	284.79	0,027650
11,0	2,64608	440.64	0,022346
10,7	3,02623	1062.32	0,026050

Les observations et les fonctions de survie tracées sur les graphiques 9 et 10 sont sensiblement parallèles et confirment l'hypothèse d'une durée de vie minimum nulle.

Nous allons montrer comment estimer un seul paramètre  $1/\hat{\alpha}_1$  pour différents niveaux de contrainte ainsi que la construction du diagramme  $(S, N)_\xi$  dans le



Graphique 9

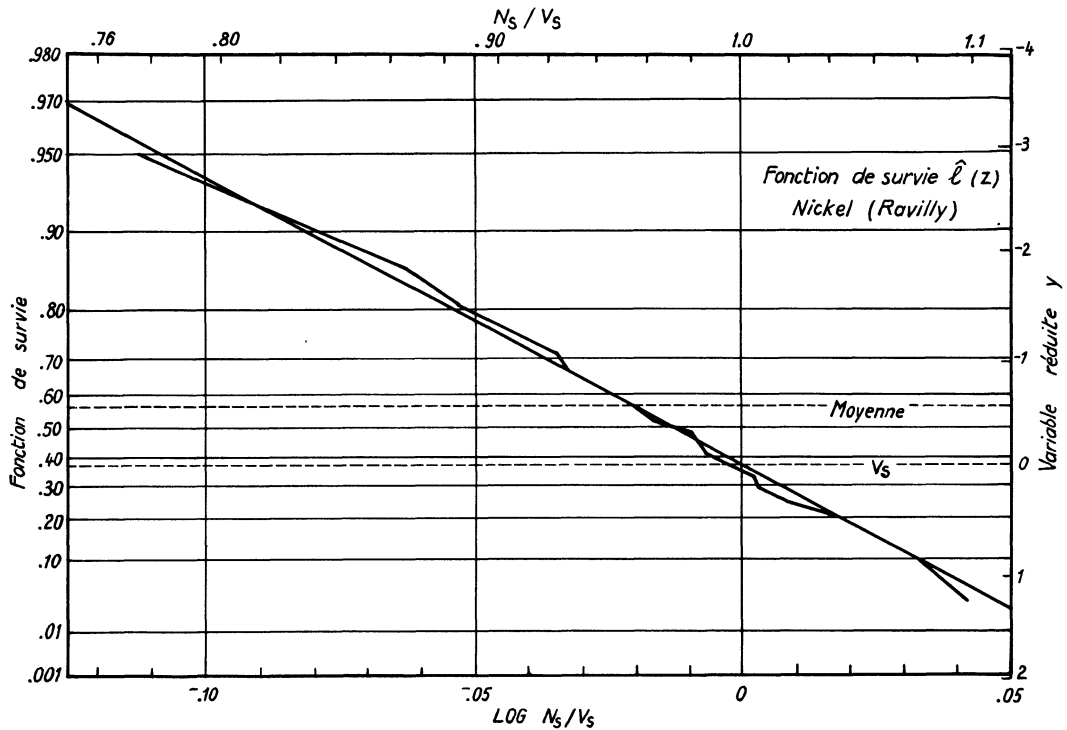


Graphique 10

cas  $N_0 = 0$  et  $S_0 = 0$ . A cette fin, considérons les observations de Ravilly [7] sur les fils de Nickel. Les fonctions de survie données dans [4] semblent linéaires, excepté pour la plus petite contrainte,  $S = \pm 15,5 \text{ kg/mm}^2$  où la durée de vie minimum ne s'annule pas. Ces valeurs sont donc omises ici et seront étudiées à la fin de ce paragraphe. Dans ces conditions,  $k = 9$  tensions  $S_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, 9$ ) sont utilisées. Les moyennes arithmétiques

$$(6.1) \quad \bar{Z}_s = \frac{1}{9} \sum_{\lambda=1}^9 \frac{N_{s_\lambda}}{V_{s_\lambda}}$$

des nombres relatifs des cycles à rupture correspondant aux 9 contraintes sont fournies dans la table 6 pour les 20 observations  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 20$ ), puis portées sur le graphique 11.



