REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. COURTILLOT

Étude du choix des plans d'échantillonnage simples d'après leurs conséquences pécuniaires

Revue de statistique appliquée, tome 5, n° 1 (1957), p. 43-56
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1957__5_1_43_0>

ÉTUDE DU CHOIX DES PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE SIMPLES D'APRÈS LEURS CONSÉQUENCES PÉCUNIAIRES (1)

par

M. COURTILLOT

Ingénieur à la Société des Automobiles Peugeot

La théorie classique de Neyman et Pearson appliquée aux problèmes de contrôle de réception par échantillonnage simple, conduit à bâtir un test relatif à deux hypothèses incompatibles pour le lot à échantillonner. La formulation explicite de ces deux hypothèses et la fixation de la valeur des risques de conclusions erronées qui leur sont attachés, permettent de définir les deux paramètres caractérisant le plan d'échantillonnage, à savoir, la taille de l'échantillon n *et la limite d'acceptation* a.

Théoriquement, le choix de ces deux paramètres se déduit de la donnée de 2 points de la courbe d'efficacité autrement dit, de 2 couples de paramètres (α P_1, β P_2).

Cette théorie présente l'inconvénient majeur suivant, de ne pas permettre de fixer de façon claire l'intérêt économique résultant de l'adoption d'un plan d'échantillonnage. Au choix de n *et* a, *on a substitué le choix presque aussi délicat de* α, P_1, β, P_2).

M. COURTILLOT étudie la possibilité de chiffrer les conséquences financières d'un plan d'échantillonnage simple (portant sur le nombre de pièces défectueuses) et présente une méthode permettant de déterminer les paramètres du plan d'échantillonnage en fonction des conditions de coût ainsi estimées.

I. - INCONVÉNIENTS DE LA THÉORIE CLASSIQUE

Dans les méthodes classiques l'utilisateur, faute de pouvoir répondre à cette question : "Quel profit attendre du remplacement du contrôle à 100% par un contrôle par échantillonnage ?", n'est pas en mesure de déterminer son choix de façon rationnelle et sa décision peut paraitre suivant le cas comme le résultat d'un "acte de foi", ou au contraire, comme une marque de prudence excessive.

Dodge et Roming ont senti la nécessité d'introduire dans la recherche d'un plan d'échantillonnage, la notion de "répercussion". En effet, ils ont fixé dans le cas de l'échantillonnage simple les deux conditions suivantes :

- l'inspection doit être minimum pour la qualité moyenne livrée par le fournisseur ($\overline{p}$)
- pour une qualité non acceptable pt la probabilité d'acceptation est fixée à une valeur assez faible 0,10.

Cette méthode malgré ces deux conditions d'ordre économique n'est pas exempte de critiques.

Elle se place dans l'hypothèse où on a décidé a priori d'appliquer le contrôle par échantillonnage.

(1) - Thèse présentée le 16 Mai 1956 pour le diplôme de Statisticien délivré par l'Institut de Statistique de l'Université de Paris.

Par ailleurs, est-il bien utile de rendre minimum le montant de l'inspection?

Enfin à partir de quelle valeur une proportion de rebuts n'est-elle plus acceptable? et pourquoi choisir $\beta = 0,10$ plutôt que tout autre valeur faible?

Partant de ces remarques, nous avons jugé utile d'envisager la possibilité de chiffrer pécuniairement les conséquences de l'adoption d'un plan d'échantillonnage simple et de fournir une méthode susceptible de déterminer d'après des conditions de coût les paramètres du plan à adopter. Parallèlement cette étude nous a permis de définir dans les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés, une fonction de décision particulièrement simple au sujet du remplacement du contrôle à 100% par le contrôle par échantillonnage simple.

II. - PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Le contrôle par échantillonnage assuré par le client à la livraison d'un lot fait intervenir trois sortes de coûts différents :

a. Le coût de l'échantillonnage proprement dit : c'est-à dire le coût de contrôle et de manutention des unités prélevées.

b. Le coût du tri si le lot est refusé.

c. Le coût de répercussion si le lot est accepté et conduit à la livraison à l'utilisateur d'une certaine proportion d'unités non conformes.

Le cumul de ces trois coûts constitue le coût total résultant de l'adoption du plan.

Alors que dans des conditions de contrôle données, le coût de l'échantillonnage est bien déterminé, le coût de tri et le coût de répercussion sont aléatoires, ils dépendent non seulement de la qualité du lot inspecté mais encore des fluctuations d'échantillonnage.

Compte-tenu de cette décomposition du coût total, il est relativement aisé d'étudier sa variation en fonction de la qualité livrée, dans deux cas importants.

a. Le coût total est, quelle que soit la qualité livrée, à la charge du client.

b. A partir d'une certaine proportion de rebuts que nous définirons, le coût de tri sera à la charge du fournisseur, les autres éléments du coût total restant à la charge du client.

L'étude du coût total nous suggèrera la formulation des deux hypothèses économiques intéressantes permettant la détermination des deux paramètres du plan.

a. Le coût total moyen ne doit jamais excéder le coût de contrôle à 100% d'une certaine fraction de celui-ci.

b. Le coût total moyen doit être minimum pour la qualité moyenne livrée par le fournisseur.

Nous présentons la solution théorique de ce problème dans les deux cas précis relatifs à l'affectation des frais de tri. Les solutions pratiques correspondantes seront fournies dans le cas de prélèvements poissonniens.

III. - SOLUTION THÉORIQUE

3-1) COÛT TOTAL A LA CHARGE DU FOURNISSEUR.

3-1-1) <u>Etablissement de la fonction de coût</u>.

