REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. DARU

Nombre de machines automatiques à confier à un ouvrier en vue d'atteindre le prix de revient industriel minimum

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 3 (1955), p. 103-108
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_3_103_0>

NOMBRE DE MACHINES AUTOMATIQUES A CONFIER A UN OUVRIER EN VUE D'ATTEINDRE LE PRIX DE REVIENT INDUSTRIEL MINIMUM

par

E. DARU

Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique

Ce problème a déjà été traité par M. Hénon (Revue de Statistique, *vol. III, n° 1,* 1955)*; mais on peut l'aborder d'une autre manière, sans ôter au processus son caractère de continuité, et mener les calculs en faisant une seule hypothèse simplificatrice.*

Le but de la présente étude est d'exposer ces calculs, de montrer où gît la difficulté de les conduire si l'on ne fait pas cette hypothèse, puis d'indiquer sommairement un procédé de calcul purement numérique, permettant d'atteindre le résultat cherché tout en se passant de l'hypothèse simplificatrice.

Rappelons brièvement les données du problème : les machines automatiques nécessitent l'intervention de l'ouvrier seulement pour les dépannages ; si l'ouvrier n'a qu'une machine à conduire, il ne fait rien pendant qu'elle marche et son rendement personnel est faible.

Si on lui en confie plusieurs, son rendement augmente, mais il arrivera que plusieurs machines seront arrêtées pendant qu'il en répare une autre ; c'est alors le rendement des machines qui diminue (d'autant plus qu'elles sont plus nombreuses), ou leur coefficient d'utilisation, selon le terme employé par M. HENON.

S'il y a gain du côté de l'ouvrier, il y a perte du côté des machines.

Appelons r le coefficient d'utilisation de chaque machine lorsqu'on en confie m à l'ouvrier ; S le salaire horaire de l'ouvrier, M le coût horaire de chaque machine(intérêt du capital engagé, amortissement, entretien ...) ; Le prix de revient industriel varie, comme le rapport : $\frac{S + m\,M}{m\,r_m}$

Il est minimum pour une certaine valeur de m que l'on pourra facilement déterminer si l'on sait calculer r_m.

*

* *

Considérons maintenant la fonction aléatoire $X_{(t)}$ ou X représente le nombre de machines en marche à l'instant t ; on définira m r_m comme la limite de l'intégrale :

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt \qquad \text{lorsque } T \to \infty$$

On sait que lorsqu'un processus est ergodique (même au sens large) cette limite est la même que celle de $E\left[\,X(t)\,\right]$ (plus exactement, c'est l'égalité de ces deux limites qui est la définition de l'ergodisme).

Dans le cas présent, le fait est suffisamment intuitif pour se passer de démonstration.

Au cours du processus, l'axe des temps est jalonné par deux sortes d'évènements les uns sont les arrêts des machines, les autres leurs remises en marche après l'intervention de l'ouvrier ; à chacun de ces évènements correspond pour $X(t)$ un saut brusque d'une unité en moins (cas d'un arrêt) ou en plus (cas d'une remise en marche). Le diagramme représentant $X(t)$ a donc l'allure d'un escalier, chaque évènement étant l'occasion d'une discontinuité.

Toutefois le processus est continu en probabilité, car la probabilité que $X(t + dt) - X(t) > \varepsilon$ où ε est une quantité aussi petite que l'on veut, est presque sûrement nulle du fait que les évènements (arrêts et fins de réparations) forment une suite discrète.

Supposons maintenant qu'une suite de chronométrages nous ait fourni un échantillon de durées de marche (depuis une remise en marche jusqu'à la panne suivante) et un échantillon de durées de réparations, auxquels nous avons ajusté une loi $F_{(t)}$ de moyenne φ pour les durées de marche ($\varphi = \int_0^\infty t\, F'_{(t)}\, dt$) et une loi $G_{(t)}$ de durées de réparation de moyenne θ.

Nous ferons l'hypothèse simplificatrice selon laquelle ces lois sont les exponentielles.

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\varphi}}$$

$$G(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$$

ce qui implique (1) que la loi de distribution du nombre n de réparations effectuées au cours d'une durée T est une loi de Poisson.

$$P(N < n) = e^{-\frac{t}{\varphi}} \left(\frac{t}{\varphi}\right)^n \frac{1}{n!}$$

et la réciproque est vraie.