Graphique 11

TABLE 6  
Nombres moyens réduits de cycles à la rupture  
Fils de Nickel (Ravilly)

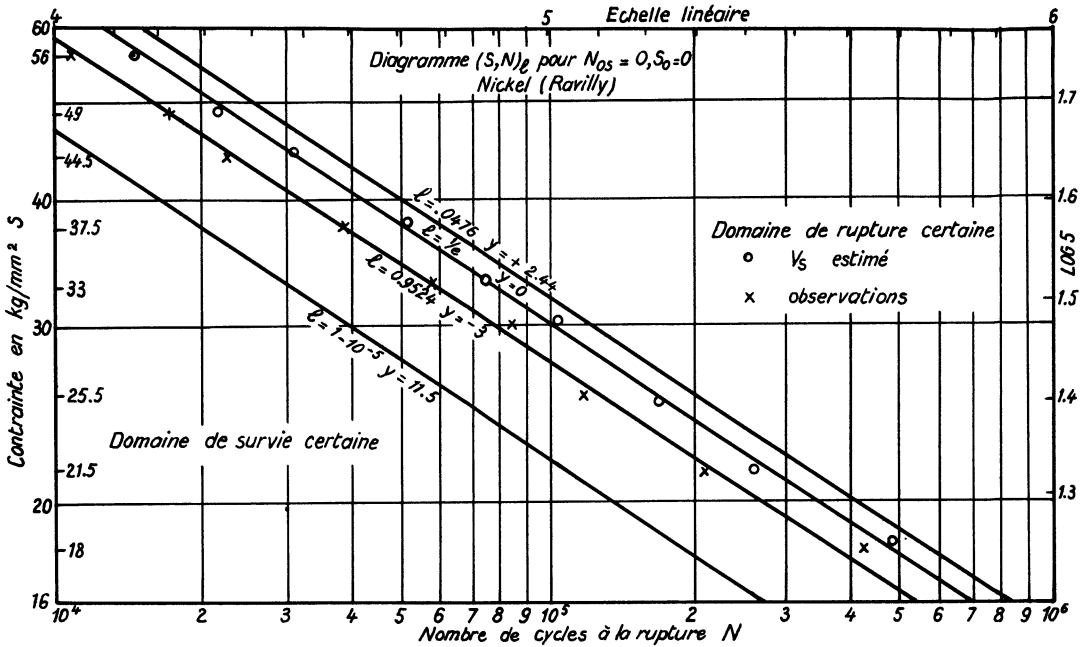
Rang $i$	Moyenne $\bar{Z}_i$	Rang $i$	Moyenne $\bar{Z}_i$
1	0,77000	11	0,97441
2	0,82872	12	0,98338
3	0,86583	13	0,99153
4	0,88407	14	1,00117
5	0,90379	15	1,01008
6	0,92218	16	1,02205
7	0,92791	17	1,04170
8	0,93958	18	1,06001
9	0,95252	19	1,07432
10	0,96182	20	1,10211

L'estimation de l'unique valeur  $1/\alpha_1$ , à l'aide de (4.9) est  $1/\alpha_1' = 0,03677$  et conduit à la droite théorique

$$(6.2) \quad \log \bar{Z} = 0,000157 + 0,036767 y$$

tracée sur le graphique 11 qui montre l'ajustement des observations données dans la table 6.

Les nombres caractéristiques  $V_S$  pour le nickel estimés dans [4] et donnés dans la table 7 sont portés sur le diagramme  $(S, N)_\ell$  (graphique 12).



