REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. MORLAT

Les lois de probabilités de Halphen

Revue de statistique appliquée, tome 4, nº 3 (1956), p. 21-46
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1956__4_3_21_0>

LES LOIS DE PROBABILITÉS DE HALPHEN

par

G. MORLAT

Électricité de France
Service des Études et Recherches Hydrauliques

En donnant la parole à M. MORLAT, M. le Président BATICLE, s'adressant surtout aux membres de la Société de Statistique, rend un hommage ému à la mémoire d'Etienne Halphen.

« Le développement même de la conférence de M. MORLAT, dit M. BATICLE, vous montrera l'importance des travaux qu'il a faits dans le domaine qui nous occupe. Mais je puis dire que la vie d'Etienne Halphen, trop courte, hélas, a été exemplaire à tous points de vue : au point de vue moral, au point de vue civique et au point de vue intellectuel. »

INTRODUCTION

Parmi les richesses que nous devons, en hydrologie statistique à l'esprit exceptionnel que fut Etienne HALPHEN, figure un travail de longue haleine, entrepris il y a quinze ans : la recherche de types de lois de probabilité, à laquelle leur auteur portait une affection toute particulière.

Il n'est pas douteux que les lois auxquelles HALPHEN s'est arrêté pourront rendre les plus grands services dans bien d'autres domaines que l'hydrologie; c'est surtout pour la représentation de phénomènes naturels comme les pluies et les débits que ces lois comblent une lacune. Mais, comme le constatait HALPHEN on peut légitimement s'étonner que personne, après Karl PEARSON, n'ait cru bon d'étudier dans le même esprit de nouvelles formes de lois de probabilité.

Mais il faut que ces lois soient connues, et bien que nous ne puissions dire que leur étude est aujourd'hui bien achevée, nous en savons assez pour en recommander l'emploi, et surtout nous disposons des premières tables numériques, assez étendues pour les besoins les plus courants.

L'exposé qui va suivre comprendra quatre parties, consacrées successivement :

- à un rappel succinct du problème de l'ajustement de lois de probabilité aux séries d'observations hydrométriques, et des formes des lois les plus couramment utilisées dans ce domaine.

- à un exposé historique, montrant comment et pourquoi Etienne HALPHEN fut amené à l'étude des lois des types A et B.

- à une revue rapide de quelques unes des propriétés mathématiques et statistiques de ces lois,

- enfin, à quelques éléments, encore sporadiques, permettant la confrontation entre les lois de HALPHEN et les données empiriques.

1. LE PROBLÈME DE L'AJUSTEMENT DES LOIS DE PROBABILITÉ DES DÉBITS

1.1.- Nous abordons dans cet exposé un très vieux problème. (le sens des mots est toujours relatif et lorsqu'un statisticien parle d'un "vieux problème" il convient de ne pas oublier que les méthodes de la statistique mathématique sont nées avec le siècle).

Quoi qu'il en soit, un esprit non averti pourrait penser à priori que les lois de probabilité qui conviennent le mieux en hydrologie statistique sont connues depuis longtemps. Or, il n'en est rien. Pour l'hydrologue la pauvreté de l'arsenal des lois qu'il peut ajuster aux séries d'observations, n'a d'égale que la pauvreté de ces séries d'observations elles-mêmes. On pourrait penser que ces deux pauvretés sont harmonieusement accouplées, et que l'information contenue dans nos séries statistiques rend parfaitement vain tout effort pour créer des lois de probabilité plus perfectionnées. J'espère montrer dans un instant que nos séries statistiques méritent cependant un peu d'égards et justifient les travaux d'Etienne HALPHEN.

Avant de me livrer à une revue rapide des formes de lois les plus utilisées avant HALPHEN - c'est-à-dire sans doute jusqu'à ce jour - je crois utile de rappeler comment il faut comprendre le problème de l'ajustement d'une loi de probabilité.

Un tel ajustement prend tout son intérêt et permet des prévisions efficaces s'il s'applique à un échantillon d'observations qui peuvent raisonnablement être considérées comme des épreuves d'une certaine loi de probabilité - le plus souvent indépendantes les unes des autres, quoique ce dernier point ne soit pas absolument essentiel en théorie - ou si l'on préfère, comme des tirages successifs dans une urne de composition donnée. On est dans ces conditions lorsqu'on envisage, par exemple, la série des modules observés au cours des années pour la Dordogne à BORT. On l'est encore si l'on envisage la série des débits observés à cette même station le 15 mars de chaque année. On ne l'est plus si l'on prend tous les débits journaliers en vrac, soit pour une année, soit pour une suite d'années.

Pourtant l'ajustement d'une courbe analytique à l'ensemble des fréquences, du débit pour tous les jours de l'année est une opération effectuée souvent, et avec raison par les Ingénieurs ; cette opération leur permet de calculer commodément l'énergie productible en année moyenne par une usine qui serait établie au fil de l'eau, sur la rivière étudiée, avec un débit d'armement donné. Mais la courbe ainsi ajustée ne peut pas être regardée comme une loi de probabilité.

Il n'est pas défendu de lui attribuer une forme analytique choisie parmi les types qui s'avèrent adéquats comme lois de probabilité. Ainsi, la fonction :

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\log(u-u_0)-m}{\sigma}\right]^2} \frac{du}{u}$$

représente convenablement bien des courbes de débits classés de nos rivières. Ainsi utilisée, elle ne permet pas de claculer correctement la probabilité que le débit de la Dordogne à BORT dépasse 100 m3/sec le 15 janvier de l'année prochaine, par exemple, puisqu'elle est ajustée au mélange de quantités qui ne sont manifestement pas tirées de la même urne.

Les errements habituels sont légitimes, si on s'abstient de tirer des conclusions en termes de probabilité.

Le problème auquel nous nous intéressons ici est l'ajustement de lois de probabilité à des séries d'observations statistiquement homogènes.

1.2. L'emploi de la loi normale

La loi normale ou loi de LAPLACE GAUSS est bien connue, j'en dirai peu de choses.

Je rappellerai qu'on ne doit en hydrologie, ni la rejeter, ni la considérer à priori comme bonne. La confrontation avec les fréquences des observations en décide, et il existe pour cela des techniques probabilistes précises (test d'ajustement de PEARSON, par exemple).

En fait, l'expérience montre que l'adéquation de la loi normale pour les débits est d'autant meilleure qu'on étudie le débit moyen pris sur une durée assez longue (le module par exemple) d'autant meilleure que l'aire du bassin versant est importante (à régime climatique donné) d'autant meilleure qu'on a affaire à des bassins d'altitude plus élevée (régularisation nivo-glaciaire).

Pour témoigner de cette adéquation, je signalerai l'emploi à peu près exclusif de la loi normale dans les travaux de prévision des apports d'été aux réservoirs alpins et pyrénéens. Le succès de ces prévisions, dont parlera M. FERRY est un test tangible de cette adéquation.

Par contre, pour des débits de périodes plus courtes, de bassins plus petits, à régime exclusivement pluvial par exemple, l'inadéquation de la loi normale devient flagrante. Il faut chercher d'autres formes de lois. Et il est peut être bon de redire ici, au passage, que l'embarras dont témoignent encore certains auteurs en de telles circonstances est tout à fait dénué de fondement ; nous voyons encore dans des mémoires récents des raisonnements de ce genre : si la loi normale ne représente pas bien certaines séries statistiques, c'est que celles-ci ne sont pas dues entièrement au hasard, puisque la loi normale est la loi du hasard par excellence. Un tel raisonnement est tout à fait insensé. Le fait qu'une grandeur ne soit pas gaussienne n'a rien à voir avec l'intervention de facteurs systématiques. La loi normale n'est pas la loi du hasard par excellence.

Elle constitue seulement la forme limite de la distribution d'une somme d'un grand nombre de quantités aléatoires vérifiant certaines conditions précises. Mais si ces variables se multiplient au lieu de s'ajouter, la loi de répartition du produit tend vers une loi gausso-logarithmique. Cette propriété a été exploitée efficacement par M. GIBRAT (loi de l'effet proportionnel).

D'une façon plus générale, on peut toujours concevoir, pour représenter schématiquement un phénomène naturel des tirages dans une urne de composition arbitraire. Le hasard intervient de la même façon, que cette composition soit ou non voisine des fréquences fournies par la loi normale.

Pour ajuster convenablement une loi de probabilité à des observations (x_1 x_2...) qui s'écartent manifestement d'une répartition normale, on peut toujours chercher une transformation des variables qui ramène à une distribution normale. C'est une méthode universelle, on peut seulement lui reprocher trop de souplesse si l'on n'a pas fixé d'avance une classe de transformations à appliquer aux variables x_i.

Une transformation utilisée parfois avec succès consiste à choisir $y = x^m$. En particulier dans beaucoup d'études pluviométriques, les transformations $\sqrt{x}$ ou $\sqrt[3]{x}$ donnent toute satisfaction.

Une autre transformation $y = a \log (x-x_o) + b$, mérite des commentaires plus détaillés.

1.3. La loi de GALTON-GIBRAT

La transformation envisagée en dernier lieu conduit à la même loi (à un changement d'origine près) qui a été signalée comme la limite d'un produit de variables aléatoires indépendantes (dont les distributions individuelles vérifient quelques conditions supplémentaires).

Cette loi a été prônée en particulier par M. GIBRAT qui a montré les services qu'elle pouvait rendre en hydrologie, en économétrie, etc... Si on a souvent objecté que le processus multiplicatif, qui en fournirait une justification théorique trouve dans le domaine hydrologique une interprétation physique un peu arbitraire il reste que l'adéquation empiriquement constatée pour beaucoup de séries hydrométriques, justifie assez son emploi :

Si on adopte la transformation indiquée ci-dessous :

$$y = a \log (x - x_o) + b,$$

et si l'on suppose que y suit une loi normale réduite, on dispose alors d'une famille de lois à 3 paramètres. Cela peut paraitre beaucoup. Si pourtant Etienne HALPHEN a recherché d'autres formes de lois, c'est essentiellement pour 2 raisons : tout d'abord, la rapidité de la décroissance de la densité de probabilité de la loi de GALTON-GIBRAT, pour les très grandes valeurs de la variable, s'avère parfois en désaccord avec les constatations empiriques, et il peut paraitre souhaitable de disposer de familles de courbes ayant une décroissance tantôt exponentielle, tantôt algébrique.