Cette remarque nous a aidé à observer l'analogie que présente le problème qui nous occupe, avec celui qui concerne le calcul d'un central téléphonique automatique qui, aux heures de pointe, reçoit par unité de temps une moyenne de a appels et dont on suppose que le nombre des appels suit une loi de Poissson (2).

$$P(N < n) = e^{-at} \frac{(a\,t)^n}{n!}$$

et par suite que les intervalles entre deux appels consécurifs obéissent à la loi :

$$P(T < t) = F(t) = 1 - e^{-at}$$

(1) Voir sur ce sujet Blanc, Lapierre et Fortet "Théorie des fonctions aléatoires (Masson éditeur) au chapitre des processus poissonniens.

(2) Voir à ce sujet Fortet "Calcul des probabilités" CNRS 1950, formules d'Erlang. Nous nous sommes largement inspiré de cet ouvrage en raison de l'analogie des processus.

Moyennant cette hypothèse, le processus est stationnaire ; les probabilités pour qu'il y ait i machines en marche à un instant quelconque sont des constantes P_i et naturellement :

$$E\left[X(t)\right] = P_1 + 2\,P_2 + \dots + i\,P_i + \dots\, m\,P_m$$

est aussi une constante.

Le calcul des P est alors facile ; calculons d'abord la probabilité conditionnelle pour qu'une machine qui marche depuis une durée τ, à l'instant t, tombe en panne au cours de l'intervalle de temps infiniment petit dt qui suit. La probabilité à priori d'une panne au cours de cet intervalle est F'_τ dt. La probabilité que la machine ait une durée de marche au moins égale à τ est $1 - F_\tau$. Donc, la probabilité conditionnelle cherchée est :

$$\frac{F'_\tau\, dt}{1 - F_\tau}$$

et, dans l'hypothèse ou nous nous sommes placés, elle est : $\frac{dt}{\varphi}$.

De même la probabilité conditionnelle pour qu'une réparation en cours, à l'instant t s'achève dans l'intervalle dt suivant est $\frac{dt}{\theta}$. On voit que ces probabilités sont indépendantes des durées acquises à l'instant t par la marche de la machine (ou la réparation).

Ceci posé, pour qu'il y ait i machines en marche à l'instant t, il faut qu'à l'instant t - dt soit réalisée l'une des trois hypothèses suivantes (qui épuisent la totalité des cas possibles) et P_i sera la somme de leurs probabilités respectives.

1° - Il y avait en t - dt, i machines en marche ; aucune d'elles n'est tombée en panne dans l'intervalle dt qui a suivi, et celle qui était en cours de réparation n'a pas été remise en marche ; la probabilité de cette hypothèse est une probabilité composée ; c'est :

$$P_i\left(1 - \frac{i\,dt}{\varphi} - \frac{dt}{\theta}\right)$$

2° - Il y avait i - 1 machines en marche en t - dt et la machine en cours de réparation a été remise en marche au cours de l'intervalle de temps dt suivant :

$$P_{i-1} \times \frac{dt}{\theta}$$

3° - Il y avait i + 1 machines en marche en t - dt et l'une d'elles est tombée en panne :

$$P_{i+1}\,\frac{(i+1)}{\varphi}dt$$

d'où :

$$P_i = P_i\left(1 - \frac{i\,dt}{\varphi} - \frac{dt}{\theta}\right) + P_{i-1}\frac{dt}{\theta} + P_{i+1}\frac{(i+1)}{\varphi}dt$$

ou

$$P_i\left(\frac{i}{\varphi} + \frac{1}{\theta}\right) = \frac{P_{i-1}}{\theta} + \frac{i+1}{\varphi}P_{i+1}$$

Nous aurons ainsi un système de m équations dont la première s'écrit :

$$\frac{P_0}{\theta} = \frac{P_1}{\varphi}$$

auxquelles s'ajoute en vertu de l'axiome des probabilités totales, la suivante :

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_i + \dots + P_m = 1$$

On en tire facilement, par récurrence :

$$P_i = P_0 \frac{\alpha^i}{i!} \qquad \text{(en posant } \frac{\varphi}{\theta} = \alpha\text{)}$$

puis

$$P_0 = \frac{1}{1 + \alpha + \dots + \frac{\alpha^i}{i!} + \dots + \frac{\alpha^m}{m!}}$$

et enfin :

$$m\, r_m = E\left[\, X(t) \,\right] = \alpha \frac{1 + \alpha + \dots + \frac{\alpha^i}{i!} + \dots + \frac{\alpha^{m-1}}{(m-1)!}}{1 + \alpha + \dots + \frac{\alpha^i}{i!} + \dots + \frac{\alpha^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\alpha^m}{m!}}$$

expression dont le calcul ne présente pas de difficulté.

Remarquons que lorsqu'on fait croitre m indéfiniment, le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers la même limite e^{α}.