Graphique 12

TABLE 7

Nombres caractéristiques et paramètres  $1/\alpha_1'$  ; fils nickel (Ravilly)

S	= 18	21.5	25.2	30	33	37.5	44.5	49	56
$V_S \cdot 10^{-3}$	= 495.8	263.2	162.2	103.7	74.66	52.23	30.91	22.22	14.61
$1/\alpha_1'$	= 0,02930	0,03952	0,04564	0,03284	0,03382	0,03588	0,03875	0,02819	0,03869

La méthode des moindres carrés (4.11') conduit à une droite pour le nombre caractéristique des cycles à rupture.

$$(6.3) \quad \log \hat{V}_S = 9,50067 - 3,04615 \log S.$$

Cette droite s'ajuste très bien aux observations. Il en est de même des valeurs  $y = -3$ ;  $l_3(N) \simeq 0,95$  comparées aux plus petits nombres des cycles  $N_1$  observés pour chaque contrainte.

Les deux droites qui définissent le domaine de rupture certaine et de survie certaine dans le graphique 12 sont obtenues au moyen de la moyenne arithmétique  $1/\hat{\alpha}_1 = 0,036$  des valeurs données à la ligne 3 de la table 7. (Cette valeur diffère légèrement de l'estimation de  $1/\alpha_1'$  obtenue précédemment). Les lignes relatives à  $l_3(N) = 10^{-5}$  et  $l_3(N) = 1 - 10^{-5}$  sont obtenues au moyen de (4.13) à l'aide de :  $N = 1,277 \hat{V}_S$  et  $N = 0,397 \hat{V}_S$  respectivement.

De  $\hat{\gamma} = 3,04615$  ;  $1/\alpha_1' = 0,036$ ,



la pente des probabilités de survie en fonction de la contrainte est, d'après (4.12):

$$\frac{1}{\beta_1} = 0,0118$$

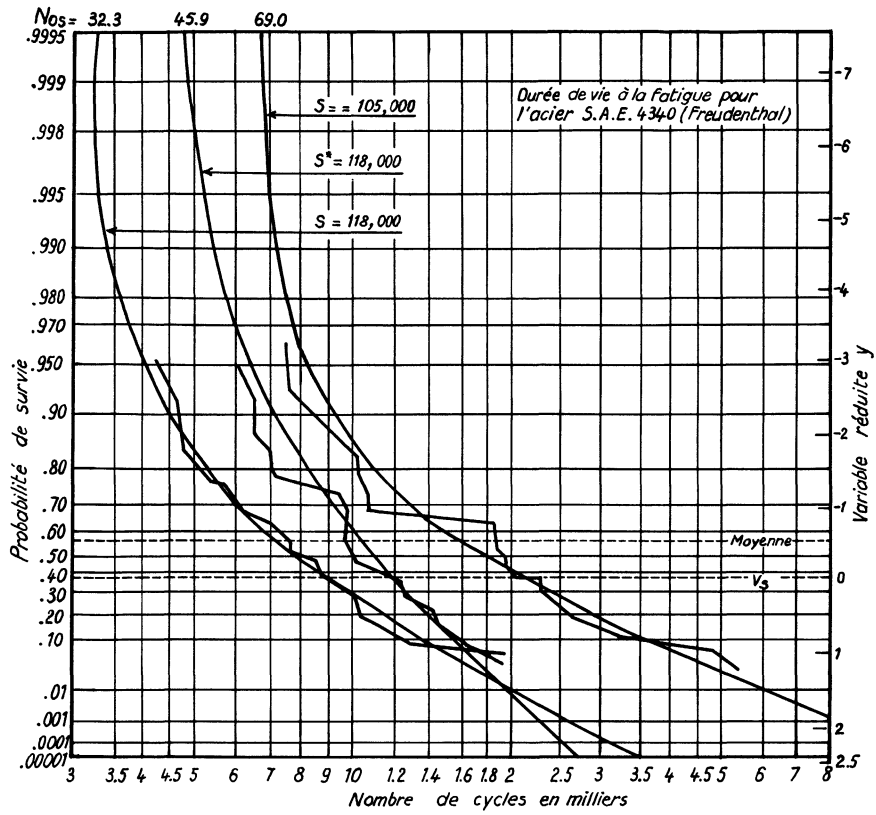
Les probabilités de survie en fonction de S pour N constant ont une pente plus raide que les probabilités de survie en fonction de N pour S constant, propriété vérifiée à partir d'autres observations. Il s'en suit que  $\sigma_N(\log S) < \sigma_S(\log N)$ .