De plus, des difficultés sérieuses apparaissent pour l'estimation de l'un des paramètres, à savoir x_o. Il est toujours très difficile d'assigner une borne inférieure non nulle au débit d'une rivière, et parmi les objectifs d'Etienne HALPHEN figurait celui-ci : avoir un comportement, au voisinage de l'origine, des courbes de densité, qui permette d'attribuer une probabilité pratiquement négligeable (mais pas rigoureusement nulle) à un intervalle considéré comme hautement improbable. Si l'on adopte à priori $x_o = o$, cette condition est satisfaite pour des valeurs convenablement choisies des paramètres, mais ces derniers ne sont plus qu'au nombre de deux, et nous verrons plus loin que c'est insuffisant. (Voir graphique 1) page suivante.

Ces raisons, parmi d'autres, incitaient à la recherche de nouveaux types de lois. Cela ne signifie nullement que nous méconnaissions les services que peut rendre la loi de GALTON-GIBRAT en hydrologie, et nous l'utilisons fréquemment en raison de son extrême commodité, sur laquelle nous ne nous étendrons point.

1.4. Les lois de PEARSON

Avant de renoncer à trouver son affaire dans les formules courantes, l'hydrologue devait encore examiner les lois de PEARSON. Si l'on retient la difficulté voire l'impossibilité, d'assigner à un débit une borne inférieure non nulle, et de même une borne supérieure finie, on est conduit à envisager parmi les lois de PEARSON les types 3 et 5 dont les densités sont respectivement :

$$f(x) = \frac{1}{a^{\gamma}\,\Gamma(\gamma)}\, e^{-ax}\, x^{\gamma - 1} \quad \text{pour le type 3 } (\gamma > o)$$

(Voir graphique 2)

$$\text{et } f(x) = \frac{b^{\gamma}}{\Gamma(-\gamma)}\, e^{-\frac{b}{x}}\, x^{\gamma - 1} \quad \text{pour le type 5 } (\gamma < o)$$

(Voir graphique 3)

Ces lois sont aussi d'emploi commode (Tables de la fonction Gamma incomplète) et elles ont été largement utilisées en hydrologie, spécialement le type 3, auquel, par exemple, l'ouvrage américain de E.E. FOSTER "Rainfall and Runoff" réserve un sort privilégié.

Nous verrons que les lois de HALPHEN en constituent une extension assez naturelle.

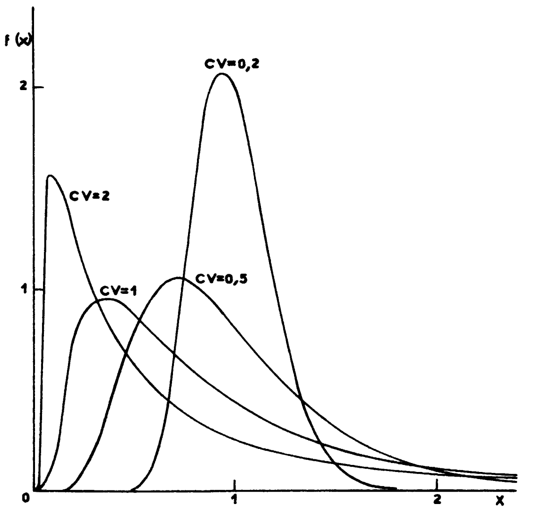


Fig. 1.- Courbes de densité de quelques lois de GALTON, de moyenne égale à l'unité.

On notera que le coefficient de variation détermine complètement la forme de la distribution.

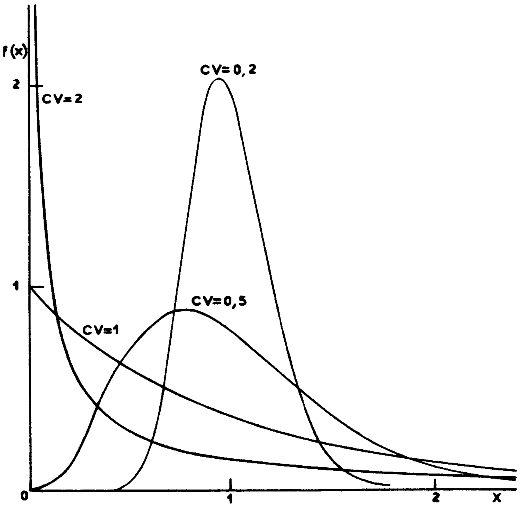


Fig. 2.- Courbes de densité de quelques lois du type 3 de PEARSON de moyenne égale à l'unité.

1.5. L'insuffisance des lois citées plus haut

Parmi les lois de probabilité utilisées en hydrologie, nous nous sommes bornés à citer les plus précieuses et les plus couramment utilisées pour l'ajustement à des séries d'observations non sélectionnées. Le cas d'observations sélectionnées (débits de crue) a donné l'occasion aux hydrologues de mettre en avant un grand nombre de théories et de formules.

Si l'on se demande pourquoi Etienne HALPHEN avait jugé nécessaire de chercher autre chose, on peut répondre simplement que son expérience personnelle l'avait convaincu qu'aucune des formes de lois que nous avons indiquées n'était globalement adéquate à l'ensemble des séries d'observations hydrométriques concernant les cours d'eau français (et pour toute période, jour, mois, année, etc... susceptible de faire l'objet d'une étude probabiliste).

Bien sûr, on peut dire que même si l'un de ces types de lois pouvait être regardé comme convenable, il faudrait admettre que les écarts d'échantillonnage créeraient de temps à autre une apparente inadéquation. Sans doute, Etienne HALPHEN avait-il jugé que de telles inadéquations sont trop fréquentes pour qu'on puisse ainsi les attribuer à des écarts accidentels. Un test statistique précisant ce jugement ne serait pas facile à mettre en oeuvre en raison des liaisons statistiques, au demeurant fort complexes, entre les débits observés sur nos diverses rivières.

Mais on peut justifier autrement cette insatisfaction. Toutes les lois que nous avons vues sont des lois à 2 paramètres, du moins sous la forme où elles sont utilisées en hydrologie.

Deux paramètres, cela fait un paramètre d'échelle, un paramètre de dispersion, et il ne reste plus rien pour caractériser la forme de la distribution, à dispersion relative constante. Si l'on préfère, pour chacun de ces types de lois la valeur moyenne et la dispersion imposent toute la forme de la courbe. Or, on peut penser à priori que des débits - mensuels par exemple - peuvent avoir sur deux cours d'eau même moyennes, même dispersion - et par exemple accuserdes degrés différents de dissymétrie, s'il s'agit de cours d'eau à régime climatiques ou saisonniers différents. (Voir graphique 4).

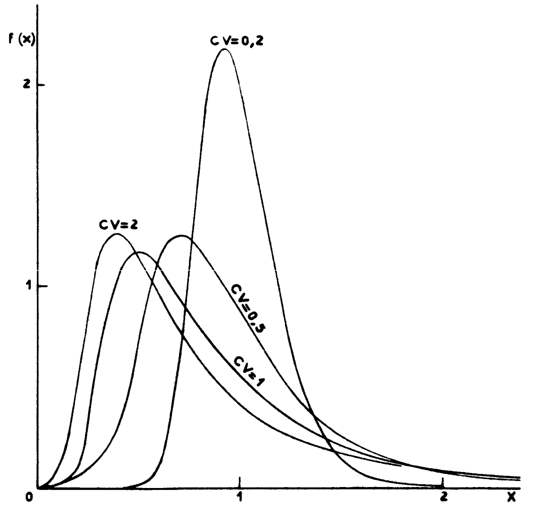


Fig. 3.- Courbes de densité de quelques lois du type 5 de PEARSON, de moyenne égale à l'unité.

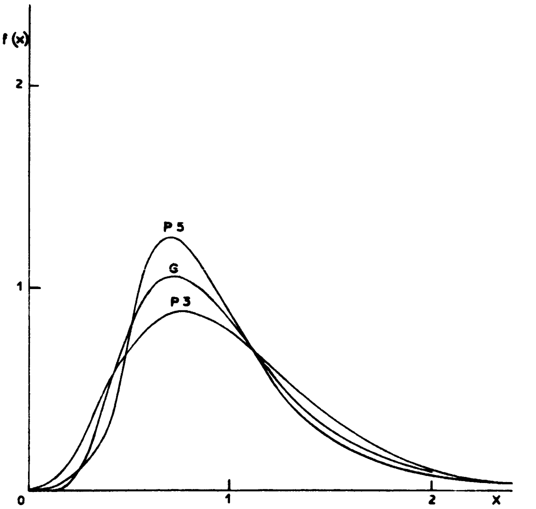


Fig. 4.- Lois de GALTON et des types 3 et 5 de PEARSON, de coefficient de variation égal à 0,5.

Nous verrons plus loin qu'on peut effectivement mettre ce phénomène en évidence.

Il est permis de voir là la raison profonde qui poussa Etienne HALPHEN à imaginer, à son corps défendant pourrait-on dire, un ensemble de lois de probabilité à 3 paramètres ; à son corps défendant parce qu'il était parfaitement conscient de la pauvreté de nos observations hydrométriques, et qu'il pensait souhaitable de se borner à estimer deux paramètres.

2. LES LOIS DE PROBABILITÉ DE HALPHEN - NOTE HISTORIQUE

2.1.- Avec les lois de probabilité qu'il a introduites, HALPHEN propose au statisticien un outil dont la richesse égale celle des lois de PEARSON.

On sait que ce dernier avait été conduit à ses lois de probabilité en cherchant les solutions d'une équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \text{Log } y = - \frac{x + c_1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}$$

qu'il assignait à la densité de probabilité.

HALPHEN avait choisi ses types de lois de probabilité en fonction de considérations plus empiriques, et l'on peut admirer qu'il ait ainsi fixé une théorie aussi harmonieuse et aussi riche, du point de vue mathématique.

Pour tenter de faire partager à nos auditeurs un peu de la "joie de comprendre" comment par étapes HALPHEN procéda à cette construction, nous en donnerons un bref exposé historique.

2.2. La loi harmonique (1941)

Au départ, HALPHEN recherchait une loi de probabilité à deux paramètres destinée à la représentation des débits mensuels de nos stations hydrométriques ; il s'était assigné comme conditions primordiales, d'obtenir une décroissance exponentielle pour les grands débits (condition inspirée par l'expérience) et aussi pour les petits débits, afin d'éviter le choix d'une origine non nulle, dont nous avons signalé les difficultés. Par ailleurs, il avait jugé commode de disposer de la symétrie logarithmique pour la densité de probabilité (Entendez par là la propriété suivant laquelle avec une unité convenable, la densité de probabilité est la même pour x et pour $\frac{1}{x}$).

