Revue de statistique appliquée

E. Ventura

Correspondance. I. Remarques sur le calcul du taux de rentabilité dans l'étude de la gestion des stocks

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 4 (1955), p. 95-101
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_4_95_0>

CORRESPONDANCE

I. - REMARQUES SUR LE CALCUL DU TAUX DE RENTABILITÉ DANS L'ÉTUDE DE LA GESTION DES STOCKS

par

E. VENTURA

Ingénieur en Chef des Mines

Il semble que le calcul correct du taux de rentabilité doive s'effectuer différemment de celui indiqué par M. Hénon.

La valeur actuelle du bénéfice brut s'obtient en retranchant de la valeur actuelle des recettes la valeur actuelle des dépenses.

VALEUR ACTUELLE DES RECETTES V_0

Les ventes se faisant, par hypothèse, régulièrement dans le temps, entre t et t + dt, l'on vend $\frac{L}{\theta}$ .dt, dont la valeur actualisée en intérêts simples est

$$\frac{\pi L}{\theta} \cdot \frac{dt}{1 + it}$$

donc
$$V_0 = \int_0^\theta \frac{\pi L}{\theta} \frac{dt}{1 + it} = \frac{\pi L}{\theta i} \log (1 + i\theta) \;\#\; \pi L \left(1 - \frac{i\theta}{2}\right)$$

VALEUR ACTUELLE DE L'ACHAT A_0.

On peut supposer que l'on paye comptant la valeur du lot L et que, d'autre part, on paye immédiatement les primes d'assurance, le loyer, qui ne dépendent que de la dimension du lot L, du temps de séjour d'une série, ce qui majore dans la proportion a le prix d'achat p, a est donc indépendant par hypothèse du **rythme** d'écoulement du stock.

Donc :

$$A_0 = pL + \theta\, L .ap = pL(1 + a\,\theta)$$

VALEUR ACTUELLE DES FRAIS D'ENTRETIEN DU STOCK E_0.

On peut estimer qu'une partie des frais de magasinage est proportionnelle à la quantité de marchandises **restant** en stock. Il est logique de supposer d'après les notations de M. Hénon, que ces frais sont :

$(\beta - a)p$ par unité restant en magasin.

Les frais d'entretien correspondants sont

$$E_0 = \int_0^\theta (\beta - a)p . \frac{L - L\frac{t}{\theta}}{1 + it} dt = (\beta - a)pL \int_0^\theta \frac{1 - \frac{t}{\theta}}{1 + it} dt$$

$$= (\beta\theta - a\theta)pL \int_0^1 \frac{1 - u}{1 + i\theta u} du = pL(\beta - a)\left[\frac{(1 + i\theta)\log(1 + i\theta)}{i^2\theta} - \frac{1}{i}\right]$$

Il est utile de développer $\log(1+i\theta)$ en ne s'arrêtant **qu'au 3e terme** en i

$$\log(1+i\theta) = i\theta - \frac{i^2\theta^2}{2} + \frac{i^3\theta^3}{3} = i\theta\left[1 - \frac{i\theta}{2} + \frac{i^2\theta^2}{3}\right]$$

Le développement conduit à $\frac{\theta}{2} - \frac{i\theta^2}{6}$ pour le terme entre parenthèses.

En définitive, le bénéfice brut actualisé est par franc affecté à la gestion du stock, c'est-à-dire en divisant par pL :

$$B_0 = \left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right)\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right) - (1 + a\theta) - (\beta - a)\theta \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{i\theta}{6}\right]$$

En développant et en divisant par θ pour avoir le bénéfice par franc investi et par an. On obtient

$$k = \frac{\Delta p}{p}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{i}{2}\right) - \frac{\beta + a}{2} - \frac{i}{2}\left[1 - \frac{(\beta - a)\theta}{3}\right]$$

En négligeant $\frac{(\beta - a)\theta}{3}$ on trouve

$$k = \frac{\Delta p}{p}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{i}{2}\right) - \frac{\beta + a}{2} - \frac{i}{2}$$

La formule diffère de celle de M. Hénon si a est une fraction importante de et surtout à cause du terme soustractif $\frac{i}{2}$.

Dans l'exemple fourni par M. Hénon (p. 39) on trouve

$$k = 14,75\ \%$$

Si nous prenons a = o, on trouve ici k = 12,25 %

et, si nous prenons a = 4 %, on trouve k = 10,25 %

Valeurs qui diffèrent sensiblement de celles données par M. Hénon, et toujours **en moins**

RÉPONSE DE M. HENON

Les observations si intéressantes de M. Ventura me conduisent, à mon tour, à compléter ces notes par quelques commentaires qui, je crois, viendront préciser définitivement la solution de ce problème.

