Revue de statistique appliquée

W. Edwards Deming

Sur les échantillonnages de matériaux

Revue de statistique appliquée, tome 5, nº 1 (1957), p. 23-41

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1957__5_1_23_0>

SUR LES ÉCHANTILLONNAGES DE MATÉRIAUX [1]

par

W. Edwards DEMING

Les méthodes employées dans le contrôle statistique des fabrications (contrôle en cours de fabrication, contrôle de réception...) ne constituent qu'un cas particulier des méthodes générales d'enquêtes par sondages d'une portée très générale. Ces méthodes sont largement employées dans de nombreux domaines (enquêtes de marché, enquêtes socio-économiques) soit parce que le recensement exhaustif est pratiquement impossible (par exemple lorsqu'il nécessite le travail d'enquêteurs à domicile), soit pour des raisons de plus grande rapidité et de moindre coût.

W.-E. DEMING a dirigé la section Sondages au « National Bureau of Standards » de Washington, depuis plusieurs années, il s'est spécialement intéressé aux problèmes industriels tant aux Etats-Unis que dans divers pays étrangers (Japon, Inde...).

Dans le présent article, l'auteur étudie quelques problèmes d'application des méthodes statistiques aux sondages pratiqués sur des matériaux ou des ensembles complexes.

PORTÉE ET BUT DE CET ARTICLE

Un problème très important pour l'industrie et le commerce est de mesurer (avec précision, célérité et à peu de frais) les quantités et qualités d'objets ou de matériaux, - matières premières ou produits manufacturés. Des millions de dollars changent de mains chaque jour, comme par exemple les cargaisons qui passent des mains du vendeur à celles de l'acheteur, ou d'un service à l'autre à l'intérieur de la même usine, ou encore lorsqu'on établit des statistiques et qu'on perçoit des droits de douane à propos de marchandises importées. Le but du présent article est d'indiquer quelques-uns des moyens par lesquels la théorie statistique ordinaire peut trouver à s'appliquer utilement aux échantillonnages pratiqués sur des matériaux.

On devrait insister sur une distinction à faire entre les problèmes de sondage rencontrés : a) dans le contrôle de qualité; b) dans les sondages en vue d'accepter une marchandise à la livraison et c) dans les échantillonnages de matériaux envisagés ici. Dans les problèmes de type a) et b) on a toujours supposé, je crois, qu'un échantillon de n articles manufacturés est ce qu'on appelle un échantillon tiré au hasard d'un lot ou de la production d'une demi-heure, et que les théories du sondage au hasard s'appliquent. Ici, au contraire, (problèmes de type c), la question dont on s'occupe est de trouver **comment tirer un échantillon** au hasard, et comment le tirer de manière économique, de façon à pouvoir établir, avec un degré de précision donné, quelque qualité (poids, cendres contenues, état physique moyen) d'un lot d'articles manufacturés, **et ceci au coût le plus bas possible**. On peut appeler le problème (c) le problème du sondage économique d'un lot de matériaux.

On peut pratiquer de plusieurs manières le sondage, l'échantillonnage, pour mesurer quelque qualité moyenne d'un lot d'objets.

---

(1) Traduction par M. Thionet d'un article publié dans la Revue de l'Institut International de Statistique - Vol. 18 - n° 1 - 2 - 1950.

I. - Le poids et la qualité d'une cargaison d'objets empaquetés (qui n'ont pas été mesurés avant emballage) peuvent être déterminés en pesant et mettant à l'épreuve un échantillon de paquets. Par exemple, une cargaison comprend des centaines de colis de laine, tabac, sucre et autres produits. Par quel procédé de sondage obtenir le tonnage de la cargaison à moins de 1/2% et ceci au moindre coût ?

II. - Déterminer à nouveau la qualité moyenne d'un lot d'objets empaquetés qui ont été déjà pesés ou essayés, un à un, à une quelconque époque antérieure. Parfois un lot aura été stocké quelques mois ou quelques années. On connaissait la qualité de chaque article ou de chaque paquet à l'époque de la mise en stock, mais la qualité a pu changer dans l'intervalle; ou une nouvelle détermination du calibre peut être nécessaire pour une raison quelconque. Quelle est à présent la qualité moyenne de tout le stock? Par exemple celui-ci comprend des centaines de balles, sacs et autres colis de laine, tabac, sucre et autres produits, qu'on a pesés un à un dans quelque port étranger; et le poids a été marqué sur le colis en livres anglaises ou espagnoles, kilogrammes, etc ..., ou toute autre unité. Par quelle méthode d'échantillonnage obtenir le poids (ou quelqu'autre qualité importante) de la cargaison à moins de 1/2% près et ceci au moindre coût?

III. - Déterminer (par exemple) le pouvoir calorifique moyen ou les cendres, pour un produit se présentant sous forme d'un tas de charbon ou d'un camion de charbon?

IV. - Déterminer l'état physique moyen des diverses catégories d'éléments d'un réseau téléphonique, télégraphique, de chemin de fer, de distribution du gaz ou de l'électricité.

Ce problème est important pour connaitre l'état actuel de l'ensemble du système et pour estimer la nature et l'importance de l'entretien et des réparations à faire, qui seront nécessaires d'ici 5 ou 10 ans.

De tels renseignements permettent à une société de mettre de côté les sommes convenables pour faire des réparations et, avec un programme à longue échéance, de profiter des avantages offerts par les cours de l'acier, du cuivre, du bois de charpente et des produits finis à certaines époques, et aussi pour établir les besoins en main-d'oeuvre qui sont nécessaires. Il y a là un problème de sondage : comment les échantillons peuvent-ils être prélevés pour évaluer l'état physique de l'ensemble des biens ou d'une catégorie d'entre eux, - par exemple à 1% près?

MANIÈRE GÉNÉRALE D'ABORDER UN PROBLÈME DE SONDAGE

On fera d'abord quelques remarques sur la manière générale d'aborder un problème de sondage.

L'une des premières questions à régler est le choix de l'unité de sondage. Si l'on doit estimer la qualité d'une cargaison entière ou d'un lot, on les suppose divisibles en parties distinctes identifiables, appelées unités de sondage. Chaque partie du lot doit se trouver dans l'une et une seulement des unités de sondage. Quand le produit se présente en colis ou paquets, le paquet est parfois (mais pas toujours) une unité naturelle et économique. C'est seulement le cas s'il est possible (et s'il n'est pas trop coûteux) de désigner n'importe quel paquet déterminé (en vue de l'inclure dans l'échantillon) et de l'extraire de la cargaison (pour le peser ou l'essayer), quel que soit le paquet désigné.

Si l'on doit tirer les unités de sondage avec d'égales probabilités, on devra les définir de manière qu'elles soient (par leur poids et autres qualités) aussi semblables que cela est raisonnablement possible. On ne s'occupera pas ici de sondage avec probabilités inégales.

Outre le problème de définir des unités de sondage acceptables, on a également besoin de renseignements sur l'ordre de grandeur et la stabilité des variances entre unités de sondage. On a également besoin de renseignements sur le coût des diverses opérations que nécessite la pesée ou l'essai, non seulement quand on applique la routine habituelle, mais encore dans les conditions mêmes d'une opération de sondage. Ainsi, l'une des premières étapes, quand on commence à établir un plan de sondage, est de commencer par réunir des renseignements sur les variances et les coûts.

L'ÉCHANTILLONNAGE DE PRODUITS EMPAQUETÉS - PROBLÈME I

D'excellentes recherches de début sur les Problèmes I et II ont été faites par (1) Williams, Tanner et les autres chercheurs du **Bureau of Customs** (= Direction des Douanes); et il sera intéressant de réunir ici leurs résultats (2). La laine en balles, le sucre brut en sacs, le tabac, le "burlap" et les plumes en balles sont importés aux Etats-Unis en énormes cargaisons. La détermination du poids et de la qualité moyenne d'une cargaison est nécessaire pour l'acheteur et le vendeur, pour les statistiques d'importation et d'exportation et pour l'échantillonnage des droits de douane. Il estnécessairepour l'administration des Douanes de procéder aux évaluations du poids et de laqualité pour établir les droitsde douane, par des méthodes que legouvernement et l'industriereconnaissent êtreefficaces, loyales, précises et économiques.

Tels sont précisément les objectifs qu'on vise à atteindre avec les nouvelles méthodes de sondage.

Échantillonnage à un degré, suite du problème I

Dans l'échantillonnage àun degré, on choisitun échantillon de m unités; et on éprouve chacune des unités de l'échantillon en totalité, c'est-à-dire sans sondage à l'intérieur de celle-ci. On va poser quelques-unes des lois générales relatives aux variances correspondant aux échantillons au hasarddans le cas d'un échantillon à un degré.

