

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. COUFFIGNAL

M. A. LENOUEL

Sur le lissage des suites de points

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 1 (1955), p. 91-100

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_1_91_0

© Société française de statistique, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE LISSAGE DES SUITES DE POINTS⁽¹⁾

par

L. COUFFIGNAL

*Directeur du Laboratoire de Calcul Mécanique
de l'Institut Blaise Pascal*

et

M. A. LENOUEL

*Assistante au Laboratoire de Calcul Mécanique
de l'Institut Blaise Pascal*

Les mesures constituent rarement une fin en elles-mêmes : elles sont, le plus souvent, le point de départ d'une élaboration, soit arithmétique (bilans, statistiques, etc.), soit physique (étude d'un phénomène). Dans ces derniers cas, elles fournissent le plus souvent les coordonnées des points d'un graphique.

Le problème du lissage des suites de points prend place à cette étape : problème dont une solution correcte est fondamentale pour permettre une interprétation valable des mesures faites.

La revue « Mesures » (2) a bien voulu nous autoriser à publier l'étude de M. Couffignal et de Mlle Lenouvel, qui montre la nécessité d'une étude expérimentale objective d'un problème que les méthodes analytiques, trop rigides, ne permettent pas toujours de résoudre de manière satisfaisante.

L'observation d'un phénomène physique se traduit généralement par des points d'un graphique représentant chacun un état du phénomène. Ces points se présentent soit isolés, soit groupés en un tracé continu, tel le tracé donné par un appareil de mesure enregistreur. Le lissage de ces points est l'opération par laquelle on leur substitue une courbe continue sauf peut être en un petit nombre points, appelée **courbe de lissage**. Il est facilement convenu que la courbe de lissage ainsi tracée constitue la représentation la moins inexacte possible du phénomène (nous dirons, comme d'usage, la représentation la meilleure).

Physiciens et ingénieurs ont l'habitude de tracer à main levée des courbes de lissage. Des règles mathématiques ont également été données ; elles conduisent à des calculs souvent longs et fastidieux et nombre d'hommes de science estiment qu'elles ne donnent pas des courbes de lissage meilleures que le tracé à main levée d'un expérimentateur exercé.

Ces remarques nous ont conduit à entreprendre une étude méthodique du lissage. Nous en présentons aujourd'hui les premiers résultats.

II

Nous avons retenu de la littérature les méthodes suivantes, qui paraissent usuelles ou praticables :

1. Communication faite au VIII^e Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée. - Istanbul. août 1952.

2. "Mesures et Contrôle industrielle" Paris, Octobre 1953.

1 - Régularisation des différences

Méthode de Whittaker (1)

A cette idée générale se rattachent les méthodes ci-après :

On remplace (fig.1) le point (x_i, y_i) par le point (x_i, Y_i) , l'ordonnée Y_i étant définie par :

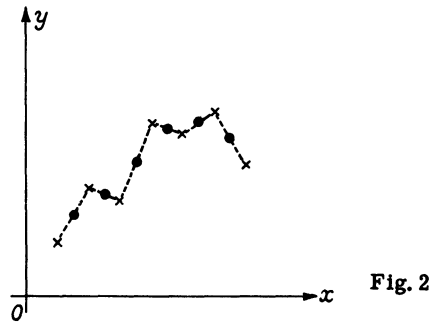
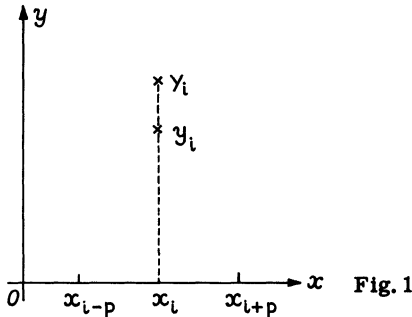
$$Y_i = \sum_{j=-p}^{j=+p} k_{i+j} y_{i+j} ,$$

et les coefficients k , par la condition que la somme des carrés des différences d'ordre n relatives aux points donnés, $\sum \delta_n^2$ soit dans un rapport donné L avec la somme des carrés des différences d'ordre n relatives aux points de la courbe de lissage, $\sum \Delta_n^2$

$$\frac{\sum \delta_n^2}{\sum \Delta_n^2} = (L : \text{nombre donné})$$

Méthode de M. Blet (2) :

On remplace (fig. 2) deux points consécutifs par le milieu du segment de droite qui les joint, et l'on répète un certain nombre de fois, N , cette opération.