Nous supposerons que le produit échantillonné est tel que :

- les livraisons s'effectuent par lots de N unités.
- le coût de contrôle d'une unité est c.
- le coût des conséquences de la livraison d'une unité défectueuse a une valeur moyenne égale à r.

La définition de ces 2 coûts appelle quelques remarques :

Si le coût de contrôle est bien déterminé par la détermination du coût de tous ses éléments (manutention, temps d'opération, amortissement du matériel) le coût de répercussion est plus difficile à déterminer. Faute de renseignements statistiques suffisants, on prendra en première approximation, le coût de réparation tarifié par les services commerciaux, majoré ou non, suivant le cas, d'un coût "préjudice client".

Le plan d'échantillonnage étant supposé connu la probabilité P d'accepter un lot de qualité p est bien déterminée.

Dans ce cas, les éléments du coût total moyen sont les suivants :

a. Coût de l'échantillonnage n c

b. Coût moyen du tri c(N-n) (1-P)

(En effet, chaque tri portera sur N-n unités de coût de contrôle c . Ces évènements auront lieu avec une probabilité I - P)

c. Coût moyen de répercussion pr (N-n) P

(En effet chaque lot accepté avec une probabilité P comporte (N-n)p pièces défectueuses de coût de répercussion r. On suppose que les pièces défectueuses trouvées dans l'échantillon ne sont pas livrées).

Le coût moyen est alors

$$A = nc + c(N-n)\,(1-P) + pr(N-n)\,P$$

ou sous une autre forme

$$A = Nc - (N-n)\,(c-pr)\,P$$

Au lieu d'étudier le coût A en valeur absolue, il parait intéressant de prendre une unité de référence. Le coût de contrôle à 100% s'impose puisqu'il s'agit d'évaluer l'avantage procuré par la méthode statistique.

On considérera donc le coût total moyen réduit :

$$A' = \frac{A}{Nc}$$

3-1-2) <u>Etude de la fonction</u>.

$$A' = 1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - p\frac{r}{c}\right) P$$

3-1-2-1) <u>Valeurs remarquables</u>.

Aux extrêmités de l'intervalle de variation, A' prend la valeur $\frac{n}{N}$ pour $p = 0$, et 1 pour $p = 1$ $(P = 0)$

A' prend aussi la valeur 1 pour $p = \frac{c}{r}$

A ce stade la proposition suivante s'impose immédiatement :

<u>Il existe une proportion critique de non conforme $p_c = \frac{c}{r}$ à partir de laquelle le contrôle par échantillonnage est plus onéreux en moyenne que le contrôle à 100%.</u>

3-1-2-2) <u>Etude de la dérivée</u>.

En écrivant :
$$A' = 1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - \frac{p}{p_c}\right) P$$

La dérivée est :

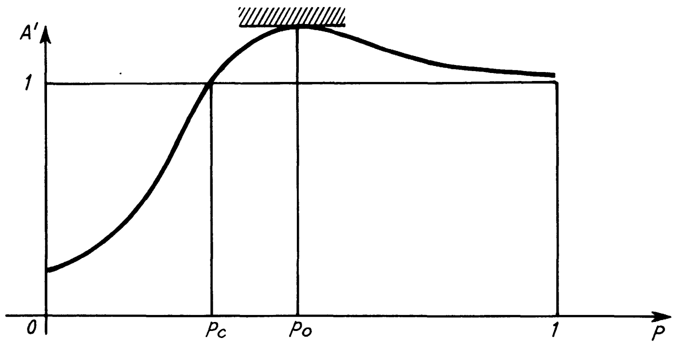
$$\frac{dA'}{dp} = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left[\frac{P}{p_c} - \left(1 - \frac{p}{p_c}\right)\frac{\partial P}{\partial p}\right]$$

La dérivée est définie et continue dans tout l'intervalle fermé 0,1.

Elle est non négative pour $p < p_c$ car $P \geqslant 0$ et $\frac{\partial P}{\partial p} \leqslant 0$ dans tout l'intervalle fermé 0,1.

A' - 1 s'annulant pour $p = p_c$ et $p = 1$, la dérivée s'annule au moins une fois entre ces 2 valeurs. En fait, l'explicitation de P montre qu'elle ne s'annule qu'une fois pour une valeur p_0, correspondant à un maximum.

Finalement, la représentation de $A'(p)$ est la suivante :



3-1-2-3) Remarques au sujet de p_o

a. Le maximum de A' s'obtient pour une valeur de p_o, telle que

$$\left(\frac{\partial A'}{\partial p}\right)_{p=p_o} = 0$$

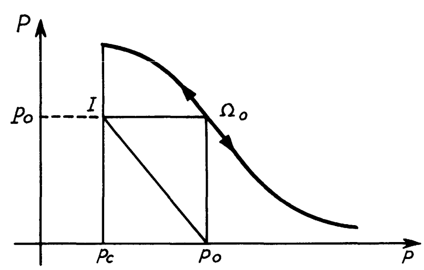
c'est-à-dire :

$$P + (p_o - p_c)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{p=p_o} = 0$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{p=p_o} = \frac{P}{p_c - p_o}$$

Cette relation a une traduction géométrique évidente : la tangente à la courbe d'efficacité pour $p = p_o$ est parallèle à la diagonale du rectangle p_c, p_o, Ω_o, I.



b. Le fait que $p_o > p_c$ montre que le maximum est atteint pour une valeur de p supérieure à p_c. Il est donc erroné de croire que si on prenait dans la théorie classique $p_2 = p_c$ on aurait en ce point la valeur maximum de la perte.

3-1-3) Détermination de n et de a.

3-1-3-1) Formulation de 2 conditions.