Soit M unités de sondage (colis, articles, balles)numérotés 1 à M, dont chacun peut être retrouvé et identifié de manière univoque. On supposera qu'on doit tirer un échantillon au hasard de m unités primaires. Une manière commode de procéder en pratique à ce tirage au hasard est d'employer une table denombres aléatoires. Si on a (par exemple) M = 1.267 et que m doive être égal à 50, on lit simplement (à partir du haut ou du bas) une colonne de nombres aléatoires à 4 chiffres, en écartant 0000, ainsi que tous les nombres supérieurs à 1.267, mais en conservant les 50 premiers nombres distincts compris entre 0.001 et 1.267 (inclus).

Avant d'étudier la variance d'échantillonnage de l'estimation du poids total des M colis, il y a lieu d'adopter certains symboles. Pour simplifier cet exposé, on supposera qu'on doit mesurer le **poids** et on parlera d'un colis pour dire :"une unité de sondage".

Poids des M colis du lot :	$x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, M)$
Poids des m colis de l'échantillon :	$x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$
Poids moyen des M colis du lot	$\mu = \frac{1}{M} \sum_1^M x_i$
Poids moyen des m colis de l'échantillon	$\overline{x} = \frac{1}{m} \sum_1^M x_i$
Variance des colis du lot	$\sigma^2 = \frac{1}{M} \sum_1^M (x_i - \mu)^2$
Variance des colis de l'échantillon	$s^2 = \frac{1}{m} \sum_1^m (x_i - \overline{x})^2$
Poids total du lot	$M\mu = A$
Poids total du lot estimé à l'aide de l'échantillon	$M\overline{x} = X$
Coefficient de variation, ou erreur-type relative, de l'estimation $M\overline{x}$ ou de $\overline{x}$ lui-même	$C_X = C_{\overline{x}}$

(1) John F. WILLIAMS & Louis TANNER: "Statistical Methods in the weighting of imported merchandise". Congrès de l'A.S. Ass. Cleveland, Dec. 1948.

(2) Un autre article sur l'échantillonnage de matériaux a été publié par Louis TANNER et W. Edwards DEMING "Some Problems in the sampling of bulk materials (Proceedings of the American Society for testing Materials, Vol. 49, 1949).

Si les unités de l'échantillon sont tirées au hasard, l'estimation $M\bar{x}$ ou X est alors une variable aléatoire et son coefficient de variation (ou erreur relative type) sera donné par la formule :

$$C_X^2 = C_{\bar{x}}^2 = \frac{M - m}{M - 1} \frac{\sigma^2}{m\mu^2}$$

Cette formule est fondamentale et est établie dans les manuels élémentaires relatifs aux Sondages. Elle est valable pour n'importe quelle distribution de M poids dont la variance est σ^2.

Il est clair que la précision s'accroit, - c'est-à-dire que C_X ou C_X décroit, - si l'effectif m de l'échantillon augmente. On peut obtenir la précision que l'on veut en choisissant un effectif convenable pour l'échantillon. Ainsi, si on désire avoir une erreur-type de 1% pour $\bar{x}$ ou X, et si M = 1.267, μ = 300 kilogrammes et σ/μ = 5%, la formule (1) donne

$$m = \left[1 - \frac{m - 1}{M - 1}\right] \cdot \left[\frac{\sigma}{\mu C_X}\right]^2 \qquad (2)$$

Cette équation en m peut se résoudre sans difficulté et le résultat est m = 25. Ainsi, si C_X ou $C_{\bar{X}}$ doit être égal à 1%, il suffira de peser un échantillon au hasard de 25 colis.

Si l'on désire avoir une erreur-type plus petite, par exemple (1/2%), l'effectif que l'échantillon doit atteindre passera à 93.

En pratique, si l'on doit désigner un échantillon de colis pour les peser, pendant que l'on charge ou que l'on décharge la cargaison, on a l'habitude de peser 1 colis sur n. Dans le problème que l'on vient de résoudre (M = 1.267, m = 25) on pèserait 1 colis sur 50, à partir d'un colis dont le rang soit un nombre aléatoire compris entre 1 et 50. Un échantillon composé à l'aide d'un colis sur n est appelé un choix systématique. La variance d'échantillonnage d'un tel échantillon sera d'habitude légèrement inférieure à la variance d'un échantillon au hasard donnée par la formule (1). En revanche, dans certaines circonstances, la variance d'échantillonnage correspondant à un tirage systématique pourra être plus élevée que la variance d'un échantillon au hasard. Il n'y a encore rien de mieux à faire que de procéder à certaines expériences sur les matériaux dont on doit prélever un échantillon.

Le coût (et la réduction de frais) que l'on peut espérer de l'emploi du sondage peuvent d'habitude se calculer approximativement, à l'avance, sur la base d'évaluations grossières de la variance σ^2 et du coût de manutention des matériaux à sonder, évaluations fondées, bien entendu, sur l'expérience passée. Les sommes économisées dépendront de la facilité plus ou moins grande avec laquelle les colis pourront être désignés comme faisant partie de l'échantillon, puis pesés et enfin réintégrés dans le lot. Lorsque les colis constituant le lot sont déjà empilés dans un magasin, il peut être très coûteux d'extraire un paquet déterminé situé à l'intérieur du tas ou au-dessous. Bien plus, aucun paquet déterminé ne peut être désigné si l'on ne peut numéroter les M colis de 1 à M, d'une façon ou d'une autre, et aussi si l'on ne connait pas l'emplacement de n'importe quel colis déterminé, de façon qu'on puisse le retrouver. D'habitude le coût de l'opération est beaucoup plus faible et les économies sont beaucoup plus grandes si les colis sont pesés quand on les charge ou qu'on les décharge.

Les économies en puissance que l'on peut faire en introduisant la méthode des sondages sont souvent élevées, bien qu'en pratique il soit souvent nécessaire de faire preuve d'ingéniosité pour organiser le travail de manière à réaliser effectivement des économies. En pratique, les économies possibles atteignent souvent 70% du coût que représenterait la pesée des M colis; et parfois les économies sont beaucoup plus importantes.

Un exemple de sondage à 1 seul degré se présente dans le cas de l'évaluation du tonnage du sucre raffiné importé aux Etats-Unis (1). Cette denrée arrive par lots importants, comprenant souvent jusqu'à 43.000 sacs de modèle standard pesant chacun environ 100 livres. Les pesées ont lieu d'habitude sur des prélè-

(1) Le reste de ce paragraphe est reproduit presque mot à mot à l'article de TANNER & DEMING déjà cité.

vements de 8 sacs au magasin, après que les sacs endommagés (environ 1,4% du total) aient été séparés en vue d'un traitement spécial. Une étude des pesées antérieures à montré que le coefficient de variation σ/μ des pesées des prélèvements (de 8 sacs chacun) des sacs intacts de sucre raffiné est stable et seulement en moyenne de 0,1%. A l'aide de la formule (1), on peut montrer que la pesée d'un seul prélèvement donnerait une estimation (X) du poids de la cargaison totale, avec un coefficient de variation égal à celui-ci. La pesée de 9 prélèvements donnerait une estimation (X) dont la limite de 3 erreurs-types est 0,1%, c'est-à-dire telle que l'erreur de sondage ne dépasserait que très rarement 0,1%.

En pratique on pourrait peser un échantillon de 25 prélèvements; le coût d'une telle pesée étant négligeable à côté du coût de l'opération qui consisterait à peser toute la cargaison. En outre, 25 prélèvements suffisent à donner une bonne estimation de σ. Il est préférable de faire très régulièrement des estimations de σ, afin de connaitre constamment son ordre de grandeur et ses variations.

Échantillonnage à deux degrés, suite du problème I

Au lieu d'un sondage à 1 seul degré, il est parfois plus économique de prendre l'échantillon en 2 degrés ou même en 3, - en particulier si les colis sont déjà empilés dans un magasin de telle manière que l'extraction d'un colis déterminé soit difficile. Avec 2 degrés de sondage, on distingue des unités primaires et des unités secondaires. Les unités primaires pourraient être des couches de paquets ou des fractions de ces couches. Dans le cas d'un sondage de laine en balles (voir plus loin) en vue d'estimer le contenu d'un lot de balles une fois la laine lavée, les unités primaires seront les balles de laine, et les unités secondaires seront des " **cores** " (touffes de laine) coupées dans les balles. Les unités primaires devraient avoir, autant que possible, même taille et même qualité; et il devrait en être de même des unités secondaires. La raison de ce fait peut se voir à l'aide de la formule (3). Si les unités primaires sont très inégales, C_b^2 sera grand; et si les unités secondaires sont très inégales, $C_W{}^2$ sera grand. Si l'une de ces quantités est grande, cela augmentera l'effectif que l'échantillon doit avoir pour qu'on atteigne à une précision donnée.