La forme de la densité de probabilité la plus simple répondant à ces diverses conditions s'écrit :

$$f(u) = \frac{1}{2 u K_0(a)} e^{-\frac{a}{2}\left(\frac{u}{\mu}+\frac{\mu}{u}\right)}$$

et c'est cette loi que HALPHEN avait appelé "loi harmonique".

La constante $K_0(a)$ est une fonction bien connue, la fonction de BESSEL-BASSET d'ordre zéro.

Si l'on fait l'hypothèse qu'une série d'observations provient d'une telle loi, la meilleure façon d'estimer les paramètres consiste dans l'utilisation des moments d'ordres 1 et -1, c'est-à-dire des moyennes arithmétique et harmonique des observations, soient m et h, on peut alors caractériser une loi donnée par les paramètres :

$$\mu = \sqrt{mh} \text{ et } \lambda = \sqrt{\frac{m}{h}}$$

on montre sans peine que μ est la médiane de la distribution ; λ est un paramètre de dispersion relative, fonction croissante du coefficient de variation $cv = \frac{\sigma}{m}$.

En fait, l'emploi de la loi harmonique est surtout rendu extrêmement commode par l'emploi de l'abaque, construit par HALPHEN, qui condense sous un volume extrêmement réduit, et avec une précision très suffisante pour la plupart des applications, la tabulation de toutes les lois harmoniques. (Voir graphique 5).

Cette loi a rendu des services appréciables, en particulier pour l'évaluation des probabilités attachées aux valeurs mensuelles des indices d'hydraulicité des trois grandes régions hydroélectriques (modèle hydraulique) : Alpes, Pyrénées.

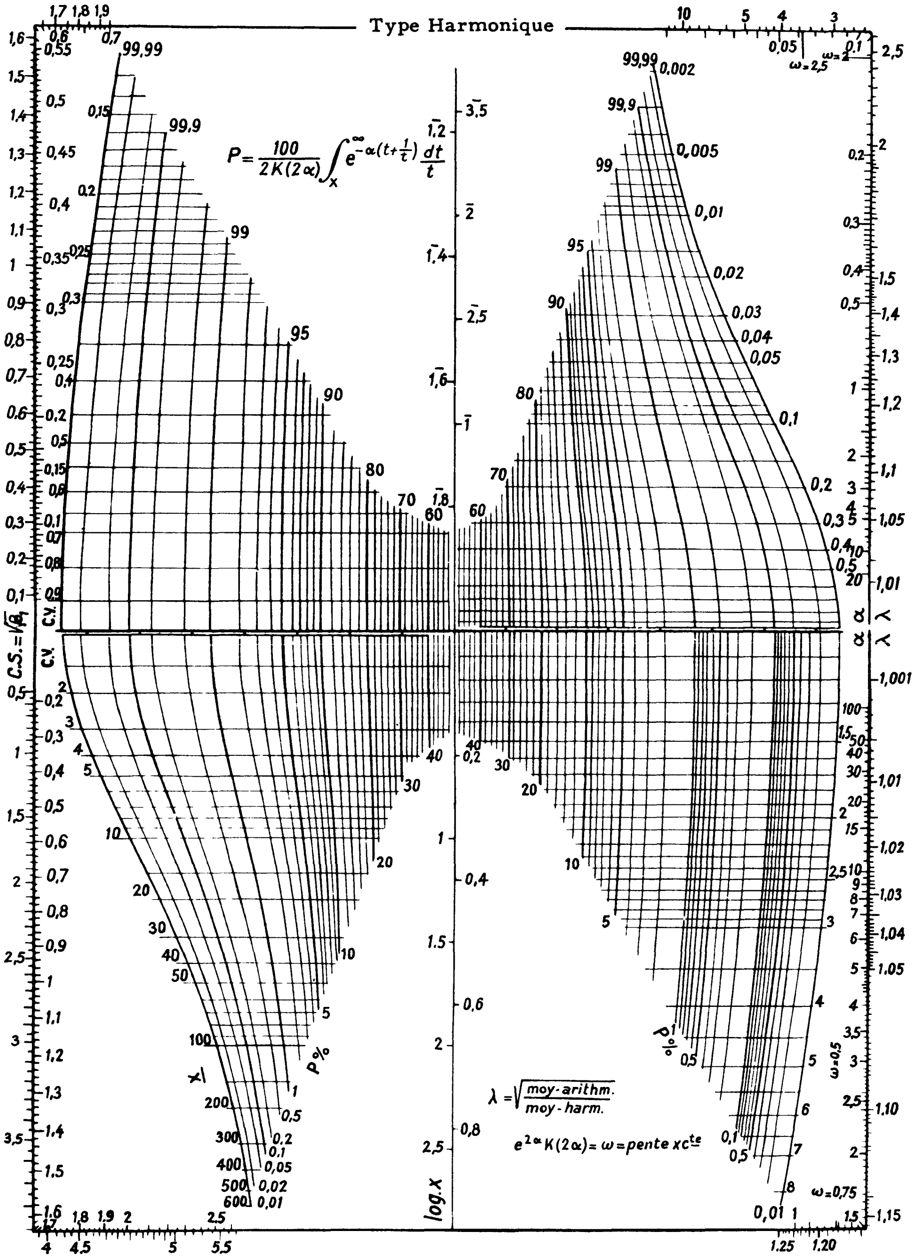


Fig. 5.- Mode d'emploi de l'abaque de la loi harmonique. Toute droite passant par le centre du graphique définit une loi particulière du type harmonique, qui peut être repérée par la valeur de l'un des paramètres a, λ , c.v. ou c.s. figurant sur les 4 échelles encadrant l'abaque.

Massif Central. Elle a été utilisée, par Etienne HALPHEN et ses collaborateurs, dans un assez grand nombre de travaux particuliers d'hydrologie statistique.

Il ne semble pas que son emploi se soit beaucoup étendu en dehors de ce cercle restreint, sans doute en raison des circonstances qui règnaient à l'époque des travaux d'HALPHEN sur ce sujet (1940-1944) et qui favorisaient assez peu les efforts de diffusion

Ensuite, un usage étendu de cette loi avait révélé la nécessité de généralisation dont nous allons parler.

2.3. Les lois harmoniques généralisées ou lois du type A (1946)

Parce que la loi harmonique ne contient que deux paramètres, sa dispersion relative impose entièrement la forme de la courbe de densité, comme nous l'avons vu pour les lois antérieurement utilisées (GALTON-GIBRAT et PEARSON notamment).

Pour obtenir une plus grande souplesse, HALPHEN généralisa donc cette loi de la façon la plus simple qui se puisse concevoir, en introduisant les fonctions de densité définies par :

$$f(u) = \frac{1}{2\mu^{\gamma} K_{\gamma}(a)} \exp\left\{-\frac{a}{2}\left(\frac{u}{\mu}+\frac{\mu}{u}\right)\right\}. u^{\gamma - 1}$$

Les constantes d'intégration sont encore des fonctions de BESSEL (d'ordre γ cette fois) et sont donc abondamment tabulées. Les quantités permettant en théorie le meilleur ajustement des paramètres sont les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique. La décroissance de la densité, tant à l'origine qu'à l'infini, est encore exponentielle.

On constate que des formes limites, pour des valeurs particulières des paramètres, sont les lois des types 3 et 5 de PEARSON, entre lesquelles le type A de HALPHEN donne une entretoise fort bienvenue. (Dans les lois de PEARSON, le type VI au comportement asymptotique algébrique, ne fournit pas de solution concernant des variables prenant toute valeur positive).

Ne pouvant aborder, à l'époque, la tabulation de ces fonctions de répartition faute de moyens de calculs (c'est à cette époque que j'ai commencé à travailler avec Etienne HALPHEN) nous avons pu cependant étudier l'adéquation des lois du type A à d'assez nombreuses séries de débits mensuels de nos stations hydrométriques (nous parlerons plus loin des méthodes utilisées).

Une constatation s'est imposée assez vite : les lois du type A se montraient adéquates dans beaucoup de cas, mais un nombre non négligeable de séries d'observations nécessitaient des formes nouvelles, qui "prolongeraient" les lois A en représentant en particulier, au voisinage de l'origine, des comportements asymptotiques différents.

2.4. Les lois du type B (1948)

C'est ainsi qu'HALPHEN introduisit des lois de probabilité nouvelles, dont la forme définitive fut fixée après un certain nombre de tâtonnements et d'essais plus ou moins fructueux. Il fut une époque où le nombre de types analytiques imaginés et étudiés successivement par HALPHEN entamait sérieusement notre alphabet.

C'est donc par des essais très empiriques qu'HALPHEN arrêta finalement son choix sur les lois qui s'appellent maintenant lois du type B et dont nous montrerons plus loin qu'elles complètent parfaitement le type A pour former avec lui une construction d'une très grande harmonie.

Leur forme analytique est celle-ci :

$$f(u) = \frac{2}{v^{2\alpha}\, ef_{\alpha}(b)} \exp \left\{ -\left(\frac{u}{v}\right)^2 + b\frac{u}{v} \right\} . u^{2\alpha - 1}$$

La variété des formes de ces lois est très grande, puisqu'on trouve parmi elles, selon les valeurs attribuées aux paramètres α et b, des lois unimodales dont le comportement à l'origine prend une forme algébrique quelconque, des lois en J et même des lois dites "en S", ce qui constitue peut-être une forme un peu nouvelle en statistique mais ne semble pas, à posteriori, superflu pour la représentation de certaines séries hydrologiques ou météorologiques. (Voir graphique 6)

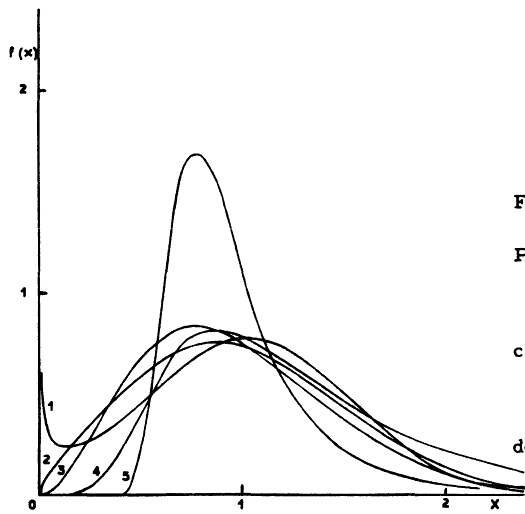


Fig. 6.- Quelques lois de HALPHEN de coefficient de variation égal à 0,5.