Condition 1. Puisque le coût total moyen n'est pas uniformément inférieur au coût du contrôle à 100%, il est naturel de désirer le limiter à une valeur non excessive.

En appelant A'_o la valeur de A' pour $p = p_o$ on fixera donc: $A'_o = 1 + \rho_o$

Condition 2. Par ailleurs, il est naturel aussi de chercher à avoir un coût de contrôle total minimum pour la qualité moyenne livrée par le fournisseur $\overline{p}$. Si $\overline{A'}$ est la valeur de $A'(p)$ pour $p = \overline{p}$. On aura une 2ème condition : $\overline{A'}$ = minimum.

3-1-3-2) Expression mathématique de ces deux conditions:

La valeur de p rendant A' maximum est telle que :

$$\left(\frac{\partial A'}{\partial p}\right)_{p=p_o} = 0 \qquad (1)$$

soit :

$$P(n, a, p_o) + (p_o - p_c)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{p=p_o} = 0 \qquad (1)'$$

Pour $p = p_o$, $A'_o = 1-(1-\frac{n}{N})(1-\frac{p_o}{p_c})P = 1+\rho_o$ d'après la condition I d'où :

$$\rho_o - (1-\frac{n}{N})\,(\frac{p_o}{p_c} - 1)\; P\,(n,\, a,\, p_o) \equiv 0 \qquad (2)$$

La deuxième condition consiste à rendre maximum, $\overline{A'}$ conpte-tenu de (1) et (2). Nous nous trouvons en présence d'un problème d'extrémum lié.

La fonction $U = \overline{A'} + \lambda\,(A'_o - 1 - \rho_o)$ doit satisfaire aux conditions de Lagrange

$$\frac{\partial \overline{A'}}{\partial n} + \lambda\,(\frac{\partial A'_o}{\partial n} + \frac{\partial A'}{\partial p_o}\,\frac{\partial p_o}{\partial n}) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{A'}}{\partial a} + \lambda\,(\frac{\partial A'_o}{\partial a} + \frac{\partial A'}{\partial p_o}\,\frac{\partial p_o}{\partial a}) = 0$$

Compte-tenu de (1), l'élimination de λ entre ces 2 équations donne :

$$\frac{D\,(A'_o\,\overline{A'})}{D\,(n,\, a\,)} = 0$$

La résolution du système des 3 équations (1) (2) (3) fournit les valeurs de n, a et p_o.

3-2) CAS OU LE TRI EST A LA CHARGE DU FOURNISSEUR A PARTIR D'UNE CERTAINE PROPORTION DE NON CONFORMES.

Puisque le coût total moyen est supérieur au coût du contrôle à 100% pour $p > p_c$ il est logique de pénaliser le fournisseur s'il envoie des lots tels que le contrôle par échantillonnage soit plus onéreux que le contrôle à 100%.

Nous traiterons le cas où la pénalisation consiste à imputer au fournisseur la totalité des frais de tri occasionnés par la livraison de lots où $p > p_c$ (Cette pénalisation a lieu bien entendu a postériori et n'est valable que pour les lots non acceptés.

3-2-1) Expression de la fonction de coût.

Pour $p_c > p$ le coût relatif A' a la même valeur que précédemment.

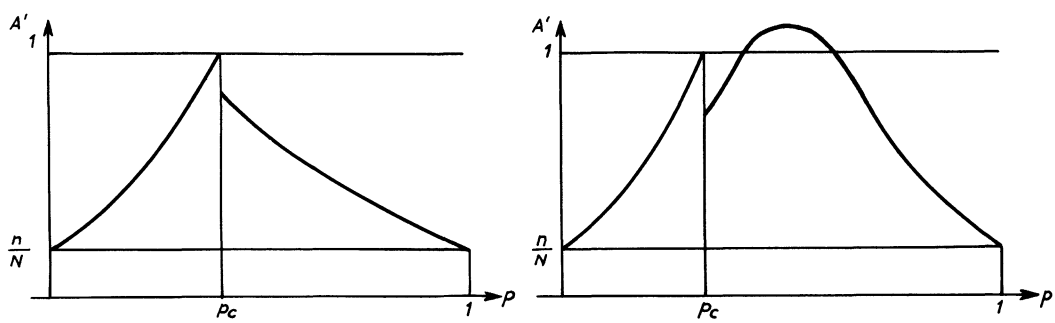
Pour $p_c < p$ il ne reste dans le coût total moyen que les éléments suivants :

- Coût du prelèvement nc
- Coût de répercussion moyen (N-n) pr P

D'où l'expression du coût total moyen réduit :

$$A' = \frac{A}{Nc} = \frac{nc + (N-n)\;pr\;P}{Nc} = \frac{n}{N} + (1 - \frac{n}{N})\,\frac{p}{p_c}\,P$$

La présentation de ce coût multiforme aura suivant le cas l'une ou l'autre des allures suivantes :



3-2-2) Détermination des paramètres. n et A.

Comme précédemment, les 2 conditions économiques que nous imposerons seront :

- Coût moyen maximum limité.

- Coût moyen minimum pour la qualité moyenne livrée.

L'examen des deux allures de variation de $A'(p)$ montre que l'on peut ici choisir le maximum de A' égal au coût de contrôle à 100%.

3-2-2-1) Expression mathématique de ces deux conditions.