On supposera que les unités primaires ont pu être comptées et identifiées de 1 à M inclusivement. On supposera, en outre, que les unités secondaires (peut être constituées par des colis) peuvent être comptées et identifiées de 1 à N_i, à l'intérieur de l'unité primaire n°i de l'échantillon. Le problème de sondage qui se pose est de trouver combien il faudrait tirer d'unités primaires, et combien d'unités secondaires devraient être tirées de chaque unité primaire de l'échantillon, puis être pesées (ou mises à l'épreuve d'une façon quelconque), de façon à satisfaire aux conditions imposées concernant la précision, et ceci au coût le plus faible possible.

On supposera que les unités primaires et secondaires sont tirées au hasard et qu'on peut employer une table de nombres aléatoires pour désigner les échantillons, bien que (comme pour un sondage à un seul degré) un mode de désignation systématique de l'échantillon puisse être utilisé au lieu d'une désignation au hasard.

Pour un sondage à 2 degrés, il sera nécessaire d'adopter quelques notations nouvelles. On supposera ici que $N_1 = N_2 = \ldots = \overline{N}$, à la fois pour simplifier et parce que c'est souvent la à peu près la situation réelle (1).

NOTATIONS

k1 = dépense pour préparer une unité primaire de sondage;

k2 = dépense pour prendre une unité secondaire à l'intérieur d'une unité primaire;

M = nombre d'unités primaires dans le lot;

m = nombre d'unités primaires dans l'échantillon;

(1) Si les nombres N_1, N_2, ... ne sont pas tous égaux (même approximativement) la formule (3) sera plus compliquée; et le lecteur pourra consulter un traité relatif aux Sondages s'il désire une théorie plus complète.

$\overline{N}$ = nombre d'unités secondaires dans chaque unité primaire;

$\overline{n}$ = nombre d'unités secondaires à tirer de chaque unité primaire de l'échantillon;

σ_b^2 = variance entre les M unités primaires du lot; (1)

$C_b = \sigma_b/\mu$ = coefficient de variation entre les M unités primaires;

σ_w^2 = variance moyenne entre les unités secondaires à l'intérieur des unités primaires du lot;

$C_w = \sigma_w/\mu$ = coefficient moyen de variation entre les unités secondaires;

$\overline{x}$ = poids moyen des m $\overline{n}$ portions soumises à l'essai; et estimation du poids moyen du lot entier;

X = M $\overline{N}\,\overline{x}$ = estimation du poids du lot entier.

Le coefficient de variation C_X de l'estimation du poids total du lot et le coefficient de variation $C_{\overline{x}}$ du poids moyen (ou d'un autre caractère) par unité secondaire, dépendent de M, m, C_b et C_w, par la relation :

$$C_X^2 = C_{\overline{x}}^2 = \frac{M - m}{M - 1}\,\frac{C_b^2}{m} + \frac{\overline{N} - \overline{n}}{\overline{N} - 1}\,\frac{C_w^2}{m\,\overline{n}} \qquad (3)$$

Pour obtenir σ_X, il suffit de multiplier C_X par $M\,\overline{N}\mu$; et pour avoir $\sigma_{\overline{x}}$ il suffit de multiplier $C_{\overline{x}}$ par μ. La formule (3) donne à la fois C_X et $C_{\overline{x}}$ sous une forme dont il est facile de se souvenir.

On peut représenter approximativement le coût total d'un sondage sur m $\overline{n}$ unités par la quantité :

$$K = m\,K_1 + m\,\overline{n}\,k_2 \qquad (4)$$

Pour un système quelconque de coûts et de variances (k_1 k_2 σ_b^2 σ_w^2) le meilleur plan de sondage et celui qui permet d'obtenir une valeur donnée du coefficient de variation C_X ou $C_{\overline{x}}$ tout en rendant minimum le coût K.

Ou encore c'est celui qui fournit le plus grande quantité d'information possible pour une dépense donnée K. Il est possible de montrer que ces conditions sont très sensiblement remplies si (6.7) 2.3).

$$\overline{n} = \frac{\sigma_w}{\sigma_b}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \frac{C_w}{C_b}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \qquad (5)$$

et

$$m = \frac{M\,\overline{n}\,C_b^2 + \frac{\overline{N} - \overline{n}}{\overline{N} - 1}(M - 1)\,C_w^2}{(M - 1)\,\overline{n}\,C_{\overline{x}}^2 + M\,\overline{n}\,C_w^2} \qquad (6)$$

On doit résoudre en $\overline{n}$ l'équation (5) pour savoir combien d'unités secondaires doivent être tirées de chaque unité primaire; et ensuite on doit résoudre l'équation (6) en m pour savoir combien d'unités primaires devraient être extraites du lot. Il est intéressant de noter que la valeur optimum de $\overline{n}$ (nombre d'unités secondaires par unité primaire) ne dépend ni de m ni de la précision désirée C_X ou $C_{\overline{x}}$.

Manifestement les solutions obtenues pour n et m nécessitent la connaissance des variances σ_b^2 et σ_w^2 et des coûts k_1 et k_2. Dans l'équation (6), $C_{\overline{x}}$ est le coefficient de variation qu'on désire obtenir pour $\overline{x}$ ou pour X, ce peut être, par exemple, 1/2%. Il est toutefois important de remarquer : (a) que $\overline{n}$ est déterminé si les quotients σ_w/σ_b et k_1/k_2 sont seuls connus; et (b) qu'il n'est pas nécessaire de connaitre ces quotients avec une grande précision, en particulier en ce qui concerne k_1/k_2, qui figure sous un symbole de racine carrée.

(1) Pour des définitions plus détaillées et plus générales de ces variances et pour établir la formule (3), le lecteur pourra consulter un traité sur les Sondages.

(2) La formule (5) semble avoir été publiée simultanément par L.H.C. TIPPETT dans "Methods of Statistics (WILLIAMS & NORGATE 1931), p. 177 et par Walter A. SHEWHART "The Economic Control of Quality of Manufactures Product" (Van Nortrand, 1931), p. 389.

(3) Si σ_w^2 n'est pas petit à côté de $N\sigma_b^2$, la formule (5) peut être remplacée par

$$\overline{n} = \frac{\sigma_w}{\sigma_b}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{1}{1 + \sigma_w^2/\overline{N}\sigma_b^2}} = \frac{C_w}{C_b}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{1}{1 + C_w^2/\overline{N}\,C_b^2}}$$

De simples valeurs approchées de ces quotients permettront de distinguer facilement un plan de sondage très coûteux et un plan dont le coût K est voisin, à 5% près, du coût correspondant à l'optimum (ce dernier pouvant seulement être obtenu à l'aide de valeurs très précises des variances et des coûts). L'importance des économies qui peuvent être faites avec des renseignements très imprécis est vraiment remarquable.

Un exemple peut être utile ici (1). La laine brute se présente dans le commerce en lots de tailles diverses, en moyenne d'environ 100 balles mais pouvant atteindre 2.000 balles. Le poids d'une balle varie entre 200 livres et 1.200 livres, mais est sensiblement uniforme pour des balles de même origine. La laine renferme des graisses et autres impuretés, dont la proportion peut varier jusqu'à 30% à la fois entre balles d'un même lot et entre portions d'une même balle.

On a reconnu, depuis longtemps, qu'on avait besoin d'une méthode valable pour déterminer le pourcentage de laine lavée (que l'on pourra obtenir, sans avoir à opérer sur tout le lot ou sur une fraction élevée de ce lot. Le principal obstacle qui s'opposait à une telle méthode était encore récemment le fait qu'on ne peut se fier au seul type de petit échantillon qu'on pouvait prélever (d'habitude quelques poignées de laine prélevées suivant l'opinion d'un expert, dans quelques balles qu'on espérait représentatives). Cette difficulté particulière a été éliminée par l'usage d'un instrument de sondage pratique qui pénètre à l'intérieur de la balle de laine, jusqu'à n'importe quel endroit désigné au hasard, et qui peut en ramener une touffe relativement petite de laine. Il est important de calculer, à l'aide des équations données plus haut, combien de telles touffes devraient être prélevées par balle, et de combien de balles, pour estimer avec la plus faible dépense, quelle proportion de laine lavée existe dans le lot.