Pour un coefficient de variation fixé, les lois de HALPHEN présentent une grande diversité de formes.

On a tracé ici les fonctions de distribution correspondant à diverses valeurs du paramètre $\lambda_0 = \frac{m - g}{\sigma}$ (voir plus loin).

Les courbes 1, 2 et 3 sont des lois du type B, de λ_0 égaux à 0,5, 0,3 et 0,26. La courbe 4 est une loi harmonique, de λ_0 égal à 0,215. Enfin, la courbe 5 est une loi B^{-1}, de λ_0 égal à 0,13.

Les intégrales complètes sur la demi-droite positive de la forme :

$$2 \int_0^{\infty} \exp(-v^2 + xv) . v^{2\alpha - 1} dv = I(\alpha, x)$$

ont paru assez longtemps constituer des fonctions nouvelles. C'est assez tardivement - vers 1952 - que nous sûmes avoir affaire à des fonctions connues sous le nom de fonctions de HERMITE. Il faut se réjouir de cette ignorance. Les fonctions de HERMITE ne semblent pas avoir été l'objet d'autant de travaux, tant théoriques que numériques, que les fonctions de BESSEL. Et HALPHEN, qui les ignorait, eut ainsi l'occasion de pousser leur étude assez loin ; montrant sous un jour très nouveau quelques chapitres importants de l'analyse mathématique classique.

Il a nommé fonctions factorielles les intégrales de la forme ci-dessus et montré comment elles peuvent définir une classe comprenant un grand nombre des fonctions les plus connues de l'analyse ; il a mis ainsi dans une foule de propriétés connues un ordre absolument original.

Il a même découvert, par cette voie, quelques relations nouvelles et frappantes - comme la fameuse identité :

$$\int_0^\infty e^{-z^2} (\cos x z + \sin x z) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\infty e^{-\left(z - \frac{x}{2}\right)^2} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

dont j'ai déjà dit quelques mots ici même.

La plupart de ces résultats se trouvent dans un mémoire récemment publié (1).

Les fonctions factorielles les plus nécessaires ayant été tabulées grâce à la collaboration du Laboratoire de Calcul de l'Institut Henri Poincaré, il fut possible d'entreprendre entre 1952 et 1955, la tabulation des lois de probabilité A et B de PHEN.

2.5. La tabulation des loi de probabilité A et B (1952-1955)

En fait, cette tabulation représente un très gros travail de calcul numérique, puisqu'il s'agit de calculer, pour une gamme étendue de valeurs des paramètres et les limites supérieures d'intégration, des intégrales définies du type :

$$F(z) = \int_0^z \exp\left\{ -\frac{a}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)\right\} . v^{\gamma - 1} dv$$

pour les fonctions de répartition du type A, et

$$F(z) = \int_0^z \exp\left\{ -v^2 + bv \right\} . v^{2\alpha-1} dv$$

pour les fonctions de répartition du type B.

Il fallait pour entreprendre ces calculs des moyens assez puissants et ce n'est que dans les toutes récentes années que nous pouvions songer à les entreprendre en France.

Ces calculs ont été effectués par le Service de Calcul Scientifique d'I.B.M. FRANCE à l'aide de machines électroniques modernes et nous remercierons, au passage, les Ingénieurs de ce service pour leur collaboration à ces travaux.

Nous donnerons un peu plus loin quelques exemples des tables numériques et des abaques qui ont été construits pour l'emploi pratique de ces fonctions de probabilité, et qui seront intégralement publiés dans un proche avenir. (Voir tableau 7)

2.6. Les lois du type B^{-1} (1956)

Nous montrerons plus loin comment les lois A et B de HALPHEN pouvaient satisfaire à presque tous nos besoins. Il subsistait cependant une lacune, qui vient d'être entièrement comblée par l'introduction d'un prolongement nouveau que nous nommons les lois B^{-1} (ou B inverse). C'est mon Collaborateur et ami, M. LARCHER qui a eu l'idée très simple de considérer les lois définies par la densité :

---

(1) "Les fonctions factorielles" par Etienne HALPHEN - Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris ; Vol. IV : fasc. 1.1955.

$$f(u) = \frac{2}{\nu^{-2\alpha}\, ef_{\alpha}(b)} \exp\left\{ -\left(\frac{\nu}{u}\right)^2 + b\frac{\nu}{u}\right\} . u^{-2\alpha-1}$$

Nous verrons dans un instant comment ces nouvelles lois complètent harmonieusement les lois A et B et achèvent la construction magistrale entreprise par HALPHEN depuis quinze ans.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LOIS DE HALPHEN

3.1. - L'exposé historique qui précède a montré comment nous sommes maintenant en possession des 3 types de lois dont nous rappelons les formes analytiques. (fonction de densité de probabilité, définissant des variables aléatoires pouvant prendre toute valeur positive) en indiquant les limitations imposées aux divers paramètres :

Lois du type A.

$$f(u) = \frac{1}{2\mu^{\gamma}\, K_{\gamma}(a)} \exp\left\{ -\frac{a}{2}\left(\frac{u}{\mu} + \frac{\mu}{u}\right)\right\} . u^{\gamma-1}$$

pour $\mu > o$, $a > o$, γ quelconque.

Lois du type B.

$$f(u) = \frac{2}{\nu^{2\alpha}\, ef_{\alpha}(b)} \exp\left\{ -\left(\frac{u}{\nu}\right)^2 + b\frac{u}{\nu}\right\} . u^{2\alpha-1}$$

pour $\nu > o$, b quelconque, $\alpha > o$

Lois du type B^{-1}

$$f(u) = \frac{2}{\nu^{-2\alpha}\, ef_{\alpha}(b)} \exp\left\{ -\left(\frac{\nu}{u}\right)^2 + b\left(\frac{\nu}{u}\right)\right\} . u^{-2\alpha-1}$$

pour $\nu > o$, b quelconque, $\alpha > o$

Rappelons que les fonctions $K_{\gamma}(a)$ sont les fonctions de BESSEL-BASSET et les fonctions $ef_{\alpha}(b)$ sont les fonctions factorielles de HALPHEN (ou fonctions de HERMITE).

On remarquera que le fait qu'une variable aléatoire U suive une loi B^{-1} est équivalent au fait que son inverse $V = \frac{1}{U}$ suive une loi B, ce qui explique la dénomination B^{-1}.

Quant au type A, la transformation $V = \frac{1}{U}$ le conserve en changeant simplement le signe du paramètre γ

3.2. Les moments des lois de HALPHEN

La considération du comportement asymptotique des densités de probabilité permet de constater que les lois du type A ont des moments de tous ordres, négatifs ou positifs. Le moment d'ordre k, pour k entier non nul, s'exprime par :

$$m_k = \mu^k . \frac{K_{\gamma+k}(a)}{K_{\gamma}(a)}$$

Le moment d'ordre zéro dont nous verrons plus loin l'importance est obtenu en dérivant logarithmiquement la fonction de BESSEL par rapport à l'indice γ.

Rappelons que pour une loi de densité f (x) quelconque, la moyenne géométrique est définie par :

$$m_o = \text{Log } g = \int \text{Log } x \, f(x) \, dx$$

On trouve ici pour les lois du type A :

$$m_o = \frac{\frac{\partial}{\partial \gamma} K_\gamma(a)}{K_\gamma(a)}$$

Ce sont des fonctions qu'il a fallu tabuler pour l'étude des lois de HALPHEN.

Si on passe aux lois du type B, on constate que ces lois possèdent un moment d'ordre k à condition que $k > -2\alpha$. Elles possèdent toujours en particulier tous leurs moments d'ordres positifs donnés par :

$$m_k = \nu^k \cdot \frac{ef_{\alpha+k/2}(b)}{ef_\alpha(b)}$$

et la moyenne géométrique est donnée par :

$$m_o = \log g = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} ef_\alpha(b)}{ef_\alpha(b)}$$

A l'inverse, les lois du type B^{-1} possèdent un moment d'ordre **k** à condition que $k < 2\alpha$. La considération de la variable inverse en donne immédiatement la formule.

3.3. L'estimation des paramètres des lois A et B

Les paramètres adoptés dans les formules données plus haut sont les plus commodes pour le calcul des constantes et des moments.

Pour l'estimation des paramètres, un changement de notation facile permet d'écrire :

$$f(x) = c \exp \left\{ \theta_1 x + \theta_0 \text{ Log } x + \frac{\theta_{-1}}{x} \right\}$$

pour la densité des lois du type A.

$$f(x) = c \exp \left\{ -\theta_2 x^2 + \theta_1 x + \theta_0 \text{ Log } x \right\}$$

pour la densité des lois du type B,

$$f(x) = c \exp \left\{ -\frac{\theta_{-2}}{x^2} + \frac{\theta_{-1}}{x} + \theta_0 \text{ Log } x \right\}$$

enfin pour la densité des lois du type B^{-1}.

Sous cette forme, il apparait clairement qu'un résumé exhaustif des observations, pour l'estimation des 3 paramètres, est fourni pour chaque type par un ensemble de trois moyennes qui sont respectivement pour le type A :

$$m \text{ (moyenne arithmétique) : } m = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$g \text{ (moyenne géométrique) : } \log g = \frac{1}{n} \sum \log x_i$$

$$h \text{ (moyenne harmonique) : } \frac{n}{h} = \sum \frac{1}{x_i}$$

pour le type B :

$$\ell \text{ (moyenne quadratique) : } \ell^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2$$

m (moyenne arithmétique)

g (moyenne géométrique)

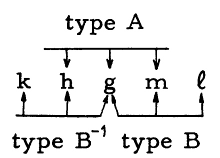
pour le type B^{-1} :

g (moyenne géométrique)

h (moyenne harmonique)

k (moyenne quadratique inverse) : $\frac{n}{k^2} = \sum \frac{1}{x_i^2}$

On peut représenter ces résultats très synoptiquement par le tableau ci-dessous :



3.4. Représentation graphique des divers types de lois de HALPHEN

En éliminant un paramètre d'échelle, choisi de façon quelconque, on peut représenter les diverses lois de HALPHEN par les points d'un plan, dont les coordonnées sont des fonctions choisies de 3 moments. Il s'agit d'une opération analogue à la représentation classique des lois de PEARSON par les quantités β_1 et β_2 (coefficients de dissymétrie et d'aplatissement selon l'interprétation pearsonniènne).