La valeur de p_0 de p rendant le coût maximum est telle que :

$$\left(\frac{\partial A'}{\partial p}\right)_{p=p_0} = 0$$

Soit :

$$p_0\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{p=p_0} + P(n,\ p_0,\ a) = 0 \qquad (1)$$

Le coût maximum supposé égal au coût de contrôle à 100% est alors :

$$A'_0 = \frac{n}{N} + \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{p_0}{p_c} P(n,\ p_0,\ a) = 1$$

soit :

$$\frac{p_0}{p_c} P\ (n\ p_0\ a) = 1 \qquad (2)$$

Par ailleurs le coût moyen $\overline{A'}$ pour la qualité moyenne livrée $\overline{p}$ devant être minimum, nous trouvons comme précédemment la condition suivante :

$$\frac{D(A'\ \overline{A'})}{D(n,\ \ a)} = 0 \qquad (3)$$

Dans ce cas $\overline{A'}$ a l'une ou l'autre des expressions du coût multiforme suivant le signe de $\overline{p} - p_c$

Les 3 équations (I) (2) (3) fournissent alors la valeur de n, a et p_0.

<u>Remarque</u>.

Au cas où les frais de tri sont imputés au fournisseur pour des livraisons où $p > p_c$ il est toujours possible quelle que soit la valeur de $\overline{p}$ de substituer de façon économique le contrôle par échantillonnage au contrôle à 100%.

IV. SOLUTION PRATIQUE

Que l'on prenne pour P les lois de probabilité hypergéométrique, binomiale ou poissonnienne, la solution des systèmes d'équations précédentes ne peut s'obtenir sous forme algébrique simple, en effet P et $\frac{\partial P}{\partial p}$ font intervenir les fonctions eulériennes incomplètes. On est donc réduit à la construction de tables en fonction des paramètres N, p et $\overline{p}$. Cette solution n'a pu être matériellement adoptée. Nous avons préféré chercher une solution approchée du problème, qui donne des résultats satisfaisants en pratique, grâce à quelques calculs simples et à l'utilisation d'abaques.

Nous adopterons pour la simplicité du calcul une loi de probabilité de Poisson. Elle constitue une bonne approximation de la loi binomiale et de la loi hypergéométrique à condition que np soit petit, n grand et l'exhaustivité faible.

4-1) COÛT TOTAL A LA CHARGE DU CLIENT.

Les 2 premières équations établies précédemment :

$$P(n,\ a,\ p_0) + (p_0 - p_c)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{p=p_0} = 0$$

$$\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(\frac{p_0}{p_c} - 1\right) P(n,\ a,\ p_0) = \rho_0$$

deviennent, en prenant

$$P = \sum_0^a e^{-\nu}\ \frac{\nu^k}{K!}\ ,\quad \nu = np$$

$$\sum_0^a e^{-\nu_0}\frac{\nu_0^K}{K!} + (\nu_0 - \nu_c)\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\sum_0^a e^{-\nu}\frac{\nu^K}{K!}\right) = 0$$

$$(1-\frac{n}{N})\left(\frac{\nu_0}{\nu_c} - 1\right)\sum_0^a e^{-\nu_0}\frac{\nu_0^K}{K!} = \rho_0$$

On voit facilement que la première équation devient ensuite :

$$\nu_0 - \nu_c = \frac{\sum_0^a e^{-\nu_0}\frac{\nu_0^K}{K!}}{e^{\nu_0}\frac{\nu_0^a}{a!}} = \sum_0^a \frac{a!}{K!}\frac{1}{\nu_0^{a-K}}$$

En traçant la famille de courbes monotones $y_1 = \sum_0^a \frac{a!}{K!}\frac{1}{\nu_0^{a-K}}$ il est facile de déterminer par intersection avec les droites $y_2 = \nu - \nu_c$ la famille de courbes $\nu_0(\nu_c, a)$ en fonction de ν_c - (abaque n° 1).

En reportant la valeur de $\nu_0(\nu_c, a)$ dans l'équation auxiliaire $\lambda = (\frac{\nu_0}{\nu_c} - 1)\sum_0^a e^{-\nu_0}\frac{\nu_0^K}{K!}$ on obtient une représentation de la famille de courbes $\lambda(\nu_c, a)$ en fonction de ν_c (abaque n° 2).

La 2ème équation initiale s'écrit alors :

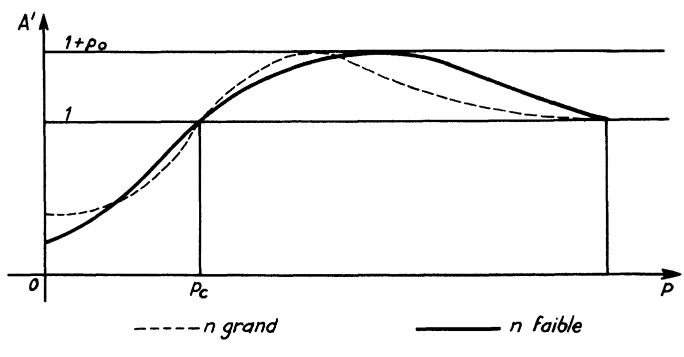
$$(1-\frac{n}{N})\,\lambda(\nu_c, a) = \rho_0$$

Il est relativement aisé de trouver par approximations successives la valeur de n, solution de cette équation.

En première approximation n sera racine de l'équation $\lambda(\nu_c, a) = \lambda_0 = \rho_0$ cette valeur conduira à la valeur exacte de $\rho = \lambda_0(1-\frac{n}{N})$ la valeur de n trouvée en première approximation donne donc des garanties supérieures à celles souhaitées initialement.

Par approximations successives cette méthode permet de trouver la taille de tous les échantillons possibles qui satisferont à la première condition, à savoir, coût relatif maximum égal à $1 + \rho_0$.

Les courbes de la famille A' (p,a) en fonction de p ont l'allure suivante :



Tous les plans d'échantillonnage ainsi définis par le couple n, a, présenteront la même valeur du coût moyen maximum.