Dans le sondage sur la laine, l'unité primaire est la balle; l'unité secondaire est la touffe. Pour n'importe quelle valeur possible de n (telle que $\bar{n}$ = 1, ou 2, ou 4, etc ...) la valeur correspondante de m est donnée par (6). Un couple de valeurs ($\bar{n}$ et m) ainsi déterminées constituent ce qu'on appelle un plan de sondage optimum, un plan tel qu'on obtiendra la valeur voulue du coefficient de variation $C_{\bar{x}}$ avec la moindre dépense.

On peut imaginer divers plans de sondage, donnant tous la même précision, mais de coûts divers suivant les hypothèses faites. Naturellement le plan qui coûte le moins cher est le meilleur.

On a procédé à des recherches systématiques sur la valeur de σ_w et σ_b et sur la stabilité de ces valeurs pour de nombreux lots, rencontrés dans le commerce, de laines de types et numéros divers, provenant d'origines différentes réparties sur tout le globe. Comme on pouvait s'y attendre, il n'existe pas un couple unique de valeurs qui convienne pour tous les types de laine. Cependant on a trouvé que, si l'on regroupe les laines en un nombre relativement restreint de grands groupes suivant l'origine, le type de laine et le type de balles, les variances étaient sensiblement stables et pouvaient fournir des estimations utiles pour faire des plans de sondage. Le tableau I montre quelques valeurs typiques de variances.

En portant ces estimations de σ_w et σ_b dans l'équation (6), on peut préparer des plans de sondage qui, pour chaque catégorie de laine, donneront le nombre m de balles qu'il faut extraire de lots d'effectif M suivant le nombre variable (n) de touffes à tirer par balle, pour un niveau de précision donné. Les 4 plans de sondage donnés à titre d'exemple au tableau II donneront la même précision mais leurs coûts seront différents.

Catégorie de laine	σ_w	σ_b
Laine d'Argentine	2,5	2,5
Laine d'Australie	1,5	4,0
Laine du Chili	2,0	5,0
Laine d'Uruguay	2,0	1,5
Laine du pays (U.S.A.)	4,5	2,0

TABLEAU I - CLASSIFICATION DES LAINES

(1) Le reste de ce § est reproduit presque textuellement de l'article de TANNER & DEMING déjà cité.

TABLEAU II

Tableau montrant le nombre de balles de laine à prélever d'un lot où $\sigma_w = \sigma_b$ = 2,5%, pour avoir une erreur-type de 0,5%.

M : Nombre de balles du lot	m : nombre de balles à prélever			
	$\bar{n} = 1$	$\bar{n} = 2$	$\bar{n} = 4$	$\bar{n} = 6$
25	25	19	16	15
50	34	25	21	20
75	38	29	24	22
100	40	30	25	24
150	43	33	27	25
200	45	34	28	26
300	47	35	29	27
500	48	36	30	28
1.000	49	37	31	29

Pour obtenir une touffe de laine, il y a deux opérations : d'abord mettre la balle en position de sondage; puis la percer. Chacune de ces opérations a son coût propre (1), à savoir k_1 et k_2; et leur quotient peut varier énormément suivant les conditions existantes. Si le sondage a lieu lorsque les balles individuelles sont posées ou déplacées en vue de leur stockage, il n'y a pratiquement aucun coût supplémentaire pour mettre la balle en position de sondage; et k_1/k_2 peut, par exemple, être égal à 1. D'un autre côté, si les balles sont déjà empilées dans un magasin et si l'on doit les déranger et les remuer pour tirer un échantillon de balles, le quotient k_1/k_2 peut facilement être supérieur à 25.

L'intérêt de cette théorie apparait quand on examine ce qui se passe en pratique. Il existe un organisme spécialisé dans les essais et auquel on fait régulièrement appel pour sonder des lots de laine du pays stockés en magasin. Pour cette laine σ_w/σ_b est d'environ 2,25; et, dans les conditions du sondage, k_1/k_2 est approximativement égal à 20. Par suite, le plan de sondage le meilleur consiste à prendre 10 touffes par balle ($\bar{n}$ = 10) et à déterminer le nombre de balles à sonder au moyen de l'équation (6).

Un autre organisme fait un sondage dans les laines importées pour fabriquer des tapis, lorsqu'elles sont transportées par camion à la filature. Dans ce cas, k_1/k_2 est voisin de 1 et σ_w/σ_b est également en moyenne de l'ordre de 1, de sorte que le plan de sondage utilisé consiste à prélever 1 touffe par balle sondée ($\bar{n}$ = 1). Ces deux plans de sondage diffèrent de manière considérable quant à la précision; néanmoins chacun est le plan le moins coûteux possible dans les conditions différentes auxquelles les deux organismes ont à faire face.

L'ÉCHANTILLONNAGE DE PRODUITS LIVRÉS EN BALLES, PAQUETS, etc... PROBLÈME II

Dans la présent problème, on considère un poids ou tout autre caractère Y qui a été déterminé au préalable pour chacune des unités $i = 1, 2, \ldots, M$.

Supposons qu'un échantillon de m paquets ait été tiré au hasard du lot et qu'on ait déterminé à nouveau X_i pour chacun des paquets de l'échantillon.

Posons :

$$f = \frac{\sum_1^m X_i}{\sum_1^m Y_i} \qquad (7)$$

(1) Si chaque unité secondaire est soumise séparément à l'épreuve, k_2 devrait comprendre le coût de l'épreuve par unité. Pour la laine, les touffes sont mélangées et on n'effectue qu'une épreuve sur l'échantillon; de sorte que le coût de l'épreuve est indépendant de n et m et n'est pas compris dans k_2.

$$X = \sum_{1}^{M} X_i \text{ (en pratique X est inconnu)} \qquad Y = \sum_{1}^{M} Y_i \text{ (en pratique Y est connu} \qquad (8)$$

Une fois déterminée une valeur de f en pesant m balles échantillons du lot, on l'emploie comme facteur de conversion pour calculer une estimation X' d'un poids total du lot en convertissant Y, quand on passe des anciens poids aux nouveaux par la relation

$$X' = f\,Y \qquad (9)$$

Le coefficient de variation de f pour des tirages répétés d'échantillons sera donné approximativement par :

$$C_f^2 = \frac{M - m}{M} \; \frac{1}{m\,(m-1)} \sum_{1}^{m} \left(\frac{X_i - f\,Y_i}{\overline{X}}\right)^2 \qquad (10)$$

où

$$\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{1}^{m} X_i \qquad (11)$$

Comme Y est constant dans (9), il en résulte que :

$$C_{X'}^2 = C_f^2 \qquad (12)$$

Dans la formule (10), (1) le facteur $\frac{1}{m-1}\sum_{1}^{m} \left(\frac{X_i - f\,Y_i}{\overline{X}}\right)^2$ est une estimation du coefficient de variation du quotient X / Y multiplié par M/(M-1). Il est clair que, si la corrélation entre X_i et Y_i est grande les coefficients de variation C_X et C_f seront petits et la précision des estimations X et f sera élevée avec de petits échantillons.

Du fait que la fraction f de la formule (7) est employée dans (9) comme "facteur de calibrage", ce procédé qui fait usage des renseignements déjà contenus dans Y_i, est appelé parfois un "procédé de **calibrage**".

Un exemple de l'emploi de ce procédé est fourni par la pesée du tabac d'importation, dont on importe aux Etats-Unis 100 millions de livres poids. Cet article arrive en lots de plusieurs centaines ou milliers de balles de tailles diverses, dont le poids varie suivant l'origine, de 10 à 300 livres chacun.

Les poids individuels des balles ont été d'habitude déterminés quelque temps avant qu'elles soient chargées sur le navire, dans quelques ports étrangers. Cependant le poids total d'un lot ainsi déterminé ne peut être accepté comme base d'établissement des droits de douane, ni d'habitude pour les transactions commerciales. Par conséquent on considère qu'une seconde pesée est nécessaire. Mais il est seulement nécessaire de peser à nouveau quelques balles.

Auparavant on avait l'habitude à la Douane de peser chaque balle prise individuellement - méthode lente et coûteuse. En cherchant une méthode de sondage on trouva que le coefficient de variation des poids des balles est de l'ordre de 3,5% et varie de 1,5% à 9,4%. Par suite, les méthodes de sondage du Problème I ne sont plus satisfaisantes parce qu'elles nécessiteraient, pour atteindre à une précision raisonnable, un échantillon tellement grand qu'aucune économie réelle n'en résulterait en pratique.