Un assez grand nombre de variantes ont été étudiées pour une telle représentation. Nous en retiendrons ici seulement deux, intéressantes à des titres différents.

Une première représentation consiste à choisir comme coordonnées les quantités :

$$\log \frac{m}{g} \text{ et } \log \frac{g}{h}$$

qui sont nécessairement positives. Cette représentation, définie par des paramètres choisis symétriquement dans l'ensemble des cinq moyennes citées plus haut, met parfaitement en évidence la symétrie entre les lois A suivant le signe de l'indice γ d'une part et d'autre part entre les lois B et B^{-1}. (Voir graphique 8)

Avec ces coordonnées, toutes les lois A sont représentées dans une portion du premier quadrant. Par contre, seules sont représentées les lois B, qui ont une moyenne harmonique finie, c'est-à-dire pour lesquelles $\alpha > \frac{1}{2}$. La même condition vaut pour assurer l'existence de la moyenne arithmétique des lois B^{-1}. (Voir graphique 8).

Une seconde représentation présente un certain nombre d'avantages ; elle est obtenue avec les paramètres :

$$cv = \frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{\ell^2 - m^2}}{m} \text{ et } \lambda_o = \frac{m-g}{\sigma}$$

On a ainsi des quantités d'usage assez familier. Par ailleurs avec ces coordonnées les inégalités classiques sur les moments des divers ordres imposent :

$$cv > o, \quad \lambda_o > o, \quad \lambda \; . cv < 1$$

Tableau 7

EXEMPLE DE TABLES NUMERIQUES DES LOIS A et B

Nous disposons de tables détaillées, de ce type, pour une soixantaine de lois de chacun des types A et B.

Par suite des moyens de calculs mis en oeuvre, la précision sur la valeur de z correspondant à une probabilité donnée, dans la zône médiane, est de l'ordre de :

1 % pour les lois du type A
et 1 ‰ pour les lois du type B

LOI DU TYPE A		LOI DU TYPE B		
$\gamma = 1$ $a = 2$ $\lambda_0 = .265$ $cv = .635$		$\alpha = .814$ $b = 1{,}26$ $\lambda_0 = .30$ $cv = .50$		
z	F (z)	z	F (z)	f (z)
.200	.001	.030	.001	.062
.300	.006	.040	.002	.075
.400	.021	.050	.003	.087
.500	.045	.060	.004	.099
.600	.785	.070	.005	.110
.700	.118	.080	.006	.122
.800	.163	.090	.007	.132
.900	.210	.100	.008	.143
1.000	.258	.120	.011	.163
1.200	.353	.140	,015	.184
1.400	.443	.160	.019	.204
1.600	.525	.180	.023	.224
1.800	.597	.200	.028	.243
2.000	.661	.300	.057	.338
2.200	.715	.400	.095	.429
2.400	.762	.500	.142	.511
2.600	.801	.600	.197	.583
2.800	.834	.700	.258	.639
3.000	.862	.800	.324	.679
3.200	.886	.900	.393	.699
3.400	.905	1.000	.464	.701
3.600	.921	1.100	.533	.684
3.800	.935	1.200	.600	.651
4.000	.946	1.300	.663	.605
4.200	.956	1.400	.721	.549
4.4000	.963	1.500	.772	.486
4.600	.970	1.600	.818	.421
4.800	.975	1.700	.857	.357
5.000	.979	1.800	.890	.296
5.500	.987	1.900	.916	.240
6.000	.992	2.000	.937	.190
6.500	.995	2.200	.967	.112
7.000	.997	2.400	.984	.060
7.500	.998	2.600	.993	.030
8.000	.999	2.800	.997	.014
8.500	.999	3.000	.999	.006

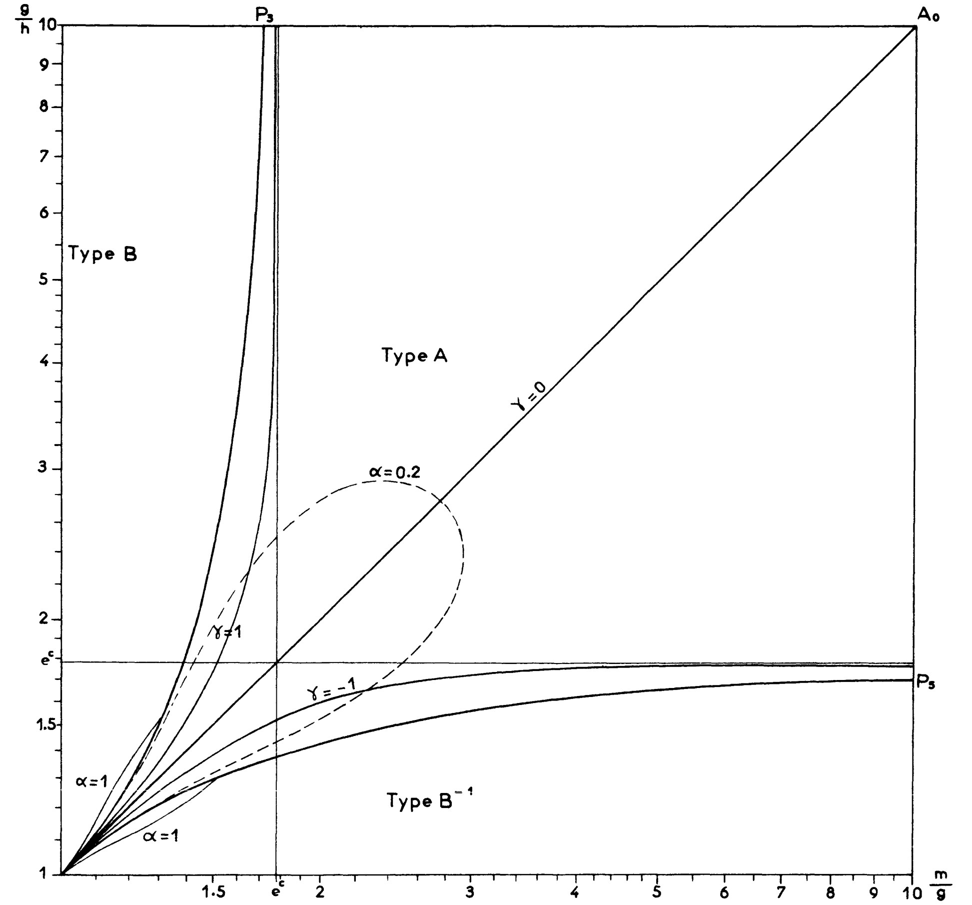


Fig. 8

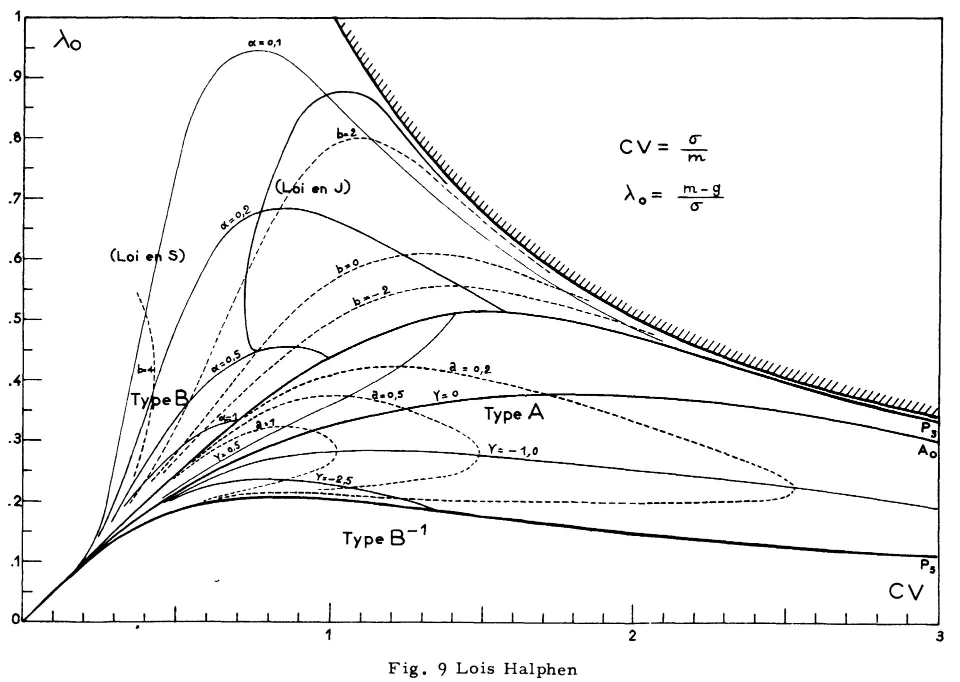


Fig. 9 Lois Halphen

ce qui entraine que toute loi de probabilité est représentable à distance finie, exception faite des directions des axes de coordonnées eux-mêmes.

Enfin, les coordonnées qui précèdent permettent de représenter toutes les lois A et B, ainsi que les lois B^{-1} pour lesquelles $\alpha > 1$. (Voir graphique 9)

Notons que si la variable X suit une loi B^{-1}, la variable $Y = \frac{1}{X}$ suit une loi B. Toutes les lois B^{-1} peuvent d'ailleurs être obtenues ainsi. Quant aux lois B^{-1} qui sont directement représentées sur l'abaque en λ_0, cv, elles correspondent, dans cette transformation, aux lois B situées à l'intérieur du domaine limité par la courbe $\alpha = 1$ et par la courbe représentative des lois P 3.

Par ailleurs, si l'on veut ajuster d'une façon uniforme les divers types de lois de HALPHEN, les quantités λ_0 et cv constituent :

- pour les lois B, le meilleur ajustement théorique.
- pour les lois A, un procédé d'ajustement qui est certainement d'une efficacité honorable, à raison de l'existence de tous les moments (la médiocrité d'un mode d'ajustement par les moments étant liée en général à la divergence de certains moments théoriques).
- enfin, les lois B^{-1} se prêtent à un ajustement par λ_0 et cv sur l'inverse de la variable (et sans doute serait-il avantageux d'utiliser le même procédé pour les lois A d'indice négatif).

En bref, les quantités λ_0 et cv jouent pour les lois de HALPHEN un rôle assez semblable à celui des β_1 et β_2 pour les lois de PEARSON.