VALEUR ACTUELLE DES RECETTES V_0.

Pour de courtes périodes, en intérêts simples, il est préférable d'employer la formule des comptables : i - it au lieu de $\frac{1}{1 + it}$ pour calculer les valeurs actuelles. L'approximation est bien suffisante :

$$V_0 = \pi L \int_0^\theta (1 - it)\frac{dt}{\theta} = \pi L\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right)$$

VALEUR ACTUELLE DE L'ACHAT A_0

Très judicieusement, M. Ventura fait remarquer l'intérêt de distinguer deux catégories de frais : ceux proportionnels au stock restant et ceux proportionnels au **temps**, qui ne dépendent pas du rythme d'écoulement des stocks.

Dans ce cas, il part d'un coefficient de majoration a actualisé à l'époque zéro. Or, dans la pratique, on n'actualise pas chacun des paiements effectués au titre de ces frais : ils se trouvent répartis dans l'année, et la comptabilité ne donne que le taux moyen de ces frais F' rapporté au chiffre des achats pq. Soit ce taux :

$$\alpha = \frac{F'}{pq} \text{ ou } \frac{F'}{pL} \text{ (coefficient sans dimension)}$$

Les frais élémentaires par période élémentaire dt sont F'dt, leur valeur actuelle $\frac{F'dt}{1+it}$ à l'époque t et, en fin de période :

$$\int_0^\theta (1-it)\,F'dt = F'\theta \left(1 - \frac{i\theta}{2}\right)$$

d'où A_0

$$A_0 = pL\left[1 + \alpha\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right)\right]$$

Ici, α est un **paramètre connu**, tiré de la comptabilité, cette forme est donc préférable à celle proposée pour $A_0 = pL\left[1 + a\theta\right]$. (La relation entre a et α est donnée par l'égalité : $a\theta = \alpha\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right)$)

VALEUR ACTUELLE DES FRAIS D'ENTRETIEN DU STOCK E_0

Il s'agit des frais proportionnels au stock restant, c'est le cas où l'on stockerait ces marchandises aux magasins généraux, ou encore le cas de matières périssables telles que matières alimentaires ou produits biologiques qui exigeraient l'emploi de réfrigérateurs et de services de contrôle.

Appelons β le coefficient de frais spéciaux appliqué au stock restant. Ce coefficient sera notre **deuxième paramètre** tiré de la comptabilité. Les frais élémentaires, par période élémentaire, sont $s\beta dt$ en désignant par s le stock restant à l'instant t. La valeur actuelle de ces frais élémentaires est $s\beta(1-it)dt$. D'où, en remplaçant s par $pL\left(1 - \frac{t}{\theta}\right)$ la valeur actuelle E_0 des frais d'entretien :

$$(1) \qquad E_0 = \beta pL \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)(1 - it)dt = \beta pL\,\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{i\theta}{3}\right)$$

Le prix de revient en valeur actuelle des achats s'écrit donc finalement :

$$A_0 + E_0 = pL\left[1 + \alpha\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right) + \beta\,\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{i\theta}{3}\right)\right]$$

d'où la valeur de k, fonction des deux paramètres α et β propres à l'entreprise :

$$(2) \qquad k = \left(\frac{\Delta p}{p} - \alpha\right)\left(\frac{1}{\theta} - \frac{i}{2}\right) - \frac{i+\beta}{2}$$

Remarque 1

La valeur définitive des frais d'entretien est, par cycle, en désignant par F'' le montant annuel de ces frais inscrits en comptabilité :

$$F''\theta = \beta pL \int_0^\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)dt = \frac{\beta pL\theta}{2}$$

Si γ est le taux moyen de ces frais par rapport au chiffre des achats pq, on a :

$$\gamma = \frac{F''}{pq} = \frac{F''\theta}{pL} = \frac{\beta\theta}{2} \qquad (\beta \text{ a pour dimension } T^{-1})$$

Le montant total F des frais de gestion du stock se répartit donc en deux composantes :

soit $$F = F' + F''$$

ou encore $$\lambda pq = \alpha pq + \gamma\ pq$$

d'où $$\lambda = \alpha + \frac{\beta\theta}{2}$$

en désignant par λ le taux moyen de l'ensemble des frais.

La valeur $(\beta\text{-a})$ du taux utilisé dans le calcul par M. Ventura doit donc être remplacé par $\frac{2}{\theta}(\lambda - \alpha)$.