L'hypothèse  $N_{0,S} = 0$  dont on s'est servi pour les exemples précédents est maintenant abandonnée. La vie caractéristique sera estimée au moyen des observations ordonnées et la vie minimum  $N_{0,S}$  à l'aide des deux premiers moments comme dans le paragraphe 5

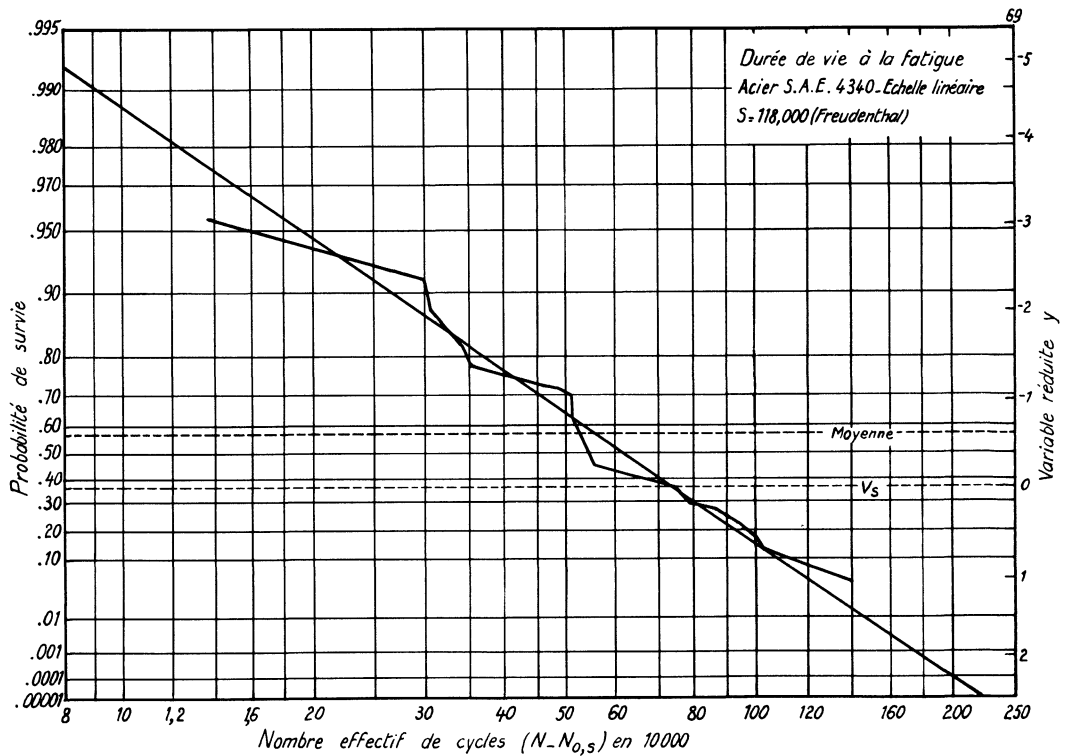
TABLE 8  
Durée de vie à la fatigue - Acier SAE 4340 (Freudenthal)  
Milliers de cycles