Cependant, pour pouvoir employer la "méthode du calibrage", il n'est pas tellement nécessaire que les poids Y_i soient très voisins les uns des autres, mais bien plutôt les quotients X_i / Y_i. Si Y_i désigne le poids d'une balle, mesurée avant qu'on l'embarque et si X_i désigne le résultat de la seconde pesée de cette même balle lorsqu'on la débarque, on a constaté que le quotient X_i / Y_i était très sensiblement le même pour toutes les balles. Ainsi les formules (7) à (12) peuvent

(1) La démonstration de la formule (10) est donnée dans l'ouvrage de F. YATES "Sampling Methods for Census and Surveys (Chas. Griffin & C° 1949). Elle est donnée aussi avec les mêmes notations que dans le présent article, dans l'ouvrage de DEMING "Some theory of Sampling" ' John WILEY, 1950) Ch. 5.

être appliquées de manière à donner satisfaction entière. On a trouvé que le coefficient de variation de X_i/Y_i était très stable, de l'ordre de 0,7%, sauf pour les balles de tabac grec pour lesquelles cette valeur moyenne était d'environ 2,5%.

Sur la base de ces données, la formule (4) montre qu'un échantillon de m = 100 balles pour les cargaisons de la plupart des tabacs pour cigarettes (et m = 900 pour les lots de tabac grec) permet d'obtenir une précision de ± 0,25%, précision qui est considérée comme satisfaisante pour la protection à la fois du gouvernement et de l'importateur contre un droit de douane excessif (pour n'importe quelle importation).

En moyenne des échantillons de cette taille représentent des économies allant de 75 à 95% dans le nombre des pesées à effectuer. Dans de nombreux autres genres de problèmes des économies analogues peuvent être faites.

QUELQUES REMARQUES CONCERNANT LE PROBLÈME III

Le problème III est celui où on doit, par exemple, estimer les cendres dans une tonne de charbon, le charbon se trouvant en camions, wagons ou bateaux. Il faudrait insister sur le fait qu'aucune méthode statistique satisfaisante n'a encore été trouvée, bien que les recherches préliminaires effectuées permettent d'espérer une solution prochaine de la principale difficulté, à savoir : la difficulté de diviser le produit en unités qu'on puisse identifier de manière univoque et tirer du lot par un processus couramment réalisable.

Par exemple, il serait vain de préciser qu'un sondage dans un tas de charbon ou une cargaison de charbon doit être fait en extrayant certains parallélépipède définis par leur distance au sommet et d'autres coordonnées; ainsi il serait impossible, d'une manière courante, à un opérateur de constituer l'échantillon avec les éléments d'unités de sondage déterminées et d'en exclure les éléments qui ne font pas partie de ces unités. Dans les conditions actuelles, un matériau tel que le charbon ne présente pas ce caractère fondamental qu'une probabilité unique puisse être attribuée à chacune de ses particules.

Ainsi les sondages de matériaux correspondants au Problème III ne sont pas (par définition) accessibles aux méthodes qui sont employées pour des colis correspondants aux Problèmes I et II. Quand on tire des échantillons de n'importe quel matériau qu'il n'est pas facile de diviser en unités identifiables, on doit trop souvent, pour le tirage, s'en remettre au jugement humain. La désignation de l'échantillon est hasardeuse (et l'expérience le montre bien), car souvent d'importantes erreurs systématiques se produisent. En fait, les erreurs systématiques constituent la règle générale et non l'exception. On ne peut calculer aucune mesure statistique de la précision du sondage par choix "raisonné" **(" judgment selection ")**. Ainsi importe-t-il que les problèmes statistiques du sondage du charbon et d'autres matériaux soient résolus, en raison de l'ampleur des transactions commerciales correspondantes.

Le sondage des produits rentrant dans le cas du Problème III ne pose pas un problème insoluble; mais il demande de l'ingéniosité et il faut l'aborder par une autre face. Si l'on peut prélever l'échantillon sur une "chaine de transport", à des intervalles déterminés, le matériau est en effet divisible en unités de sondage de façon univoque, quel que soit l'endroit d'où celles-ci sont parties et quelle que soit la manière dont elles sont ensuite mises en tas. Quand on fait le sondage sur une "chaine de transport", on peut appliquer les méthodes du Problème I à n'importe quel matériau.

QUELQUES REMARQUES CONCERNANT LE PROBLÈME IV

L'emploi des procédés modernes pour déterminer en quel état se trouvent, en moyenne, les nombreuses catégories d'objets composant une compagnie de téléphones, télégraphes, chemins de fer ou autres, n'a commencé que depuis peu.

Comme on l'a montré plus haut, ce problème est important en cas de contestations au sujet des réserves et des tarifs à appliquer équitablement. Dans d'autres cas, la direction d'un service public peut désirer savoir jusqu'à quel point les valeurs des diverses catégories de biens lui appartenant se sont dépréciées, par exemple pour évaluer la nature et l'étendue des réparations ou travaux d'entretien que cet état exigera dans les 5 ou 10 années à venir.

Ce genre de problème, du point de vue du sondage, est souvent l'un de ceux qui sont les plus simples et les plus satisfaisants, en particulier (comme c'est le cas d'habitude) les archives, cartes et listes, établies par la Compagnie, montrent l'emplacement des divers biens de la Compagnie et comportent leurs description détaillée. Dans certaines villes des Etats-Unis, l'établissement de tels documents est exigé par la loi: dans de nombreuses villes (où cette obligation n'existe pas) ces documents sont établis parce que jugés nécessaires à une bonne gestion.

L'auteur se propose d'étudier ici quelques aspects de ce problème, dans l'espoir que quelques-unes de ses remarques pourront être étendues, adaptées et appliquées à d'autres problèmes du même genre; problèmes qui abondent en ce monde.

Supposons que l'on doive étudier les biens d'une grande Compagnie chargée d'un service public, afin de déterminer, d'une manière générale, l'état matériel dans lequel il se trouve, et ceci avec une haute précision. Le capital est constitué, par exemple, par 14 principaux inventaires : les pylones et l'équipement électrique qu'ils supportent; les "trous d'homme" et les câbles et conduits souterrains; les compteurs; les transformateurs, etc ...

On doit tirer des échantillons de chacun de ces inventaires et les faire examiner par des inspecteurs qualifiés, parfaitement entrainés; l'état physique de chacun des éléments examinés doit être apprécié au moyen d'une note A, B, C, D ou E qui peut correspondre à (95, 80, 65, etc ...) dont nous n'avons pas besoin ici de connaitre la définition technique exacte. Soit W la valeur relative des articles de l'inventaire n°i quand ils sont neufs, de sorte que :

$$\sum W_i = 1.$$

Si chacun des éléments de chacun des inventaires a la même chance que les autres d'être tiré, et si la note moyenne des objets examinés dans le Ième inventaire est x , alors :

$$x = \sum W_i \; x_i \tag{13}$$

est l'estimation correcte de l'état moyen (pondéré) du capital compris dans l'ensemble des inventaires.

Le problème qui se pose est de déterminer les effectifs n_i de l'échantillon tels qu'on économise le plus d'argent. Manifestement les échantillons provenant d'inventaires importants comme ceux des installations aériennes (pylones, câbles, accessoires) devraient être plus nombreux que les échantillons d'éléments de moins de valeur comme les colonnes montantes, etc ...

Déterminer la valeur optimum des n_i n'est pas un problème difficile. Si n_i est le nombre d'unités à examiner dans l'inventaire n°i et si k_i est le coût de l'examen d'une de ces unités (y compris les transports et le dépouillement des résultats) le coût total de l'enquête sera :

$$K = \sum n_i \; k_i \tag{14}$$

Soit σ_i l'écart-type des notes qu'on donnerait aux unités de l'inventaire n° i. Si les échantillons dans les divers inventaires sont totalement indépendants, on a alors :

$$\sigma_x{}^2 = \sum \left(\frac{W_i \sigma_i}{\sqrt{n_i}}\right)^2$$

Le plan de sondage le plus économique consisterait à choisir les effectifs n_i de l'échantillon, de manière que $\sigma_x{}^2$ soit aussi petit que possible pour un coût donné K. On peut voir alors que cette condition conduit à la formule :

$$n_i = \frac{W_i \; \sigma_i}{\lambda \sqrt{k_i}} \tag{16}$$

dont on ne donnera pas ici la démonstration. λ est une constante pour toutes les catégories de biens et sa valeur dépend de la valeur de σ_x qu'on veut avoir. D'habitude le facteur $\sigma_i/\sqrt{k_i}$ est extrêmement variable d'un inventaire à l'autre; et l'échantillon prélevé devrait être plus grand ou plus petit, d'un inventaire à l'autre, suivant la valeur qu'il est vraisemblable de voir prendre par $\sigma_i/\sqrt{k_i}$.