Exemple - Pour a = 0, avec $\beta = 0,1$, on a : $\alpha = 0$ et $\lambda = \alpha + \frac{\beta\theta}{2} = 0,025$ et l', on trouve bien k = 12,25

Par contre, pour a = 4 %, avec $\lambda = 0,025$, on tire α de la relation : $a\theta = \alpha(1 - \frac{i\theta}{2})$:

$$1 - \frac{i\theta}{2} = 0,9875 \qquad a\theta = 0,04\,\theta \qquad \text{d'où} \quad \alpha = 0,02027$$

La nouvelle valeur de β (qui était de 0,10, dans l'exemple du premier article) devient : $\frac{2}{\theta}(\lambda - \alpha) = 0,1 - 0,0811 = 0,0189$

d'où k

$$k = (0,1 - 0,02027)\ 1,975 - 0,03445 = 12,30\ \%$$

au lieu de 10,25

Remarque 2

Si $\alpha = o$, on doit retrouver l'expression du taux de rentabilité k qui figure à la page 32. Or, il manque le terme en $i/2$. Ceci provient de la manière de calculer la valeur actuelle des frais imputables à chacune des tranches élémentaires ds du stock. En effet, il est courant en comptabilité d'évaluer le prix de revient à l'époque de sortie t par : $(1 + \beta t)ds$ et d'en déduire la valeur actuelle à l'époque zéro : $(1 + \beta t)(1 - it)ds$ qui fait apparaître le terme principal en $(\beta - i)$:

$$(3) \qquad \text{valeur actuelle de ds} = \left[1 + (\beta - i)t - \beta it^2 \right] ds$$

Les observations de M. Ventura ont attiré mon attention sur ce mode de calcul classique à intérêts simples. En effet, en toute rigueur, il faut partir de la valeur élémentaire actuelle : $\frac{\beta d\ s\ d\tau}{i + i\ \tau}$ pour chaque élément du stock ds et chaque intervalle de temps $d\tau$. La première intégration suivant l'une des variables conduit aux équations :

$$(4) \qquad \beta(1 - i\tau)d\tau \int_0^s ds = \beta s(1 - i\tau)d\tau = \beta pL\left(1 - \frac{\tau}{\theta}\right)(1 - i\tau)\frac{d\tau}{\theta}$$

$$(5) \qquad \beta ds \int_0^t (1 - i\tau)d\tau = \beta t\left(1 - \frac{it}{2}\right) ds = \beta pL\left(1 - \frac{it}{2}\right)\frac{tdt}{\theta}$$

On peut vérifier que l'intégration de ces deux formes conduit au même résultat final.

La première forme (4) est utilisée pour calculer E_0.

La deuxième forme (5) permet d'écrire le prix de revient à l'époque de sortie t, de la valeur actuelle d'une tranche élémentaire ds, valeur égale à

$$\text{valeur actuelle de ds} = \left[1 + \beta t\left(1 - \frac{it}{2}\right) \right] ds$$

au lieu de l'équation (3) que j'avais utilisée initialement. C'est cette différence analytique qui entraîne sur l'expression de la rentabilité k la différence de $\frac{i}{2}$.

Pour conclure, il faut adopter la formule (2) avec ses deux paramètres au lieu de celle donnée à la page 32 de l'article précité.

Remarque 3

Pour l'emploi de l'abaque page 39, il suffira de prendre comme fonction $k + \frac{i + \beta}{2}$ au lieu de $k + \frac{\beta}{2}$ et de tenir compte du second paramètre en lisant sur le réseau des parallèles de la figure 5 les cotes graduées $\left(\frac{\Delta p}{p} - \alpha\right)$ au lieu de $\frac{\Delta p}{p}$.

Remarque 4

L'intervention de deux paramètres au lieu d'un seul, la substitution de $(i + \beta)$ au lieu de β conduit à donner à l'expression du lot optimum indiqué page 40, une expression plus précise et plus générale.

Si le bénéfice de l'opération de stockage est nul, le prix de sortie π est égal au prix de revient r, et sa valeur actuelle s'écrit :

$$rL\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right) = pL\left[1 + \alpha\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right) + \beta\,\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{i\theta}{2}\right)\right] \tag{6}$$

d'où, en remplaçant p par a + bx, l'expression finale de r :

$$r = (a + bx)\left[1 + \alpha + \frac{(i + \beta)x}{2q}\right] \tag{7}$$

qui est minimum pour

$$L = q\sqrt{\frac{2(1 + \alpha)}{q(i + \beta)} \cdot \frac{b}{a}} \tag{8}$$

(la racine carrée représente le temps d'écoulement optimum du lot L.)