$m\, r_m$ tend donc vers α, ce qui recoupe le résultat trouvé par M. HENON ; les expressions donnant le coefficient d'utilisation ne sont pas les mêmes de part et d'autre, mais convergent vers la même limite quand $m \longrightarrow \infty$.

On peut en toute rigueur étendre le résultat du calcul précédent au cas où les durées de marche obéissent à une loi quelconque.

Mais il faut observer que dans ce cas l'état du système n'est plus entièrement défini par le seul nombre des machines en marche, mais encore par les durées de marche τ_1 , τ_2 , ... τ_3 ... acquises par chaque machine à l'instant considéré. La probabilité qu'il y ait, à l'instant t, i machines en marche dépend de ces durées $\tau_1 \dots \tau_i$; c'est une probabilité instantanée.

$$p_i\, (\tau_1\, \tau_2 \dots \tau_i)\, d\tau_i\, d\tau_2 \dots d\tau_i$$

où P_i est une fonction symétrique par rapport à ces i variables ; donc on doit avoir

$$\frac{1}{i\,!} \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \dots \int_0^{\infty} p_i\, d\tau_i = P_i \tag{1}$$

P_i représente ainsi la somme de tous les cas possibles ou X (t) = i au cours d'une durée infinie (le facteur $\frac{1}{i\,!}$ intervient du fait que p est symétrique par rapport aux τ_k et que l'on peut permuter par conséquent ses variables sans changer la valeur de p).

On devra avoir $p_0 = P_0$ et $\sum_0^m P_i = 1$.

Avant de reprendre le raisonnement précédent pour le calcul des P notons qu'il n'y a plus que deux hypothèses à considérer pour obtenir, à l'instant t, i machines en marche depuis des durées déterminées τ_1, τ_2 ... τ_i ; le cas où à l'instant t - dt il y avait i machines en marche depuis des durées respectives τ_1 - dt τ_2 - dt, ... τ_i - dt et où aucun évènement ne s'est produit au cours de l'intervalle suivant dt ; et le cas où il y avait i + 1 machines en marche en t - dt, depuis des durées respectives τ_1 - dt .... τ_i - dt et une i + 1 ième en marche depuis une durée τ quelconque, et qui est tombée en panne au cours de la durée dt qui a suivi.

Il n'y a pas lieu en effet de considérer le cas de i - 1 machines en marche et de la réparation intervenant entre t - dt et t puisque, dans ce cas, la durée acquise par la machine réparée, à l'instant t, serait infiniment petite, donc à priori différente des τ_1 , τ_2 .... τ_i.

On écrira donc :

$$p_i = (p_i - d\,p_i)\left(1 - \frac{dt}{\theta} - \sum_1^i \frac{F'_{\tau_k}}{1 - F_{\tau_k}}\,dt\right) + \int_0^\infty p_{i+1}\,\frac{F'_\tau}{1 - F_\tau}\,d\tau \qquad (2)$$

où l'intégrale prend en compte tous les cas possibles relatifs à la durée de marche acquise, τ , de la machine qui tombe en panne.

Nous allons montrer que la solution est donnée par :

$$p_i = \frac{i\,!\,P_i}{\varphi_i}\left[1 - F_{\tau_1}\right]\left[1 - F_{\tau_2}\right]\,\ldots\ldots\left[1 - F_{\tau_i}\right]$$

1° - Intégrons d'abord $\int_0^\infty \left[1 - F_\tau\right] d\tau$

on a d'abord :

$$\int_0^\infty \left[1 - F_\tau\right] d\tau = \left|\tau\left[1 - F_\tau\right]\right|_0^\infty + \int_0^\infty \tau\,F'_\tau\,d\tau$$

en intégrant par parties.

Le premier terme du second membre est nul car pour une valeur τ_0 quelconque on a :

$$\tau_0\left[1 - F_{\tau_0}\right] = \tau_0\int_{\tau_0}^\infty F'_\tau\,dt \leqslant \int_{\tau_0}^\infty \tau\,F'_\tau\,d\tau$$

et la dernière intégrale s'annule pour τ_0 infini.

La quantité $\tau_0(1 - F_\tau)$ s'annule donc aussi bien pour τ infini que pour $\tau = 0$ et l'on a :

$$\int_0^\infty (1 - F_\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \tau\,F'_\tau\,d\tau = \varphi$$

Par conséquent, en intégrant successivement par rapport à tous les τ_k on trouve que :

$$\frac{1}{i\,!}\int_0^\infty d\tau_1\int_0^\infty d\tau_2\,\ldots\ldots\int_0^\infty \frac{i\,!}{\varphi^i}\,P_i\,(1 - F_{\tau_1})\,\ldots\ldots\,(1 - F_{\tau_i})\,d\tau_i = P_i$$

qui vérifie l'équation (1).