Numéro d'éprouvettes i	$1 - \frac{i}{n_s + 1}$	Contraintes élastiques psi $\pm 105,000$	$1 - \frac{i}{n_s + 1}$	Contraintes élastiques psi $\pm 118,000 \quad \pm 118,000^*$	
1	0.9615	76	0.9565	42	60
2	0.9231	77	0.9130	46	76
3	0.8846	89	0.8696	48	77
4	0.8462	100	0.8261	49	80
5	0.8077	103	0.7826	53	81
6	0.7692	103	0.7391	59	95
7	0.7308	111	0.6957	61	97
8	0.6923	114	0.6522	67	98
9	0.6538	184	0.6087	72	98
10	0.6154	186	0.5652	75	99
11	0.5769	186	0.5217	77	101
12	0.5385	187	0.4783	84	101
13	0.5000	197	0.4348	86	103
14	0.4615	198	0.3913	88	117
15	0.4231	204	0.3478	93	122
16	0.3846	207	0.3043	98	125
17	0.3462	233	0.2609	103	133
18	0.3077	235	0.2174	107	140
19	0.2692	241	0.1739	109	146
20	0.2308	253	0.1304	118	151
21	0.1923	266	0.0870	132	161
22	0.1538	299	0.0435	206	186
23	0.1154	335	--	--	--
24	0.0769	466	--	--	--
25	0.0385	554	--	--	--

La table 8 fournit les données de vie observées par A.M. Freudenthal sur de l'acier S.A.E. 4340 pour deux contraintes  $S = \pm 105,000$  et  $\pm 118,000$  livres par pouce carré, une troisième série d'expériences a été faite à la même contrainte mais avec une interruption au bout de 8.000 cycles. L'acier fut alors porté à 350 °F. Les observations sont portées sur le graphique 13. L'intersection des deux courbes observées à  $S = \pm 118,000$  n'est pas en contradiction avec la théorie puisqu'elles sont faites sur des échantillons traités à des températures différentes. Les courbes observées paraissent s'étaler pour de grandes valeurs de N.