II. - JOURNÉES D'ÉTUDES ET DE DISCUSSIONS DES ANCIENS STAGIAIRES DU CENTRE DE FORMATION DES CADRES

M. Hénon, Président de la Réunion "Textile" ayant été saisi par écrit de donner son avis sur certains points de l'exposé de M. Monfort, présenté par M. GRIGNET (Peltzer et Fils) nous publions ici sa réponse :

Je pense qu'avant de répondre aux cinq points sur lesquels M. Monfort a bien voulu attirer mon attention, je dois donner mon avis sur deux problèmes d'une grande importance pratique, problèmes qui surgissent dès qu'on organise une routine de contrôle de fabrication et qui sont les suivants :

- a) Celui du centrage initial du taux au début de la partie,
- b) Celui du décentrage en cours de fabrication soit par changement intempestif, soit par variation pseudo-périodique.

a) Centrage

Le centrage, ou plus précisément le domaine acceptable pour le numéro métrique d'une partie, est situé entre les limites de tolérances T_1 et T_2, distantes, d'après les contrats commerciaux, de 2,5% $\bar{N}$; $\bar{N}$ étant le standard imposé.

Considérons (fig. 1) l'intervalle $2\sigma = T_1M$ sur l'axe des numéros, il est évident que le risque α de refuser un bon réglage (celui dont le numéro serait préci-

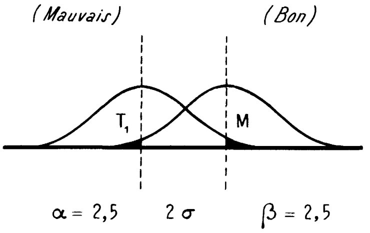

Fig. 1

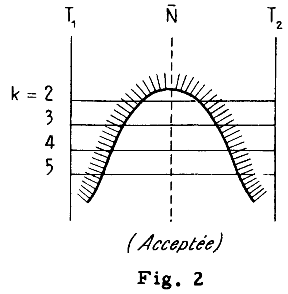

Fig. 2

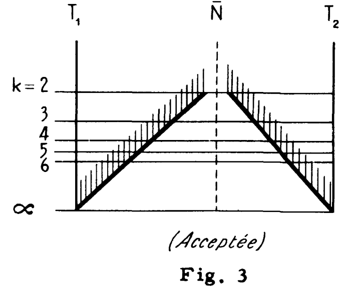

Fig. 3

sément au point M ou à sa droite) est au plus égal à 2,5 %, le risque β d'accepter un mauvais réglage (celui dont le numéro tomberait au point T_1 ou à sa gauche) est lui aussi au plus égal à 2,5 %. La distance du point M dépend du nombre d'échantillons et ce point (voir fig. 2) décrit dans le plan des numéros et du nombre k d'échantillons une courbe parabolique qui délimite une aire d'acceptation. En choisissant convenablement l'échelle de l'ordonnée k on obtient un graphique simple (fig. 3) avec des droites délimitant l'aire d'acceptation entre tolérances.

Avec un intervalle de tolérance $T_1 T_2$ de 5 % $\bar{N}$ et une variation de 2,5 % pour un changement de pignon on voit sur le graphique (4) que si la moyenne des k premiers échantillons tombe à gauche de la ligne AB il y a avantage à changer le pignon, ce qui provoque une translation à droite du point représentatif mesurée par $\frac{T_1 T_2}{2}$. En B la situation est différente, il en est de même le long de BC où les risques d'erreur sur le choix du pignon sont alors $\alpha = \beta = 0,50$.

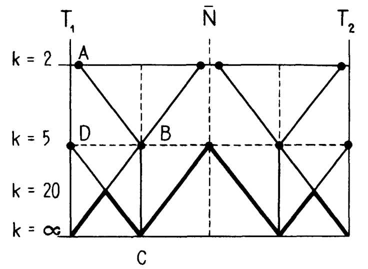

Fig. 4

On peut encore trouver des frontières plus significatives pour le choix de pignons avec des risques $\alpha = \beta = 0,025$ de se tromper en traçant des parallèles DC symétriques comme il est indiqué sur la figure. On détermine ainsi trois zones quasi-certaines qui correspondent à trois pignons successifs. Mais pour atteindre ces zones il faut augmenter le nombre k des échantillons.

Finalement, la méthode opératoire consistera à contrôler sur le graphique (5) le cheminement de la moyenne progressive en changeant de pignon s'il le faut.