3.5. Notion de classe complète de lois de probabilité

Si l'on convient dans un certain domaine d'études statistiques, d'ajuster sur toute série d'observations une loi de probabilité à k paramètres, à l'aide de k moments déterminés, il est hautement souhaitable de disposer d'une classe de lois de probabilité telle qu'à tout ensemble de valeurs possibles pour les k moments choisis corresponde toujours un et un seul système de valeurs de paramètres de la loi de probabilité assurant aux moments théoriques des valeurs égales aux moments empiriques. Nous dirons alors que nous disposons d'une classe complète de lois de probabilité à k paramètres.

Si l'on recherche des lois à deux paramètres, il semble bien que toutes les formes de lois d'usage courant constituent des classes complètes pour les moments habituellement utilisés (moyenne et écart quadratique moyen par exemple).

Pour des familles de lois à trois paramètres, il semble beaucoup plus difficile d'obtenir des classes complètes ; cependant, les lois de PEARSON constituent une classe complète pour les paramètres β_1 et β_2.

De même, les lois de HALPHEN forment une classe complète depuis que M. LARCHER a eu l'idée d'y faire figurer les lois B^{-1} et c'est une propriété dont l'intérêt n'a guère besoin d'être souligné.

4. CONFRONTATION AVEC LES OBSERVATIONS HYDROMÉTRIQUES.

4.1. Débits moyens mensuels

Les séries de débits moyens mensuels - ou relatifs à des périodes de quelques mois - constituent le premier domaine d'application étudié des lois de probabilité de HALPHEN. L'examen systématique des ajustements sur les débits des 12 mois de l'année, pour la plupart des stations de l'Annuaire Hydrologique de la France, avait été effectué à l'occasion de la précédente communication (LE CAM 1949). (Voir graphique 11) page suivante.

Nous reproduisons le graphique sur lequel avaient été portés les points représentant les lois ajustées et nous bornerons à quelques commentaires.

Il apparait assez clairement qu'un ensemble de lois formant une famille à deux paramètres ne puisse être admis, au vu de ces résultats ; nous en avons donné précédemment une explication.

On pourrait attendre davantage si l'on sélectionnait des observations afferentes à un régime climatique et saisonnier donné, la principale variable étant la taille des bassins versants, par exemple. Mais il n'est pas commode de réunir un assez grand nombre de séries homogènes au sens qui vient d'être dit. (Voir graphique 12).

La mise à jour de ce travail, avec près d'une dizaine d'années d'observations supplèmentaires est en cours d'achèvement.

Sur le graphique précité, la nécessité de combler la lacune située au delà des lois du type 5 de PEARSON apparait clairement. La plupart des points expérimentaux situés dans cette zône sont dus à des débits d'été de rivières du Massif Central, qui peuvent présenter une irrégularité relative très grande, surtout marquée pour les débits élevés (écoulements d'orages) ; nous avons vu que les lois B^{-1} peuvent représenter convenablement de telles distributions.

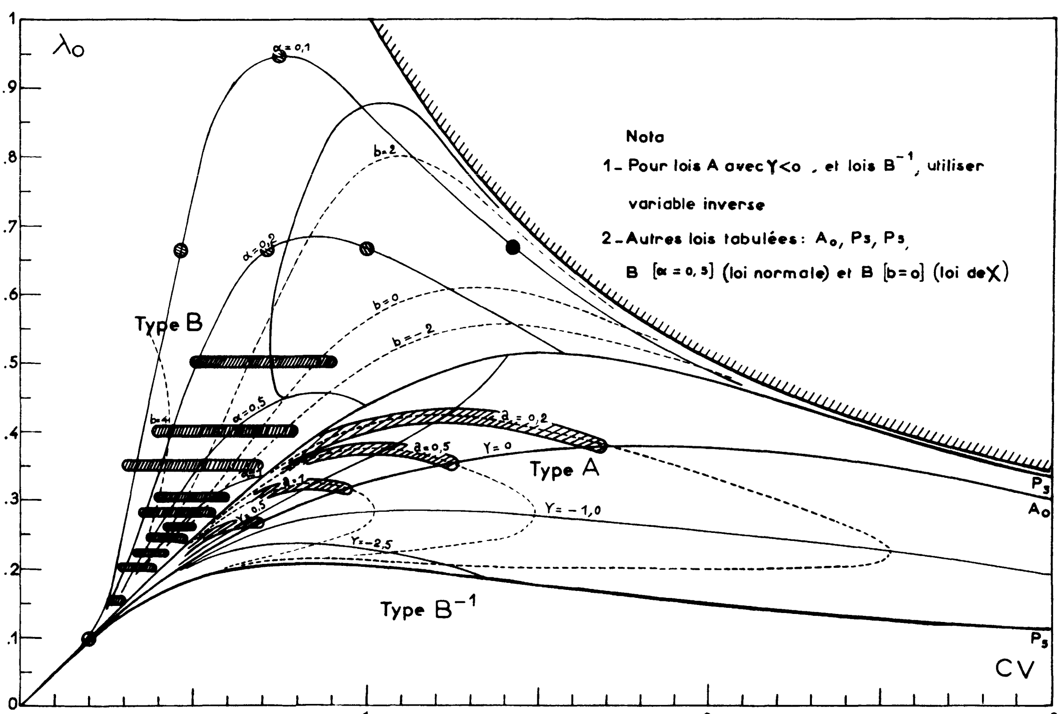


Fig. 10 Lois Halphen tabulées

4.2. Étude des lois ajustées sur des périodes de longueurs variables

L'étude du déplacement, sur les abaques figuratifs des lois de HALPHEN, des points expérimentaux représentant la loi ajustée pour des débits de 1 jour, 3 jours..., 1 mois, ... nous a montré certains phénomènes systèmatiques intéressants - dont l'interprétation parait complexe.

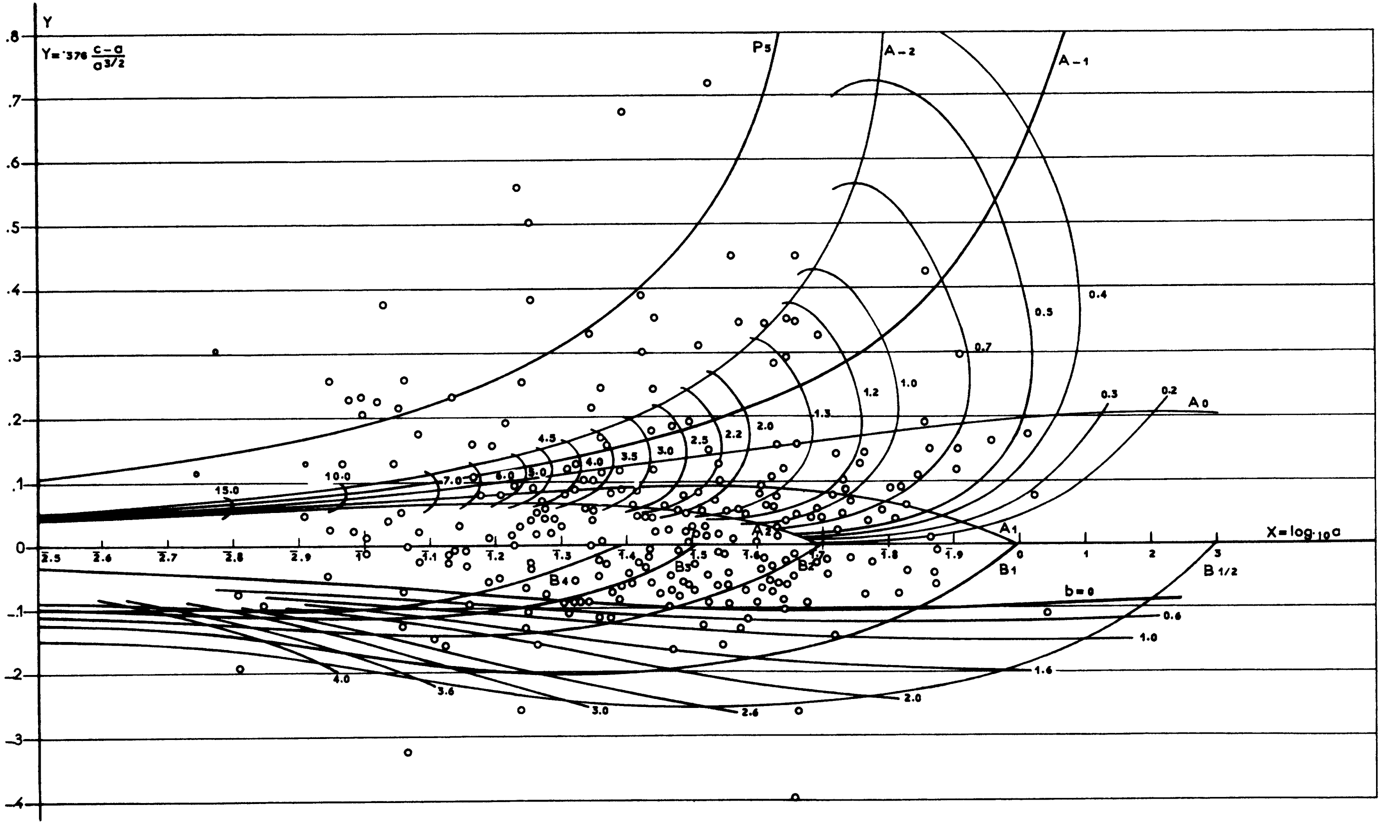


Fig. 11.- Position des points expérimentaux établis sur les séries des débits moyensmensuels de 25 stations de l'Annuaire Hydrologique.
Graphique emprunté au mémoire publié en 1949 dans la "Houille Blanche" (LE CAM et MORLAT)

Les coordonnées de ce graphique sont définies en fonction des quantités

c, carré du coefficient de variation expérimental.
a, carré du c.v. de la loi P 3 ajustée par m et g (estimateurs exhaustifs)

Les coordonnées $X = \log_{10} a$ et $Y = 0{,}376\ \frac{c - a}{a^{3/2}}$

ont la propriété remarquable suivante, établie par M. LE CAM.