Pour déterminer le couple n, a satisfaisant à la condition : coût minimum pour la qualité moyenne livrée, l'application numérique se relève comme étant la méthode la plus simple et la plus rapide.

On calculera donc pour chaque couple n,a trouvé, la valeur $\overline{A'} = 1-(1-\frac{n}{N})(1-\frac{\bar{\nu}}{\nu_c})\sum_0^a e^{-\bar{\nu}}\frac{\bar{\nu}^K}{K!}$

Le couple rendant minimum $\overline{A'}$ sera retenu.

4-1-1) <u>Exemple</u>. Un exemple concret permet d'illustrer la méthode :

Un fournisseur livre par lot de 1 000 unités des articles destinés à être montés dans un organe fonctionnel des unités fabriquées.

Le coût de contrôle unitaire pour cet article est 15 fr.

Si un article défectueux est livré par erreur à la fabrication, deux sortes de répercussions peuvent se produire.

Dans 30 cas sur 100 en moyenne le défaut est détecté au contrôle de l'organe monté, et entraîne un coût de démontage de 100 fr. Si le défaut n'est pas détecté au contrôle de l'organe monté, il entrainera tôt ou tard en clientèle un coût de répercussion de 1 000 fr. Le coût de répercussion moyen est alors :

$$r = 0,3 \times 100 + 0,7 \times 1000 = 730 \text{ fr.}$$

Le relevé des rebuts détectés dans les livraisons antérieures a permis d'établir que la proportion moyenne de rebuts dans les livraisons était égale à 0,5%.

Peut-on faire un contrôle par échantillonnage ? Si oui, quel plan choisir ?

4-1-1-1) Solution.

On a ici : $c =$ 15 fr

$r =$ 730 fr

d'où :

$$p_c = \frac{c}{r} = 2,06\%$$

comme $\overline{p} = 0,5\% < 2,06\%$ il est possible de réduire le coût de contrôle en effectuant un contrôle par échantillonnage.

4-1-1-2) Détermination des couples n,a, satisfaisant à la 1ère condition.

Si on accepte un coût total moyen maximum égal à 1,1 fois le coût de contrôle à 100%, on a $\rho_0 = 0,10$.

1ère approximation.

On prendra $\lambda_0 = 0,10$, L'abaque n° 2 permet de trouver les valeurs de ν_c (a) satisfaisant à $\left(\frac{\nu_0}{\nu_c} - 1\right) \sum_0^a e^{-\nu_0} \frac{\nu_0^K}{K!} = 0,1$.

D'où les valeurs correspondantes de $n_1 = \frac{\nu_c}{p_c}$ et finalement les valeurs de $\rho = \left(1 - \frac{n_1}{N}\right)\lambda_0$

a	0	1	2	3	4	5
ν_c	1,15	2,00	2,05	3,80	4,45	5,35
$n_1 = \frac{\nu_c}{p_c}$	56	97	138	184	215	259
$\frac{n_1}{N}$	0,056	0,097	0,138	0,184	0,215	0,259
$1 - \frac{n_1}{N}$	0,944	0,903	0,862	0,816	0,785	0,741
$\rho = \lambda_0 \left(1 - \frac{n_1}{N}\right)$	0,0944	0,0903	0,0862	0,0816	0,0785	0,0741

2ème approximation.

Les valeurs de n ainsi trouvées conduisent à $\rho = \lambda_0 \left(1 - \frac{n_1}{N}\right) < 0,10$

En 2ème approximation on entrera donc dans l'abaque n° 2 en prenant $\lambda_1 = \frac{0,1}{1-\frac{n_1}{N}}$

D'où le tableau suivant :

a	0	1	2	3	4	5
λ_1	0,106	0,111	0,116	0,122	0,427	0,135
ν_c	1,10	1,95	2,70	3,50	4,12	4,85
$n_2 = \frac{\nu_c}{p_c}$	53	95	131	170	200	236
$\frac{n_2}{N}$	0,053	0,095	0,131	0,170	0,200	0,236
$1 - \frac{n_2}{N}$	0,947	0,905	0,069	0,830	0,800	0,764
$\lambda_1(1 - \frac{n_2}{N})$	0,1004	0,1004	0,1008	0,1013	0,1016	0,1031

Cette approximation est très suffisante compte-tenu du degré de précision du tracé des courbes.

4-1-1-3) Détermination du couple rendant A' minimum :

Avec les valeurs de n précédentes on dresse le tableau suivant :

a	0	1	2	3	4	5
n	53	95	131	170	200	236
$1 - \frac{n}{N}$	0,947	0,905	0,869	0,830	0,800	0,764
$(1-\frac{n}{N})(1 - \frac{\overline{p}}{p})$	0,717	0,685	0,658	0,628	0,606	0,578
$\overline{\nu} = n\overline{p}$	0,265	0,475	0,658	0,850	1,00	1,18
$P(\overline{\nu}, a)$	0,770	0,917	0,972	0,989	0,996	1
$(1-\frac{n}{N})(1-\frac{\overline{p}}{p_c})P(\overline{\nu},a)$	0,552	0,628	0,639	0,621	0,603	0,558
$\overline{A'}$	0,448	0,372	0,361	0,379	0,397	0,442

Le coût minimum est obtenu pour a = 2
N = 131

Si on calcule les valeurs remarquables de $P(\overline{\nu}, 2)$ on a

$$P(\overline{\nu}, 2) = 0,972$$

$$P(\nu_c, 2) = 0,494$$

$$P(\nu_0, 1) = 0,204$$

L'abaque n° 1 donne $p_o = 3,24\%$

p_o vaut à peu près une fois et demi la valeur $p_c = 2,06\%$ et plus de 6 fois la valeur moyenne $\overline{p} = 0,5\%$. Ce n'est donc que dans des cas tout à fait exceptionnels que l'on atteindra la valeur maximum $\rho_o = 0,10$.