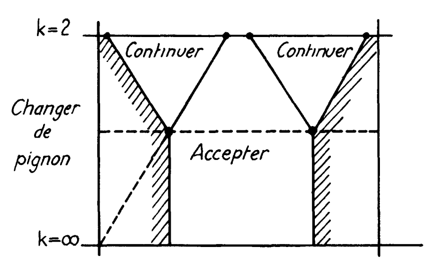

Fig. 5

Un tel graphique, facile à construire, devrait rendre de grands services ; il permettrait, ultérieurement, d'introduire un test séquentiel plus "efficace". Les figures ont été tracées sur la base d'un CV = 0,03. Elles montrent que l'emploi d'un échelonnement des pignons par sauts de l'ordre de 1 % serait probablement illusoire, sauf si l'on pouvait consentir à faire un grand nombre de prélèvements.

b) Décentrage

Dans le cas d'un changement intempestif, dès qu'un doute intervient on peut momentanément augmenter la cadence des prélèvements et utiliser la méthode ci-dessous :

On examine la séquence des résultats des λ dernières moyennes des numéros obtenus [N (5 x 100)] et l'on cherche la probabilité p d'obtenir cette séquence une fois sur 1.000. En d'autres termes, on cherche, à partir de la grande moyenne expérimentale $\bar{\bar{N}}$ (supposée bien réglée) un intervalle de contrôle $\frac{B_\lambda \sigma}{\sqrt{n}}$ des moyennes de n essais, tel que, pour ces λ points, on ait simultanément :

$$\text{Prob}\left[N(5 \times 10) \geqslant \bar{\bar{N}} + \frac{B_\lambda \sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0.001$$

Pour $\lambda = 1$, on sait que $B_1 = 3,09$. Pour $\lambda > 1$, la probabilité p est donnée par la relation

$$1.000 = \frac{1 - p^{\lambda}}{p^{\lambda}(1-p)}$$

d'où B_{λ} correspondant à la fonction inverse de Laplace-Gauss, on trouve ainsi :

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p =	0.001	0.0321	0.1037	0.1873	0.2672	0.3356	0.4010	0.4547	0.5013
B_{λ} =	3.09	1.85	1.26	0.89	0.62	0.42	0.25	0.11	0.00

Il suffit donc de superposer sur la carte de contrôle un calque comportant, tracées d'avance, les limites de contrôle indiquées sur le tableau précédent.

Par exemple, si 5 points consécutifs sont tous du même côté et dépassent la limite : $\frac{0,62\sigma}{\sqrt{n}}$ on peut en déduire que cet évènement aléatoire ne peut se produire qu'une fois sur mille et qu'il est significatif : la moyenne est décentrée. En particulier, à partir de 9 points, il n'y a plus de limite de contrôle, ceci veut dire que la moyenne est comprise entre les points extrêmes avec une probabilité de se tromper de 0,002.

Cette méthode a été indiquée par H. Weiler dans le journal de l'A.S.A. de Décembre 1953 et Juin 1954 (The Use of Run, to control the mean in quality Control, et : A new type of control chart limits for Mean, Ranges and sequential runs).

Il serait intéressant de considérer l'arrivée d'un décentrage intempestif comme un accident suivant une loi de Poisson, la variable étant proportionnelle aux durées de marche des machines. La moyenne journalière obtenue permettrait de calculer **le coût des risques** courus pour des intervalles de prélèvement fixés d'avance et de trouver un optimum économique. Il n'est pas certain que l'intervalle choisi de 8 heures soit le plus rationnel. Est-il trop court ou trop long ? Le calcul est à faire.

Le cas de variations pseudo-périodiques pourrait être mis en évidence par des méthodes classiques ; il appartient au domaine de la recherche et je ne le cite que pour mémoire.

Les réponses que je puis donner aux questions posées par Monsieur Monfort sont alors les suivantes :

1e Question : Réduction du contrôle par l'emploi d'une carte de contrôle de la moyenne seule

R : D'accord, cependant, à intervalles éloignés il faudrait vérifier que la dispersion reste inchangée ou est devenue meilleure.

De plus, la connaissance du CV réellement atteint par votre bonne organisation devrait être utilisée au lieu du CV professionnel 0,03 indiqué dans le texte. La signification des courbes d'efficacité se trouverait ainsi fort améliorée.

2e Question : Effet d'un changement de pignon interprété sur la courbe d'efficacité

R : D'accord sur l'interprétation indiquée mais celle-ci doit être complétée à mon avis par l'observation (a) relative au centrage et ma remarque à la 1ère question.

3e Question : Jugement sur double échantillon quand un résultat semble suspect

R : Deux échantillons successifs correspondent au cas de $\lambda = 2$ indiqué dans l'observation (b), relative au décentrage.

4e Question : Quelle est la valeur du décentrage

R : Il faut refaire le test du centrage pour le savoir.

5e Question : Centrage initial du taux

J'ai répondu sur ce point.