Pour une loi "vraie" X_0, Y_0, voisine d'une loi P 3, X et Y sont indépendants : leurs écarts-types d'échantillonnage sont égaux asymptotiquement, pour n grand) à :

$$\sigma_x = \sigma_y = 0{,}025\sqrt{n}$$

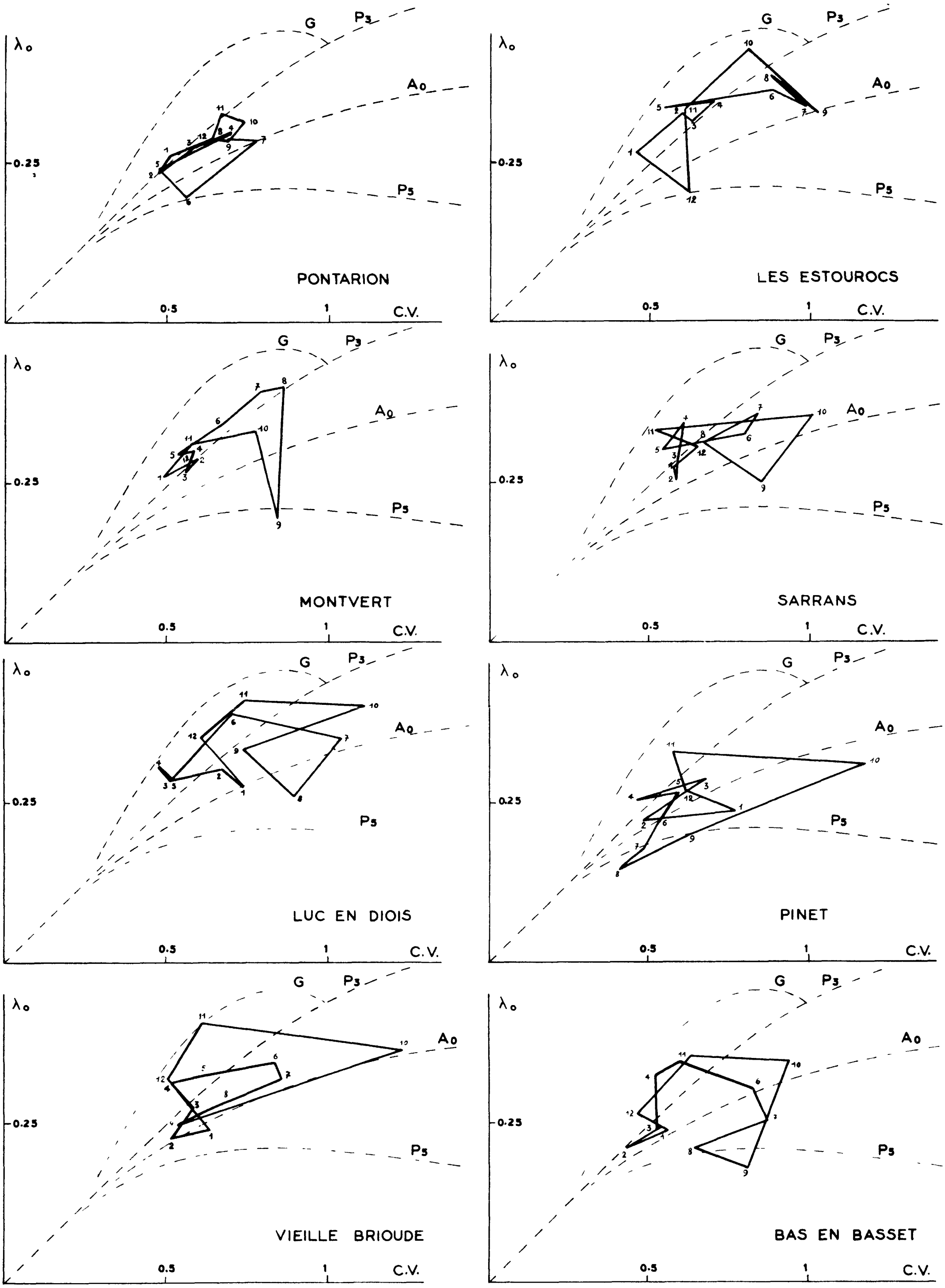


Fig. 12.- Polygones représentant, dans les coordonnées c.v., λ_o, le déplacement des lois ajustées aux débits des divers mois de l'année, pour 8 stations du Massif Central. Il semble que le maximum de dispersion en Octobre caractérise les stations soumises à des influences cévenoles. On sait par ailleurs que la Drôme doit être rangée parmi ces stations.

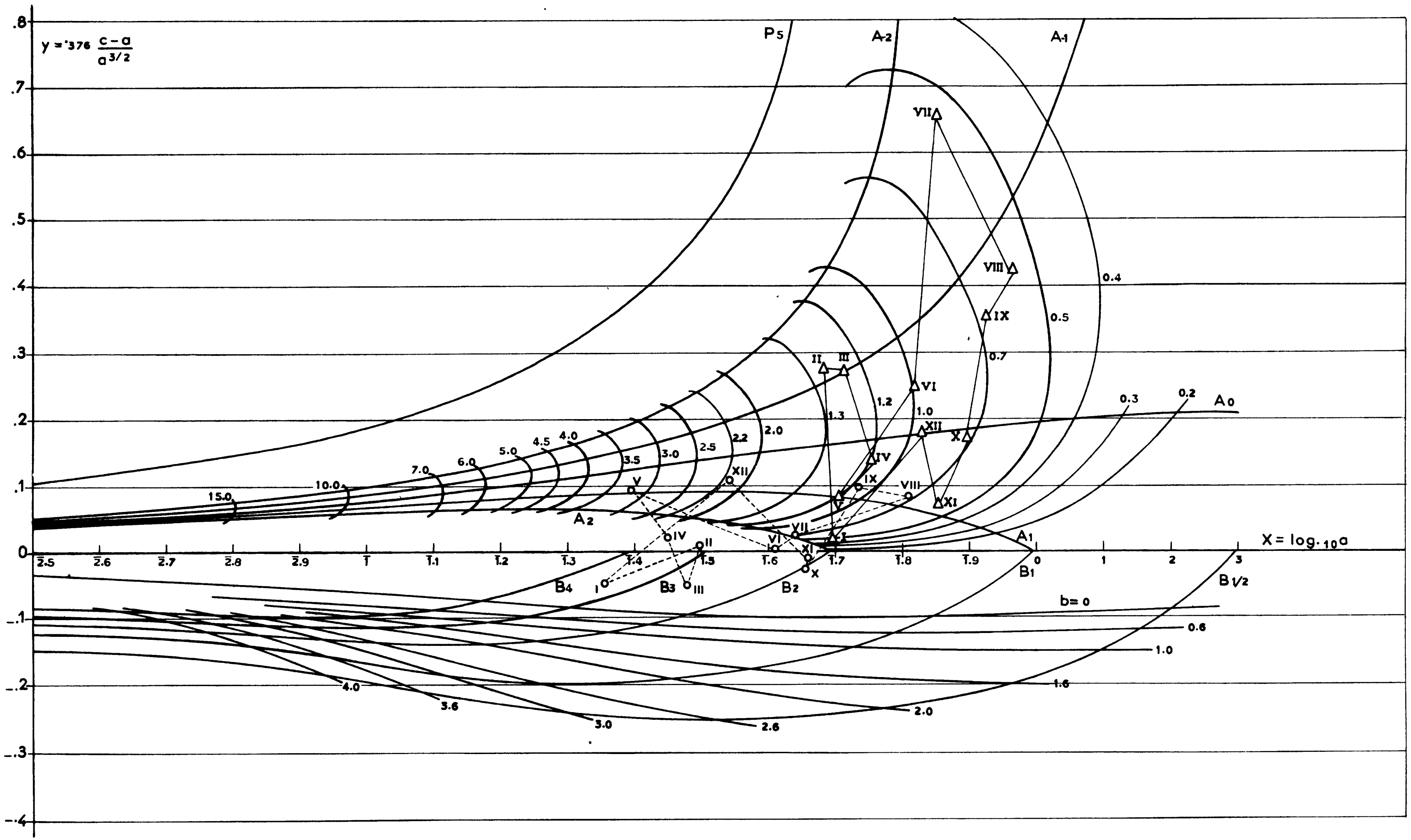


Fig. 13.- Points expérimentaux correspondant à des débits quotidiens (triangles) et mensuels (cercles) de la Dordogne à ARGENTAT, calculés sur la période 1899-1945.

Nous signalerons seulement ici l'état de ces recherches en montrant quelques données expérimentales. (Voir graphiques 13, 14)

4.3. L'emploi des lois de HALPHEN pour les débits de crues

Nous avons eu l'occasion, il y a quelques années de parler assez longuement à la Société Hydrotechnique de France, du problème difficile de l'évaluation des probabilités de très fort débits de crue. Nous avons souligné le caractère très illusoire des justifications théoriques qui ont pu être données à tel ou tel type de loi de probabilité.

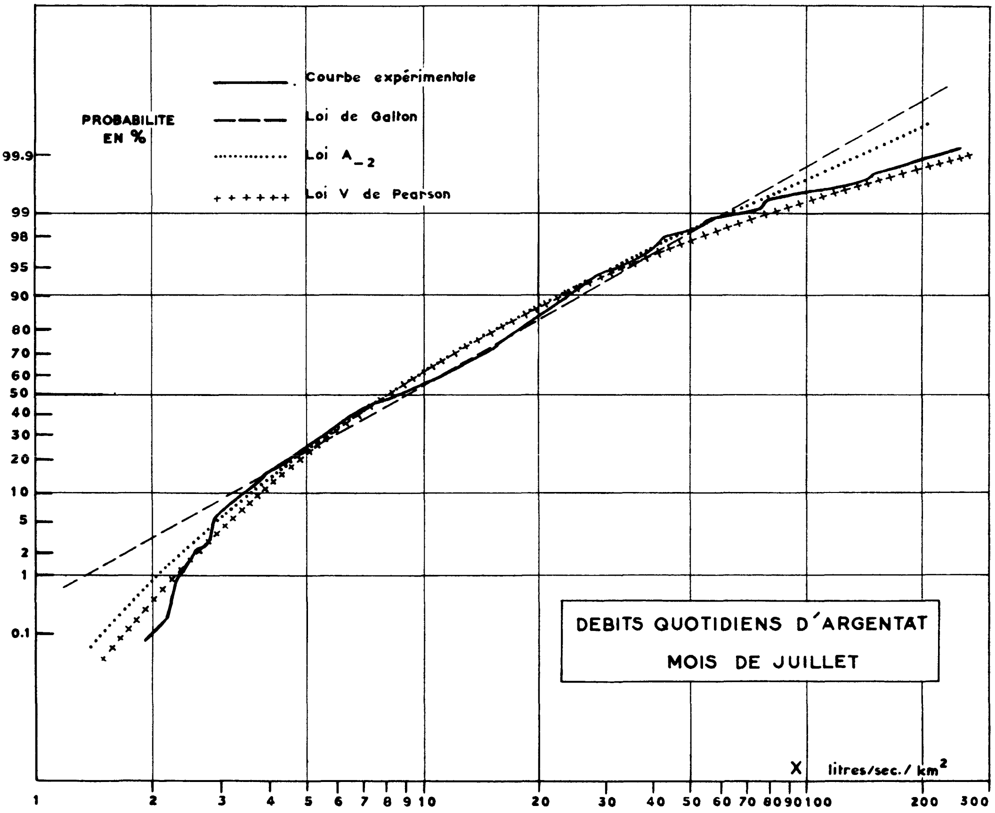


Fig. 14

Cependant, au sujet du scepticisme professé par beaucoup d'hydrologues à l'égard des méthodes du calcul des probabilités, une remarque s'impose ; la grande majorité d'entre eux souligne le caractère trop souvent optimiste des ajustements effectués avec les lois de probabilité courantes, dont l'usage est alors qualifié d'imprudent ; des crues exceptionnelles, dépassant de loin les records passés, semblent en effet plus à craindre que ne le laisseraient croire les probabilités qu'on leur attribue, comme en témoignent maints exemples.