4-2 COÛT DE TRI IMPUTÉ AU FOURNISSEUR A PARTIR DE p_c

Les équations établies précédemment

$$p_o\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_{p=p_o} + P_o = 0$$

$$\frac{p_o}{p_c} P(n, p_o, a) = 1$$

deviennent avec la loi de Poisson

$$\nu_o \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \sum_o^a e^{-\nu} \frac{\nu^K}{K!}\right)_{\nu=\nu_o} + \sum_o^a e^{-\nu_o} \frac{\nu_o^K}{K!} = 0$$

$$\frac{\nu_o}{\nu_c} \sum_o^a e^{-\nu_o} \frac{\nu_o^K}{K!} = 1$$

La première équation $\sum_o^a e^{-\nu_o} \frac{\nu_o^K}{K!} - e^{-\nu_o} \frac{\nu_o^{a+1}}{a!} = 0$ détermine ν_o en fonction de a.

En reportant cette valeur de $\nu_o(a)$ dans la 2ème équation on obtient une relation de la forme $np_c = \varphi(a)$.(1)(voir remarque)

D.J. DUNCAN dans son ouvrage "Quality control and Industrial Statistics" (page 148) donne les valeurs de $\varphi(a)$

a	0	1	2	3	4	5
$\varphi(a)$	0,368	0,841	1,372	1,946	2,544	3,172

On peut donc connaissant p_c trouver facilement le couple de valeurs n, a satisfaisant à la première condition imposée, à savoir : coût total maximum égal au coût de contrôle à 100%.

La deuxième condition : coût minimum pour la qualité moyenne livrée donnera lieu à un calcul direct, en prenant la fonction de coût sous la forme :

$$A' = 1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 - \frac{\bar{\nu}}{\nu_c}\right) \sum_o^a e^{-\bar{\nu}} \frac{\bar{\nu}^K}{K!} \qquad \text{si} \qquad \bar{p} < p_c$$

ou

$$A' = \frac{n}{N} + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\bar{\nu}}{\nu_c} \sum_o^a e^{-\bar{\nu}} \frac{\bar{\nu}^K}{K!} \qquad \text{si} \qquad \bar{p} > p_c$$

4-2. - 1) <u>Exemple</u>. L'exemple suivant va illustrer la méthode.

En reprenant les données de l'exemple précédent :

$c = 15$ f

$r = 730$ f

$N = 1000$

$\bar{p} = 0,5\%$

On a ici : $\bar{p} < p_c$

On utilisera donc la première détermination de A'(p) d'où le tableau

a	0	1	2	3	4	5
φ (a)	0,368	0,841	1,372	1,946	2,544	3,173
$n = \frac{\varphi(a)}{p_c}$	18	41	67	95	124	154
$\frac{n}{N}$	0,018	0,041	0,067	0,095	0,124	0,154
$1 - \frac{n}{N}$	0,982	0,959	0,933	0,905	0,876	0,846
$(1 - \frac{n}{N})(1 - \frac{\bar{p}}{p_c})$	0,743	0,726	0,706	0,685	0,663	0,640
$\bar{\nu}$	0,09	0,205	0,335	0,475	0,62	0,77
$P(\bar{\nu}, a)$	0,912	0,981	0,995	0,999	1,000	1,000
$(1 - \frac{n}{N})(1 - \frac{\bar{p}}{p_c}) P(\bar{\nu}, a)$	0,678	0,712	0,702	0,684	0,663	0,640
$\bar{A}'$	0,322	0,288	0,298	0,316	0,337	0,360

(1) Remarque : On voit facilement que $\varphi(a) = e^{-\nu_o} \frac{\nu_o^{a+2}}{a!}$ où ν_o est solution de l'équation $\nu_o = \sum_o^a \frac{a!}{K!} \frac{1}{\nu_o^{a-k}}$, cas particulier de l'équation $\nu_o - \nu_c = \sum_o^a \frac{a!}{K!} \frac{1}{\nu_o^{a-k}}$ donnée précédemment (page 7).

On voit que le minimum de A' est obtenu pour n = 41 a = 1

Le plan d'échantillonnage donne $P(\overline{p}) = 0,981$ d'où $\alpha = 1,9\%$

$$P(p_c) = 0,793$$

On voit la valeur considérable de β!.

On prélèvera donc des échantillons de 41 unités. Chaque fois que le lot sera trié, et que la proportion des rebuts sera supérieure à 2,06% (C'est-à-dire, plus de 20 rebuts dans le lot de 1000 unités), le coût de tri total sera facturé au fournisseur soit ici : (1000 - 41) x 15 = 14 385 fr.

V. — DISCUSSION DE LA MÉTHODE

Cette méthode n'est pas exempte de critiques, celles-ci portent sur les points suivants :

- le choix de ρ_0 reste en fait arbitraire.
- la solution donnée à l'aide de la loi de Poisson ne vaut que pour des valeurs de n grand, p petit, et dans l'hypothèse de non exhausivité.

5-1) CRITIQUE DU CHOIX DE ρ_0

ρ_0 constitue un paramètre arbitraire de la méthode, mais quelques considérations permettent d'en fixer une valeur raisonnable.

On remarquera que plus on désire un ρ_0 faible, plus en compensation n devient grand : pour limiter les conséquences de la perte en cas de livraisons défectueuses, on a un manque à gagner en cas de livraisons bonnes.

Cette remarque montre que le choix de ρ_0 doit être basé sur des considérations de variabilité des livraisons.