Graphique 13



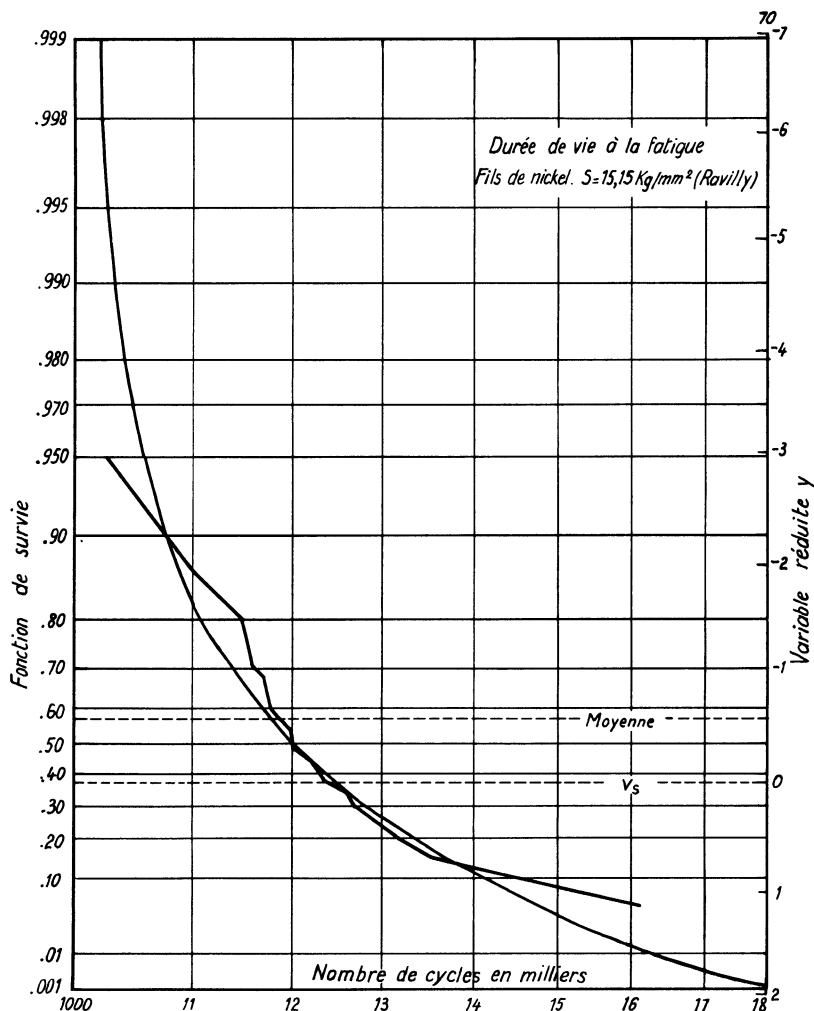
Graphique 14

Ce comportement indique l'existence d'une probabilité de survie permanente. Les durées de vie caractéristiques sont estimées d'après (2.5). Pour  $n = 22$  et  $n = 25$  éprouvettes, les rangs ( $i'$ ) sont 14,53877 et 16,43513 respectivement. L'interpolation linéaire entre les logarithmes de deux valeurs voisines de  $N$  fournit les estimations  $\hat{V}_s$  données dans la table 9.

TABLE 9  
Les trois paramètres de l'acier S.A.E. 4340 (Freudenthal)

Niveaux de contrainte en 1000 psi	S	$\pm 105$	$\pm 118$	$\pm 118^*$
Nbre d'éprouvettes	n	25	22	22
Nbre caractéristique	$\hat{V}_s$	217.9365	90.6595	119.6679
Moyenne	$\bar{N}_s$	208.1600	85.1364	111.2273
Ecart type	s(N)	115.7312	36.8618	31.3720
Paramètre scalaire	$1/\hat{\alpha}_s$	0.81552	0.68616	0.45474
Durée de vie minimum	$\hat{N}_{0,s}$	69.012	32.313	45.864

(\* expérience interrompue après 8.000 cycles, métal porté à 350° F.)



Graphique 15

Les estimations du paramètre  $1/\alpha_s$  et des durées de vie minimum sont faites à partir de la moyenne et de l'écart type suivant la formule (5.8). Le fait d'interrompre l'expérience entraîne une augmentation du nombre caractéristique et une diminution de la dispersion des durées de vie. Les durées de vie théorique obtenues d'après (5.7) sont tracées sur le graphique 13. L'ajustement de la théorie aux observations est très satisfaisant. Le graphique 14 montre la probabilité de survie pour  $S = + 118,000$  p.s.i., en fonction de  $\log(N - \hat{N}_{0,s})$ . La soustraction de  $\hat{N}_{0,s}$  rend la fonction linéaire comme prévu par la théorie.

Enfin, nous donnons un exemple de l'estimation de  $N_{0,s}$  à l'aide de  $N_1$ , dans le cas des observations de Ravilly [7] sur des fils de nickel, et pour la plus faible contrainte  $S = 15,5$  kg/mm<sup>2</sup> (dont on n'a pas tenu compte jusqu'ici), nous avons  $n_s = 20$  specimens, la durée de vie la plus courte est  $N_1 = 1040$ ; la durée de vie moyenne est  $\bar{N}_s = 1232,75$  et l'écart type est  $s_s = 132,719$ . L'équation (5.13) donne  $D(20, \frac{1}{\alpha_s}) = 1,4523$ . La table (3) conduit à l'estimation de  $1/\hat{\alpha}_s = 0,59689$ . Enfin on obtient de (5.8) les estimations  $\hat{V}_s = 1258,12$  et  $\hat{N}_{0,s} = 1016,45$ . Les fonctions de survie observées et théoriques sont tracées sur le graphique 15.

La même méthode appliquée aux observations du tableau (8) conduit aux durées de vie minimum.

$$\hat{N}_{0,s} = 73,204 \quad ; \quad 37,981 \quad ; \quad 45,820$$

pour les trois séries, valeurs qui diffèrent jusqu'à 15 % des valeurs données tableau (9). Vu le petit nombre d'observations (25 et 22 respectivement) ces différences doivent être acceptées. Quelle que soit la méthode utilisée les erreurs d'échantillonnage auront toujours une forte influence sur l'estimation des durées de vie minimum, particulièrement dans le cas fréquent d'un petit nombre d'échantillons.