Mais parmi les lois les plus connues, la loi de GUMBEL, avec sa décroissance doublement exponentielle est précisément parmi les plus optimistes.

Par contre, on trouvera parmi les loi B^{-1} de HALPHEN, dont la décroissance peut être algébrique, des lois que nous qualifierons de "prudentes". Remarquons d'ailleurs que l'une des formes limites données par FISHER et TIPPETT pour la loi limite des valeurs extrêmes (cas d'une loi de départ à comportement algébrique) vérifie la même propriété. Malheureusement, il ne semble pas qu'on ait tenté de l'appliquer aux débits de crue.

Soulignons encore que l'emploi des lois B^{-1} pour les crues, ajustées à l'aide des moments d'ordre 0, -1 et -2 par exemple, a l'avantage d'accorder un poids judicieusement réduit aux très fortes valeurs, dont on sait que la précision des mesures est extrêmement grossière.

Lorsque nous avons dû, au printemps dernier, attribuer une loi de probabilité aux crues de la DURANCE à SERRE-PONCON, pour permettre les calculs économiques des ouvrages de protection, dont parlera tout à l'heure M. LABAYE nous avons choisi une loi de probabilité définie de façon parfaitement empirique, en essayant de traduire le sentiment acquis, mais non chiffré, dans l'étude de ces crues. La loi admise avait été tracée sur un graphique, qu'on trouvera ci-joint. Nous avons pu maintenant constater que la fonction de répartition admise était pratiquement une loi du type B^{-1} comme le montre le tableau ci-dessous :

Crue de probabilité	Dans la loi admise en Mai 1955	Dans la loi B^{-1} la plus voisine
10^{-1}	500	500
10^{-2}	1100	1100
10^{-3}	2500	2400
10^{-4}	5000	4500

(Naturellement, une loi de HALPHEN ajustée, sans aucune restriction, sur la série des crues observées avec continuité, c'est-à-dire depuis quarante ans donne des résultats infiniment plus optimistes... mais que nous avons quelques raisons de croire dangereux.)

CONCLUSION

Lors des premières journées de l'Hydraulique organisées en 1949 par la Société Hydrotechnique de France, M. LE CAM avait présenté un exposé sur les lois de probabilité de HALPHEN. Cet exposé était plus philosophique que pratique, faute de tables numériques.

Aujourd'hui, nous pouvons recommander l'emploi des lois de HALPHEN par le praticien. Nous avons montré pourquoi ces lois comblent une lacune. Si nous parvenons à les faire connaitre, nous ne doutons guère des services qu'elles rendront. Bien que n'ayant donné à ces travaux, depuis 1949, aucune publicité, nous entretenons depuis 6 mois, avec un ingénieur yougoslave, une correspondance par laquelle il nous exprime essentiellement son impatience de pouvoir disposer des tables numériques qui lui permettront d'appliquer les lois de HALPHEN aux rivières de son pays.

Nous sommes convaincus que beaucoup d'autres recevront cet outil avec le même contentement, et cela nous encourage à poursuivre ces travaux.

C'est essentiellement d'applications nombreuses et variées que nous devons attendre les enseignements qui permettront de mieux connaitre l'outil que nous a légué HALPHEN.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

1.- R. GIBRAT.- Aménagement hydroélectrique des cours d'eau : statistique mathématique et probabilités. R.G.H. Septembre-Octobre 1936 pages 586-595.

2.- A. COUTAGNE.- Etude statistique et analytique des crues du Rhône à LYON. Congrès pour l'Utilisation des Eaux. LYON 1938.

3.- P. MASSE.- Situation, perspectives et applications de l'Hydrologie statistique. Annuaire Hydrologique de la France 1940.

4.- Et. HALPHEN.- Sur un nouveau type de courbe de fréquence. Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences. 10 novembre 1941.

5.- LE CAM et G. MORLAT.- Les lois des débits des rivières françaises. La Houille Blanche N° spécial B 1949.

6.- Et. HALPHEN.- Les fonctions factorielles. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris. Volume IV. Fascicule 1. 1955.

DISCUSSION

Président M. BATICLE

M. le Président remercie M. MORLAT de son exposé très complet et soulignant les résultats extrêmement intéressants qui ont été obtenus par lui-même et par son équipe à E.D.F., remercie aussi cette équipe.

Ces résultats ont rendu un très grand service à tous les hydrauliciens, qui cherchent à prévoir les débits des rivières, soit en vue de leur utilisation, soit pour la protection des biens en cas de crue.

M. FRECHET suggère de publier pour les lois de HALPHEN, des tables abrégées donnant un petit nombre de valeurs de la variable, mais avec beaucoup de décimales et des instructions, appropriées à la loi elle-même, pour opérer l'interpolation.

M. MORLAT retient la suggestion de M. FRECHET et signale qu'il étudie actuellement des abaques qui paraissent plus commodes que les tables pour l'usage courant des ingénieurs.

M. FRECHET signale, d'autre part, que KARL PEARSON avait, comme HALPHEN, obtenu une catégorie de fonctions dont il a reconnu ensuite que c'étaient des fonctions d'Hermite, mais il ignore qu'il s'agit des mêmes fonctions d'Hermite.

M. MORLAT remarque qu'HALPHEN, n'ayant pas reconnu ces fonctions, les a étudiées et a ainsi trouvé plusieurs résultats nouveaux et intéressants.

M. FRECHET signale qu'il a obtenu, pour le logarithme du revenu, la densité de probabilité de ce logarithme étant un exponentielle dont l'exposante n'est pas x^2, mais la valeur absolue de la variable (x) une loi de probabilité admettant une tangente continue et dont **la partie** qui conduit à la plus grande valeur de la variable à partir de la médiane est précisément la loi de Paréto. Mais la loi de Paréto non tronquée ne s'applique pas à la répartition de **tous** les revenus, **des petits** aussi bien que des gros, parce qu'elle n'est pas unimodale.

Alors que le calcul des ordonnées des courbes de PEARSON est laborieux, M. RISSER signale par contre que les constantes dont elles dépendent ($K = \sqrt{\beta}$ et $K' = \beta_2$), (la première afférente à la dissymétrie et la deuxième à la forme de la courbe), s'obtiennent facilement lorsque les moments sont calculés, et suffisent à caractériser le type de courbe correspondant.

Et c'est à cela que doivent tendre les efforts de la statistique expérimentale : caractériser une distribution expérimentale par des nombres convenablement choisis de façon à pouvoir comparer des distributions analogues et chercher dans la différence des caractères numériques, l'explication des variations des caractères expérimentaux.

M. RISSER rappelle que les lois de HALPHEN constituent une extension naturelle de deux types de lois de PEARSON (à deux paramètres) et qu'elles proposent au statisticien, un outil d'une valeur au moins égale à celle des lois élaborées par K. PEARSON.

L'étude de l'équation différentielle $\frac{y'}{y}=\frac{P_1}{P_2}$, nous a incité à entreprendre celle des équations :

$$\frac{P_1}{P_3} \quad , \quad \frac{P_2}{P_3} \quad , \quad \frac{P_3}{P_4} \quad ,$$

où P_i est un polynome de degré i, en particulier l'examen de $\frac{y'}{y}$ conduit - grâce à un raisonnement simple - à mettre en lumière les trois types classiques de distribution (courbes en cloche, en U et monotones).

On peut dans l'espace à trois dimensions introduire $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$, et faire apparaitre une série de surfaces de distribution qui peuvent être considérées comme le prolongement à l'espace des courbes de K. PEARSON ; peut-être un tel processus pourrait je crois être appliqué aux beaux ensembles de E. HALPHEN.

M. RISSER pense que le prolongement à l'espace des courbes de HALPHEN analogue à celui préconisé ci-dessus, ferait apparaitre un développement analogue à celui d'EDGEWORTH.

M. GIRAULT voudrait que l'ajustement des lois de probabilité ne soit pas seulement déduit de la similitude de la courbe empirique avec celle de telle ou telle fonction mathématique ayant des tronçons d'allure semblable malgré des structures fondamentales différentes mais que cet ajustement soit basé sur les propriétés intrinsèques des phénomènes étudiés.

M. MORLAT pense qu'en hydrologie statistique, la recherche de justifications répondant aux préoccupations de M. GIRAULT implique l'étude du mécanisme de formation des débits, à partir de pluies. Il s'agit d'investigations d'un intérêt primordial, mais fort complexes et les résultats obtenus jusqu'ici sont encore très fragmentaires. Il faut indiquer cependant, que des travaux poursuivis durant quelques années par M. HALPHEN, puis par M. LE CAM, font espérer que des hypothèses relativement simples concernant la distribution des pluies et le mécanisme de l'écoulement, peuvent conduire pour les débits à des lois de probabilité très voisines des lois adoptées par HALPHEN.

M. le Président remarque que le fondement physique souhaité par M. GIRAULT peut exister pour certaines lois, par exemple la loi exponentielle ; on sait que c'est la loi de probabilité de la division d'une grandeur constante selon le phénomène physique du diamant brisé.

Mais en hydraulique, on n'a rien, et c'est justement là le drame. C'est pourquoi ces études de lois empiriques qui embrassent le mieux possible les phénomènes et les observations connus lui paraissent du plus haut intérêt.

M. le Président remercie à nouveau M. MORLAT de sa conférence extrêmement intéressante, qui, d'ailleurs, facilitera la compréhension ou l'audition des autres conférences.