Si les livraisons sont peu dispersées autour de la valeur moyenne $\overline{p}$ on pourra sans grand danger adopter des valeurs de ρ_0 importantes.

Si par contre, les fluctuations de p sont importantes, il y aura lieu de limiter ρ_0 à des valeurs faibles.

En toute rigueur le choix d'un plan d'échantillonnage devrait être basé non seulement sur la minimisation du coût pour la qualité moyenne livrée, mais sur la minimisation du coût moyen résultant de la répartition des livraisons.

Si f(p) est la loi de distribution de la proportion p livrée, le coût moyen est :

$$E\left[\,A(p)\,\right] = \int_0^1 A(p)\, f(p)\, dp$$

Les deux paramètres du plan peuvent à ce moment être déterminés sans aucun arbitraire en minimisant $E[A(p)]$

$$\frac{\partial}{\partial n} E\left[A(p)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a} E\left[A(p)\right] = 0$$

Par ailleurs on peut désirer agir sur la taille des lots pour améliorer l'optimum économique.

$$\frac{\partial}{\partial N} E\left[A(p)\right] = 0$$

Cette dernière condition risque d'ailleurs d'être illusoire dans certains cas car il serait nécessaire de tenir compte des questions de stockage et d'épuisement des stocks.

5-2) VALIDITÉ DE LA SOLUTION DONNÉE A L'AIDE DE LA LOI DE POISSON.

Les limitations empiriques classiques de la loi de Poisson comme approximation de la loi hypergéométrique sont :

$$np < 5$$
$$n > 50$$
$$\frac{n}{N} < 0{,}10$$

Le tableau ci-dessous représente quelque valeur de P(n,p,a) dans le cas hypergéométrique et dans le cas de Poisson, avec n = 97 a = 1 n = 200.

p en %	0,5	1	2	3	4
p (Poisson)	0,92	0,74	0,45	0,21	0,10
p hypergéométrique	1	0,76	0,33	0,12	0,04

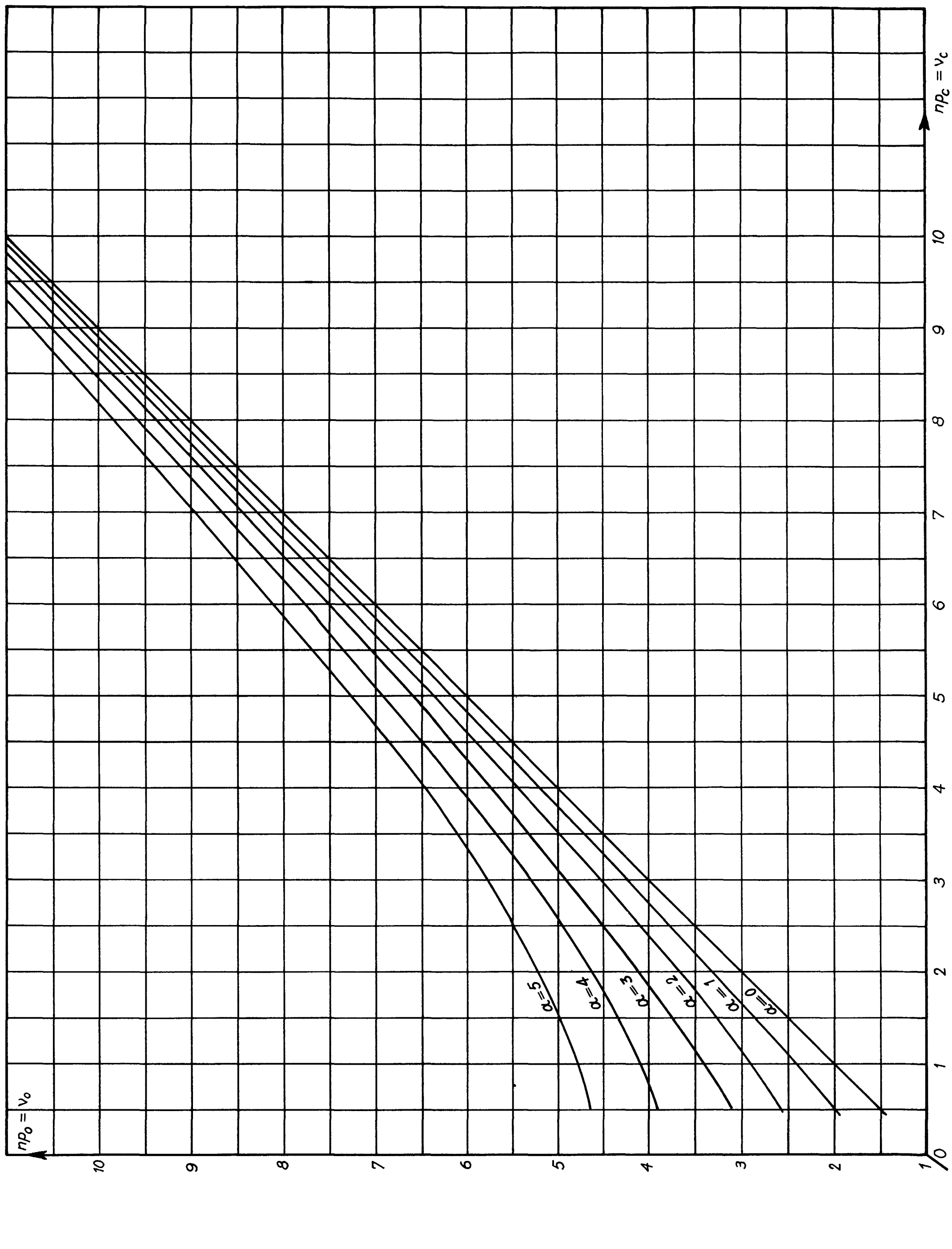
Malgré la fraction de sondage élevée (voisine de 50%) on voit que les différences entre loi de Poisson et loi Hypergéométrique, ne sont pas très considérables. D'ailleurs l'adoption de la loi de Poisson conduit à améliorer la sécurité.