Il n'est pas difficile de faire des estimations prévisionnelles des σ_i. L'état de chacun des éléments examinés devra se trouver compris entre a et b, avec $0 \leqslant a < b \leqslant 100$, a étant la limite inférieure et b la limite supérieure de l'état matériel étudié. Pour certaines catégories d'objets, tels les poteaux télégraphiques, les câbles, les "coffrets de branchement", (a) peut être voisin de 0 et (b) voisin de 90. Pour certains types d'appareils qui doivent être maintenus en bon état, comme les aiguilles (pour l'équipement des aiguilles de cadrans) ou les télescripteurs (dans un autre genre d'équipements) (a) n'est probablement pas inférieur à 78 et (b) peut atteindre 95 ou 98. Si l'on admettait que l'état de tels appareils descende en dessous de 70, l'appareil pourrait faillir à sa tâche.

En pratique, en l'absence d'autres renseignements, il suffira d'admettre que les états matériels des éléments de chaque catégorie de biens sont distribués dans un rectangle entre a et b. On obtient alors une 1ère estimation de σ_i pour cette catégorie en posant :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{12}(b - a)^2 \qquad (17)$$

Avec l'aide d'ingénieurs connaissant parfaitement les objets étudiés, on peut faire d'excellentes premières estimations de σ_i avec la formule (17), avec lesquelles on peut déterminer un échantillon économique et convenant bien tout à la fois.

La valeur la plus élevée de σ_i peut être obtenue en posant a = 0, b = 100%, ce qui donne σ_i = 29%. Un échantillon au hasard de n_i = 400 éléments donnerait une erreur type maximum d'environ 1,5% pour x_i. (En réalité, les échantillons systématiques donneraient une estimation un peu meilleure que celle indiquée par la formule (17).

De même, on peut presque toujours faire à l'avance des estimations des coûts k qui seront très utiles. Alors, s'il n'y a que 2 catégories d'objets, catégories 1 et 2, la formule (16) donne :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{W_1}{W_2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \qquad (18)$$

Cette formule est fondamentale. Comme pour le Problème II, des évaluations grossières de σ_1/σ_2 et k_1/k_2 conduiront le statisticien à un échantillon économique. On admet que les poids W_1 et W_2 peuvent s'obtenir à l'aide des inventaires de la Compagnie; et on peut difficilement dire que leur détermination fasse partie du problème de sondage car, en tout état de cause, on aurait besoin de les déterminer, qu'on ait affaire à de grands ou de petits échantillons; - ce seraient, en fait, les mêmes poids si les échantillons atteignaient 100% des biens à sonder.

Il est important de remarquer que la précision réellement atteinte peut être évaluée facilement et avec précision, comme on l'a expliqué au § prédédent. Cette évaluation est totalement indépendante de la valeur des jugements portés pour évaluer à l'avance les variances et les coûts.

APPRÉCIATION DE LA PRÉCISION OBTENUE

La méthode que l'on recommande ici repose sur l'idée extrêmement simple qu'on peut répéter 10 fois le processus de sondage et comparer les résultats. Je l'employai pour la 1ère fois sur les conseils du Professeur John W. TUKEY de Princeton. Par exemple, une Compagnie des Téléphones possède un équipement d'environ 973.000 poteaux. Supposons qu'on ait besoin au total d'un échantillon de 1.500 poteaux. L'échantillon total devra être formé de 10 sous-échantillons indépendants, comprenant chacun 1/10 de l'effectif total. La première chose à faire est de déterminer l'intervalle adéquat pour obtenir 10 sous-échantillons de 150 poteaux chacun. L'intervalle pour les sous-échantillons sera :

$$\frac{973.000}{1.500} = 6.847. \qquad (19)$$

Comme tout effectif total évalué à l'avance (tel 973.000) peut être inexact; il est préférable de réduire cet intervalle à 6.387. (1). Les 10 sous-échantillons systématiques indépendants s'obtiendront en prenant 10 points de départ au hasard entre 1 et 6.387. Un tel système de numéros d'ordre pour le sondage est donné au tableau III.

TABLEAU III. - EXEMPLE D'UN TABLEAU DE "NOMBRES POUR SONDAGES" FOURNISSANT 10 SOUS-ECHANTILLONS INDEPENDANTS.

Intervalle = 6.387.

Numéro du sous-échantillon	Point de départ aléatoire	Les autres nombres pour sondages s'obtiennent en ajoutant successivement 6.387 au précédent.								
1	4746	11.133	17.520	23.907	30.294	36.681	43.068	49.455	55.842	62.229
2	5761	12.148	18.535	24.922	31.309	37.696	44.083	50.470	56.857	63.244
3	0830	7.217	13.604	19.991	26.378	32.765	39.152	45.539	51.926	58.313
4	5550	11.937	18.324	24.711	31.098	37.485	43.872	50.259	56.646	63.033
5	1603	7.990	14.377	20.764	27.151	33.538	39.925	46.312	52.699	59.086
6	2617	9.004	15.391	21.778	28.165	34.552	40.939	47.326	53.713	60.100
7	1288	7.675	14.062	20.449	26.836	33.223	39.610	45.997	52.384	58.771
8	6204	12.591	18.978	25.365	31.752	38.139	44.526	50.913	57.300	63.687
9	0131	6.518	12.905	19.292	35.679	32.066	38.453	44.840	51.227	57.614
10	2523	8.910	15.297	21.684	28.071	34.458	40.845	47.232	53.619	60.006

Ce tableau est réellement utilisé par l'Illinois Bell Telephone C° pour tirer un échantillon de poteaux téléphoniques, y compris l'équipement électrique aérien qui y est fixé.

Chacun des nombres de ce tableau désignera un élément (et tout l'équipement qui s'y rattache) qu'on incluera dans l'échantillon. Ainsi le Tableau III pourrait correspondre aux poteaux téléphoniques; n'importe quel nombre du tableau désignerait alors un poteau téléphonique plus les câbles, les fils et les accessoires et équipements associés à ce poteau. Tout cet équipement sera examiné en même temps que le poteau; il n'est pas nécessaire de tirer de nouveaux échantillons de câbles, fils, "crossarms", "terminals".

D'ailleurs l'état matériel de ces objets est en corrélation; et il vaut mieux les inclure tous dans un groupe appelé "équipement aérien". Chaque sous-échantillon de 150 poteaux, quand on l'examine, fournit une estimation de l'état matériel moyen (pondéré) de l'équipement aérien. Soit $x_1(1), x_1(2), \ldots, x_{10}(10)$ les 10 résultats ainsi obtenus et soit :

$$X_1 = \frac{1}{10} \sum_{1}^{10} x_1(i) \qquad (20)$$

On peut alors calculer une estimation de la variance de x_1 en formant :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10-1} \sum_{1}^{10} (x_1^{(i)} - x_1)^2 \qquad (21)$$

Ainsi, dans un exemple réel, les résultats de 10 sous-échantillons (chacun de 150 poteaux et accessoires) furent les suivants :

67,5%	65,9%	67,1%	67,9%	70,8%
68,4%	69,6%	69,4%	69,0%	68,0%

de sorte que le résultat moyen fut 68,4% avec une erreur-type estimée de 0,44% (calculée par la formule 21). Comme chacun des $x_1(i)$ sera en pratique la moyenne

(1) Dans un sondage d'équipement industriel, il est conseillé de ne jamais adopter de nombre se terminant par 0 ou 5, ni un nombre pair, à cause de certaines périodicités possibles. Si la division de 97.300 par 150 n'avait pas donné un quotient se terminant par un 7, on aurait procédé à un ajustement arbitraire pour avoir un intervalle se terminant par 1, 3, 7 ou 9.

d'un nombre donné d'examens (disons 8, 10, 15 ou plus), on peut employer une Table des t de FISHER pour déterminer tous les intervalles.de confiance que l'on voudra concernant l'état physique des poteaux.

Ainsi, dans cet exemple, il y a 99 chances sur 100 que la note 68,4 - 0,44 x 2,82 = 67,2 ne soit pas inférieure à la note qu'on aurait obtenue si on avait inspecté tous les poteaux appartenant à la Compagnie, s'il était toutefois possible d'effectuer un travail aussi gigantesque avec le même soin et la même compétence que pour l'échantillon.