## VII - PROPOSITION FAITE AUX INGÉNIEURS

Les modèles linéaires et à trois paramètres sont en accord avec les observations pour les grandes et les petites contraintes. En particulier le graphique 12 donne une bonne représentation.

Les buts principaux de l'analyse statistique de résultats d'essais de fatigue sont d'estimer la durée de vie minimum et la limite d'endurance.

L'auteur a des doutes sérieux sur la validité des estimations des limites d'endurance utilisées par les ingénieurs.

Il n'y a malheureusement pas assez d'observations pour l'estimation des fréquences de survie permanente. C'est pourquoi on ne peut pas donner d'exemples numériques de l'estimation de la limite d'endurance. La construction de l'ensemble des fonctions de survie et du diagramme  $(S, N)_t$  n'est pas possible en ce moment. Deux séries d'expériences seraient nécessaires. Dans la première, 49 éprouvettes devraient être soumises à 15 contraintes différentes. Ces séries permettraient de faire une nette distinction entre au moins 10 contraintes. L'expérience fournirait les estimations des probabilités de survie de 0,02 à 0,98 que l'on peut considérer comme suffisantes pour l'estimation des durées de vie minimum en fonction de la contrainte. Cette expérience devrait mettre également en évidence les contraintes sous lesquelles les éprouvettes survivent après  $10^7$  ou  $10^8$  cycles. Ce renseignement permettrait ensuite de procéder à la deuxième ex-

périence où des contraintes inférieures ou égales aux valeurs déterminées précédemment devraient être utilisées pour 49 éprouvettes jusqu'à concurrence de  $10^7$  ou  $10^8$  cycles. La proportion des éprouvettes non rompues devrait alors décroître pour des contraintes croissantes. Si cette proportion restait la même ou ne variait pas dans le bon sens, une ou deux éprouvettes supplémentaires devraient être essayées jusqu'à l'obtention de ce résultat. Le nombre des contraintes à utiliser devrait être au moins égal à 6 et il faudrait s'efforcer de choisir des contraintes telles que les proportions de non rompues aient des valeurs de l'ordre de :

0,02 ; 0,20 ; 0,50 ; 0,80 ; 0,90 ; 0,98

De telles expériences conduiraient à une estimation correcte de la limite d'endurance, dont la connaissance permettrait d'améliorer la sécurité des constructions.

### BIBLIOGRAPHIE

1. Bender, A. and Hamm, A. The application of probability paper to life and fatigue testing. Report Delco Remy Co., Anderson, Indiana.
2. Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C., Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. Proceedings Cambridge, Philosophical Society 24, Pt. 2, 180-190 (1928).
3. Freudenthal, A.M. and Gumbel, E.J., "Statistical interpretation of fatigue tests". Proceedings Royal Society, A.216, p.309-32, London, 1953.
4. Freudenthal, A.M. and Gumbel, E.J., "Minimum life in fatigue". Journal Amer. Stat. Assn., Vol.49, pp. 575-597, 1954.
5. Gumbel, A.J., "Statistical theory of extreme values and some practical applications". Nat. Bur. of Standards, Math. Series 33, Washington, D.C., 1954.
6. National Bureau of Standards : "Probability tables for the analysis of extreme value data". App. Math. Series 22, Washington, D.C., 1953.
7. Ravilly, E., "Contributions à l'étude de la rupture des fils métalliques soumis à des torsions alternées". Publ. Scient. et Techniques du Ministère de l'Air, N° 120, Paris, 1938.
8. Weibull, W., "The phenomena of rupture in solids." Handlingar Ingeniörs Vetenskaps Akademien N° 153, Stockholm, 1939.
9. Weibull, W., "A statistical representation of fatigue failure in solids". Trans. Royal Institute of Technology, n° 27, Stockholm, 1949.