5-3) AVANTAGES DE LA MÉTHODE.

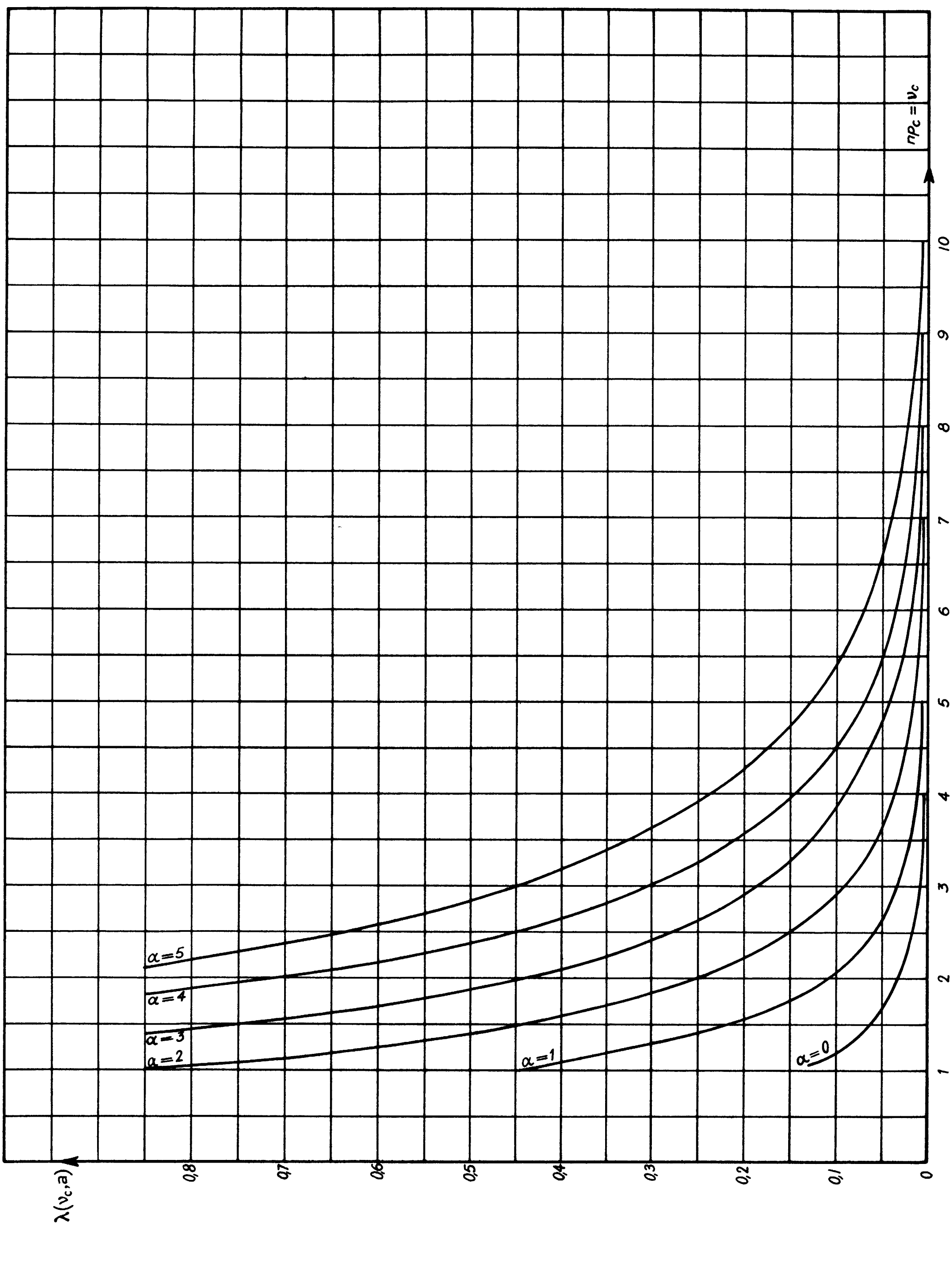
La méthode présentée a l'avantage de tenir compte de l'ensemble des répercussions économiques résultant de l'adoption d'un plan de contrôle. Le fait de décider de l'application des méthodes d'échantillonnage au contrôle de réception, ne relève plus d'un choix arbitraire mais de considérations de coût, facilement chiffrable.

Cette méthode permet de préciser les avantages procurés par le contrôle par échantillonnage et aussi ses limites. Par exemple, si par suite de modernisation de l'équipement de contrôle, le coût de contrôle c diminue, la valeur de p_c peut alors devenir inférieure à $\overline{p}$ et dans ce cas le contrôle par échantillonnage ne se justifie plus dans le cas où le client supporte tous les frais de contrôle.

NB - Nous sommes très reconnaissant à Monsieur HENON, professeur à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, d'avoir bien voulu nous signaler que des considérations de coût avaient été déjà envisagées dans des questions analogues en particulier par WC. COCHRAN dans son livre Sampling Techniques p. 61, "An attempt at a general solution of the sample size problem" et p. 200, "A cost fonction."



Abaque n° 1


$\lambda(\nu_c, a)$
$np_c = \nu_c$
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$\alpha=0$
$\alpha=1$
$\alpha=2$
$\alpha=3$
$\alpha=4$
$\alpha=5$

Abaque n° 2