De même on peut également estimer les variances des autres biens et on peut combiner toutes les valeurs x_i trouvées, pour obtenir une estimation d'ensemble x des biens de la Compagnie, définie par la formule (13). L'estimation de la variance de x sera :

$$\sigma_x^2 = \sum (W_i \hat{\sigma}_i)^2$$

où l'indice de sommation i est étendu à toutes les catégories de biens qui ont été sondées de manière indépendante. En pratique, on peut définir à l'avance les échantillons de manière que σ_x relatif à l'ensemble des biens ait une valeur comprise entre 0,2 et 0,3%. Toute tentative pour obtenir une précision plus importante est ruineuse et illusoire parce que :

a) l'état physique d'un objet (faisant partie de ce capital) est difficile à définir et à mesurer;

b) les différents inspecteurs, quelle que soit leur compétence, ne peuvent pas toujours tomber d'accord entre eux, ni même avec eux-mêmes.

Des échantillons plus petits donnant σ_x égal à 0,5% ou même 1%, fourniront encore des renseignements précieux sur le capital de la Compagnie.

MESURES DES ERREURS HUMAINES

On commet une faute quand on fonde tout un plan de sondage sur les seules mesures et sur le seul contrôle des erreurs d'échantillonnage; et il en est de même pour l'interprétation des données obtenues par sondage. Il y a d'autres erreurs, dépendant principalement du caractère arbitraire des définitions et des fluctuations du travail, aussi bien des hommes que des machines. Ces erreurs existent quand les matériaux sont examinés en totalité aussi bien qu'en petits échantillons, et c'est pourquoi on peut les appeler erreurs autres que celles d'échantillonnage. Ces erreurs sont aussi importantes pour les sondages d'objets physiques que pour les enquêtes économiques et sociales. Quand on constitue un échantillon de n'importe quels objets, ce à quoi on devrait tendre c'est à établir un équilibre entre les erreurs d'échantillonnage et les erreurs et fluctuations dont l'origine n'est pas dans l'échantillonnage.

L'auteur a publié, en 1944, une liste des erreurs qui ne sont pas d'échantillonnage pour les enquêtes économiques et sociales (12). La liste des erreurs autres que d'échantillonnage qu'on rencontre lorsqu'on mesure des objets physiques, serait remarquablement parallèle à la liste qu'on vient de citer. La principale différence est que des observations physiques répétées n'altèrent pas toujours les objets, alors que des interviews répétés auprès des mêmes personnes influent sur les réponses à la plupart des questions.

On gaspille son argent à abaisser les erreurs d'échantillonnage à un niveau très inférieur à celui des erreurs provenant d'autres sources; de sorte qu'il est nécessaire de connaitre l'amplitude des erreurs humaines de mesure pour se guider dans l'organisation réelle d'un plan de sondage économique.

Comment réussir à réduire les erreurs autres que d'échantillonnage? Cela dépend, dans une large mesure, du choix, de la formation et du contrôle des hommes qui effectuent réellement le travail d'examen et de mesure. Il existe bien

(1) W. Edwards DEMING : "On errors of surveys" (Amer. Sociological Review, vol. IX, 1944, p. 359-369) ; "Sobre errors en las investigaciones" (Estadistica, vol. CI, 1948, p. 493-504. Vol VII, 1949, p. 84-91). Cette liste est développée dans l'ouvrage de l'auteur, "Some Theory Sampling" (John VILEY, 1950) Ch. 2.

des procédés, imaginés pour parvenir à des observations ou mesures humaines, à la fois uniformes et précises. L'un de ces procédés va être indiqué : lorsqu'on instruit les inspecteurs qui iront examiner les échantillons d'objets appartenant à une Compagnie effectuant un service public, et pendant les opérations elles-mêmes, il est possible (et recommandé) d'effectuer des expériences ou tous les inspecteurs opèrent sur un certainnombre de pièces données, - ceci afin d'observer si certains inspecteurs donnent aux objets une note plus élevée, ou moins élevée, que les autres, et pour exercer une action corrective si cela est nécessaire. Bien entendu on ne doit pas s'attendre à une concordance parfaite.

Le Tableau IV montre un systèmede mesures obtenues à la suite d'une expérience de cette nature. Chaque inspecteur porte un jugement (A, B, C, D ou E) pour chaque élément d'un type particulier d'appareils; et les résultats sont rassemblés au Tableau IV. Les inspecteurs avaient reçu un entrainement pendant 5 jours lorsque cette expérience eut lieu. A correspond à 92%, neuf ou presque neuf; E correspond à 13% (usé). En fait, les notes sont définies avec soin (définitions écrites) et les inspecteurs sont tous des ingénieurs qualifiés en matière de téléphone. Si l'inquelconque des inspecteurs avaitdonné desnotes supérieures ou inférieures à celles des autres, de façon significative, une étude de ce tableau aurait probablement permis de le détecter.

TABLEAU IV

Résultats obtenus par 8 inspecteurs qui notèrent leurs jugements relatifs à l'état physique des 16 pièces de matériel (des ...

Ces résultats furent obtenus après un stage à 2 jours. Toutes les différences observées furent l'objet de discussions sérieuses; et une explication en fut trouvée.

Pièce	Inspecteur N°							
N°	1	2	3	4	5	6	7	8
1	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	A	A	A	B	A	A	B
3	E	E	E	E	E	E	D	E
4	E	E	E	E	E	E	E	E
5	E	E	E	E	E	E	E	E
6	B	B	A	B	B	A	B	B
7	D	D	D	D	D	D	D	D
8	A	A	A	A	A	A	A	A
9	E	D	E	E	E	D	D	E
10	A	A	A	A	B	A	A	B
11	A	A	A	A	A	A	A	A
12	D	D	D	D	D	D	D	D
13	E	E	E	E	E	E	D	E
14	E	E	E	E	E	E	E	E
15	E	E	E	E	E	E	E	E
16	E	E	D	E	E	D	D	E

MAHALANOBIS (13), en employant des réseaux superposés d'échantillons, a mesuré les effets combinés des erreurs d'échantillonnage et les différences entre mesureshumaines, et il a comparé ces effets à la variabilité moyenne des résultats observés, pour les enquêteurs pris individuellement. De cette manière, il a mesuré l'aptitude des enquêteurs à reproduire leur propre travail et il a aussi mesuré les différences entre enquêteurs.

(1) P.C. MAHALANOBIS "On large scale sample surveys" (Phil. Trans. Royal Soc. Vol. 231 B, 1944, p. 329-451 - p. 407-410 en particulier). Même auteur : Recent experiments in statistical sampling in the Indian Statistical Institute (J. Royal Stat. Soc. Vol. CIX, 1946 - p. 325-378.

Le plan qui fut suivi ici pour mesurer simultanément les différences entre inspecteurs et les erreurs imputables à l'échantillonnage fut suggéré à l'auteur par le Dr W.I. YOUDEN, du **National Bureau of Standards** à Washington. Revenons aux 10 sous-échantillons mentionnés plus haut pour un échantillon du capital "lignes aériennes" d'une Compagnie des téléphones (Tableau III). Chaque sous-échantillon comprend 150 poteaux, plus l'équipement fixé à chacun de ces poteaux. Supposons qu'on ait cinq équipes d'inspection composées chacune de deux hommes : **1 expert** en matière d'équipement aérien et **un assistant** . Un plan d'échantillonnage qui comprendrait 5 × 10 = 50 sous-échantillons valables de l'ensemble permettrait à chaque équipe de travailler sur 10 sous-échantillon différents. Le plan YOUDEN affecte chaque équipe à 10 sous-échantillon indépendants de l'ensemble. Par exemple, pour les lignes aériennes, les équipes étaient affectées à des poteaux à tour de rôle, suivant le schéma indiqué au Tableau V, lequel (quand on le superpose au Tableau IV) montre quelle équipe doit examiner chacun des poteaux (et l'équipement fixé sur celui-ci) de l'échantillon.

Il est clair que, de cette manière, chaque équipe inspecte un échantillon systématique de chacun des 10 sous-échantillons; et les échantillons des diverses équipes seront de tailles extrêment voisines les unes des autres.

TABLEAU V

Schéma de YOUDEN pour désigner les équipes.

Il y a lieu de superposer ce tableau et le Tableau IV pour voir quelle équipe est assignée à chaque poteau.