2° - La différentielle totale dp_i est :

$$d\,p_i = -\,p_i\sum_1^i \frac{F'_{\tau_k}}{1 - F_{\tau_k}}\,d\tau$$

et en portant cette valeur dans l'équation (2) où les termes $d\,p_i$ et $p_i\sum_1^i \frac{F'_{\tau_k}}{1 - F_{\tau_k}}$ disparaissent ; il reste :

$$p_i\,\frac{dt}{\theta} = \int_0^\infty p_{i+1}\,\frac{F'_\tau}{1 - F_\tau}\,d\tau$$

qui se réduit à :

$$\frac{i\,!\,P_i}{\theta\,\varphi^i} = \frac{(i+1)\,!}{\varphi^{i+1}}\,P_{i+1} \qquad \text{ou} \qquad P_i = (i+1)\,P_{i+1}\,\frac{\theta}{\varphi}\,.$$

ce qui donne comme précédemment :

$$P_i = \frac{\alpha^i}{i\,!}\,P_0$$

avec $P_0 + P_1 + \ldots + P_m = 1$.

Il résulte de là que la seule hypothèse simplificatrice nécessaire pour aboutir à ce résultat consiste à admettre que la loi G (t) des durées de répartition est une exponentielle.

Il parait malheureusement très difficile de conduire les calculs en s'affranchissant de cette hypothèse. En effet, si la loi G (t) des durées de réparations est quelconque, l'état du système est défini seulement lorsqu'on se donne, outre le nombre des machines en marche et leurs durées acquises à l'instant considéré, la durée t' acquise au même instant par la réparation en cours.

Les durées de marche τ_k acquises à l'instant t ne sont pas indépendantes des durées t_1, t_2 ... des réparations précédentes.

Les densités de probabilités p_i contiennent donc la variable t' sous une forme qui dépend de celle de la loi G (t') de la durée de réparation et qui varie selon l'indice i indiquant le nombre de machines en marche.

Nous ne croyons pas que ce problème ait été éclairci. Il est certainement difficile, car il faut écarter une solution simple du type :

$$p_i = A_i (1 - F_{\tau_1}) (1 - F_{\tau_2}) \dots (1 - F_{\tau_i}) H_{i(t')}$$

qui ne convient qu'à des variables indépendantes.

Il n'est pas facile non plus de discuter l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur l'expression de lim E $[X_{(t)}]$ lorsqu'on suppose que G (t) est une exponentielle de même moyenne que la loi réelle.

*
* *

Mais on peut appliquer, à tout problème concret, une solution statistique très simple.

Supposons en effet que nous disposions de deux gros échantillons de durées de marche et de durées de dépannage, obtenus par chronométrage, quel que soit le nombre de machines affectées à l'ouvrier dans l'usine considérée.

Il est clair que l'on peut en tirer une sorte de film de $X_{(t)}$ (un graphique dans le temps) pour les cas les plus variés du nombre m de machines en se donnant une situation quelconque à l'origine par exemple pour t = 0, m machines en marche depuis des durées réelles : en tirant au hasard les durées de marche et les durées de pannes, on pourra de proche en proche calculer à tout moment le nombre X_t et l'intégrale $\frac{1}{T}\int_0^T X \, dt$, en arrêtant le calcul lorsqu'on aura épuisé toutes les durées de dépannages.

Le chiffre obtenu sera une estimation de la valeur m r_m cherchée.

Nous ne savons rien, évidemment, de la loi de probabilité de la variable aléatoire ainsi trouvée, mais on aura une idée de la dispersion en procédant à plusieurs calculs de même nature.

Notons encore que, pour éviter des tâtonnements trop longs, on pourra calculer une valeur approximative de m en recourant aux formules données plus haut pour le cas où G (t) est une exponentielle ...

La solution statistique indiquée ci-dessus devra tenir compte du fait qu'en variant le nombre des machines confiées à un ouvrier, on modifie quelque peu la loi de durée des dépannages, ceux-ci étant la somme de la durée nécessaire pour atteindre la machine à dépanner et de la durée proprement dite du dépannage; quand on augmente le nombre des machines, on augmente aussi le temps nécessaire à l'ouvrier pour se rendre auprès de la machine à dépanner.

En attendant qu'une solution mathématique rigoureuse soit donnée au problème théorique posé, il semble bien qu'on puisse obtenir de bons résultats par la méthode indiquée.