Sous-échantillon N°	ÉQUIPE											
1	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	etc ...
2	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	etc ...
3	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	etc ...
4	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	etc ...
5	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	etc ...
6	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	etc ...
7	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	etc ...
8	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	etc ...
9	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	etc ...
10	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	etc ...

En pratique il peut y avoir plus de 5 équipes (ou moins de 5 équipes) pour n'importe quelle catégorie d'objets; mais on peut utiliser le même schéma de rotation de YOUDEN pour des nombres quelconques d'équipes et de sous-échantillons.

Le Tableau VI montre un système de résultats (14) obtenus en Amérique à la suite de l'étude du capital d'un système de téléphones (lignes aériennes). Parmi ces résultats ainsi reproduits, les 10 moyennes de la colonne la plus à droite fournissent une mesure de la pure erreur d'échantillonnage, car les différences entre équipes ont dû probablement s'éliminer. De même, les 8 moyennes de la ligne inférieure du tableau donnent une mesure de la variabilité entre les équipes, car toute différence entre les sous-échantillons a dû probablement s'éliminer.

Ici il y a 10 sous-échantillons et 8 équipes, dont chacune a un échantillon de 15 à 19 poteaux de chaque sous-échantiilon à examiner. On doit remarquer que ce nombre est suffisant pour justifier l'hypothèse de l'existence d'une loi normale

(1) J'ai plaisir à dire combien j'ai apprécié l'occasion que j'ai eue de travailler à Chicago, avec M. Harlow A. COXE, de l'Illinois Bell-Telephone-Company, à l'obtention de ces résultats et de remercier cette Compagnie de m'autoriser à publier les tableaux III à VII.

sur laquelle repose l'emploi des Tables de FISHER pour l'analyse de variance. L'analyse de variance est reproduite au Tableau VII, qui permet de conclure : (15, 16).

a) qu'il n'y a rien qui indique l'existence d'une variabilité entre les moyennes des équipes;

b) qu'il n'y a rien qui indique une variabilité excessive dans les jugements successifs portés par chacune des équipes;

c) que l'échantillon est assez grand.

TABLEAU VI

Résultats provenant des échantillons de poteaux traités.

Situation (Moyenne pour cent) par équipe et par sous-échantillon.

sous-échantillon	ÉQUIPE								Moyenne
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	58.9	58.5	62.9	50.5	57.1	63.3	55.5	80.7	60.92
2	67.3	59.9	62.9	63.5	64.0	56.1	75.5	53.9	62.89
3	58.1	82.1	60.3	54.1	62.4	72.6	66.9	61.7	64.77
4	73.3	77.1	58.3	62.6	65.6	73.8	68.0	65.9	68.07
5	55.1	57.2	73.3	68.1	65.1	71.8	57.5	59.2	63.41
6	63.0	62.5	59.1	68.9	77.1	63.4	59.4	65.4	64.85
7	61.0	59.8	63.0	56.7	60.3	74.7	66.4	61.8	62.96
8	59.8	57.7	57.2	58.8	78.7	54.1	59.3	60.8	60.80
9	61.2	57.8	67.8	57.6	65.8	61.3	57.3	83.3	64.01
10	77.7	59.2	66.8	73.2	70.4	66.4	67.0	62.6	67.91
Moyenne	63.54	63.18	63.16	61.40	66.65	65.75	63.28	65.53	64.06

La conclusion (a) résulte du fait que l'estimation 0,380 trouvée pour $\sigma_{\bar{x}}^2$ calculée à l'aide de la variance entre les moyennes des équipes, est vraiment plus petite que l'estimation 0,617 calculée à l'aide de la variance entre les moyennes par sous-échantillon et plus petite également que l'estimation 0,689 calculée à l'aide de la variance résiduelle.

S'il existait une différence réelle entre les moyennes par équipe, elle serait cause qu'en moyenne l'estimation de $\sigma_{\bar{x}}^2$, faite à l'aide de la variance entre équipes, serait plus grande que l'estimation faite à l'aide de la variance entre sous-échantillons. On peut donc en conclure que le tableau ne fournit pas la preuve qu'il y aurait une variabilité entre les moyennes par équipe.

La conclusion (b) résulte du fait que les estimations de $\sigma_{\bar{x}}^2$ fondées sur les variances entre sous-échantillons pour les 8 équipes différentes (partie inférieure du Tableau VII) varient entre 1,085 et 0,308, soit une amplitude de 0,777; laquelle est légèrement inférieure à celle à laquelle on aurait pu s'attendre si tous les examens avaient été effectués par la même équipe.

(1) Je désire signaler ici combien j'ai apprécié l'aide de M. HOWARD L. Jones de l'Illinois Bell Telephone Company (à Chicago), tant pour avoir effectué les calculs du Tableau VII, que pour toute l'aide qu'il m'a apportée dans l'interpolation des variances rencontrées ici.

(2) Il y aurait lieu d'expliquer que, bien que les 80 échantillons du Tableau VI soient tous systématiques, les variances du Tableau VII sont interprétées comme si les échantillons étaient pris au hasard. Si quelqu'un avait quelque doute touchant la validité de l'application de la théorie courante de l'analyse de variance à des échantillons systématiques, on aurait du prendre soin, au préalable, d'effectuer un choix au hasard. La rotation systématique des équipes, utilisée ici, présente de grands avantages pour sa simplicité et je crois que, pour les objets sondés ici et avec les intervalles de sondage que l'on a employés, la désignation systématique de l'échantillon donnera très sensiblement les mêmes résultats que si les désignations avaient été faites au hasard.

La conclusion (c) résulte du fait que l'estimation de $\sigma_{\bar{x}}^2$ faite à l'aide soit des moyennes par sous-échantillon, soit de la variance résiduelle, est déjà suffisamment petite.

Les avantages que procure l'évaluation séparée et distincte de l'erreur d'échantillonnage et de l'erreur due aux opérateurs, méritent, semble-t-il, d'être pris en considération, malgré l'accroissement de coût résultant de l'attribution à chaque équipe de 10 échantillons valables de l'ensemble de matériaux à étudier. Bien entendu, il coûterait moins cher d'assigner une équipe déterminée à une certaine zone géographique; mais alors les résultats ne permettraient pas de séparer les esseurs d'échantillonnage de la variabilité imputable à l'homme.

TABLEAU VII

Variances calculées à partir du Tableau VI.

Composantes		Somme de carrés	Degrés de liberté	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{80}$
Variance totale		4.129,27	79	52,27	0.653
Variance entre les moyennes par équipe		212.64	7	30,38	0.380
Variance entre les moyennes par sous-échantillon		444.43	9	49.38	0.617
Variance résiduelle		3.472.20	63	55.11	0.689
Variance entre équipe dans le sous-échantillon n°	1	563.31	7	80.47	1.006
	2	315.93	7	45.13	0.564
	3	559.54	7	79.93	0.999
	4	277.92	7	39.70	0.496
	5	353.33	7	50.48	0.631
	6	240.58	7	34.37	0.430
	7	211.10	7	30.16	0.377
	8	395.12	7	56.45	0.706
	9	529.59	7	75.66	0.946
	10	238.43	7	34.06	0.426
Variance entre sous-échantillons pour l'équipe n°	1	458.46	9	50.94	0.637
	2	706.86	9	78.54	0.982
	3	221.56	9	24.62	0.308
	4	461.62	9	51.28	0.641
	5	429.30	9	47.70	0.596
	6	489.03	9	54.34	0.679
	7	368.88	9	40.99	0.512
	8	780.92	9	86.77	1.085

$\hat{\sigma}^2$ désigne ici une estimation de la variance σ^2 de l'univers de valeurs d'où l'on suppose que chacune des 80 cases du Tableau VI est extraite.

$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2$ est l'estimation de la variance de $\bar{x}$.

BIBLIOGRAPHIE

THIONET - La théorie des sondages - Etude théorique n° 5 - Institut National de Statistique - Paris 1953.

THIONET - Application des méthodes de sondages aux enquêtes statistiques- Etude théorique n° 6. Institut National de Statistique - Paris 1953.

THIONET - Théorie des sondages. Cours de l'Ecole d'Application de l'Institut National de Statistique - Paris 1955 (ronéo).

F. YATES - Sampling methods for census and surveys. Griffin and C° - Londres 1949. Traduction française. Méthodes de sondages pour recensements et enquêtes. - Dunod - Paris 1954.

W.E. DEMING - Some theory of sampling. John Wiley - New-York 1950.

HANSEN, HURWITZ and MADOW - Sample surveys methods and theory. John Wiley - New-York 1953.

COCHRAN - Sampling techniques John Wiley - New-York 1953.