Méthode de M. Vernotte (3) :

On impose aux différences d'ordre n correspondant à un même arc monotone de la courbe d'être toutes du même signe.

2 - Moindres carrés

L'application de la théorie des moindres carrés a conduit aux applications ci-après :

Polynômes de Tchebychef (4) :

On remplace le nuage de points (x_i, y_i) par un polynome $y = p_m(x)$ de degré m tel que la somme des carrés des écarts pour les valeurs x_i de la variable soit minimum, les polynômes étant orthogonaux, pour permettre le passage plus aisé du degré n au degré $n + 1$:

$$\sum [y_i - p_m(x_i)]^2 \text{ est minimum}$$

Méthode de N. Wiener (5) :

Si $f(x)$ est une fonction passant par les points connus, d'abscisses nh ($n = 0, 1, 2, \dots, M$), on prend pour fonction de lissage :

$$F(x) = \sum_{n=0}^M A_n f(x - nh)$$

les A_n étant solutions du système d'équations linéaires :

$$\sum_{n=0}^M A_n R_b(k - n) = R_{ba}(k), \quad (k = 0, 1, \dots, M)$$

où R_b désigne une fonction d'autocorrélation de $f(x)$, et $R_{ba}(k)$ la fonction de corrélation mutuelle de $f(x)$ et de la fonction $g(x)$ qui représente le phénomène de façon théoriquement exacte.

3 - Analyse harmonique

Nous proposons la méthode suivante :

Considérant les points donnés comme appartenant à une courbe périodique, on détermine les périodes des composantes, et l'on considère comme composantes de l'erreur de mesure celles dont la synthèse donne une courbe d'ordonnée maxima η_m négligeable par rapport à l'amplitude maxima y_m de la courbe donnée par la synthèse des autres composantes, cette synthèse constituant la courbe de lissage

$$\frac{\eta_m}{y_m} < \rho, \quad (\rho \text{ petit})$$

III

Malgré la forme mathématique qu'elles revêtent ces méthodes contiennent toutes un élément arbitraire, qui donne lieu à un choix intuitif de la part du physicien ou du calculateur. Cet élément arbitraire est :

dans la méthode de Whittaker, le nombre L ,

dans la méthode de M. Blet, le nombre N de répétitions de l'opération.

dans la méthode de M. Vernotte ; l'ordre n des différences considérées,

pour les polynômes de Tchebycheff, le degré m de ces polynômes,

dans la méthode de M. Wiener, la fonction de corrélation mutuelle $R_{ba}(x)$

dans la méthode d'analyse harmonique, le nombre ρ ;

Nous n'avons trouvé dans la littérature aucune règle pour choisir ces éléments arbitraires de manière que le lissage d'une suite de points donnés soit « satisfaisant »

IV

Une première notion paraît donc devoir être précisée : celle d'un **bon lissage** d'une suite de points.

Or, si l'on a recherché des règles de détermination mathématique d'une courbe de lissage, c'est surtout pour éviter le tracé à main levée de cette courbe, et à dire vrai, pour se persuader et persuader autrui que la courbe déterminée par des calculs écarte la critique d'arbitraire et de subjectivité inévitablement faite à une courbe à main levée et, par suite, représente mieux les phénomènes observés. Mais nous venons de constater que **toutes** ces méthodes contiennent un élément arbitraire, qui, dans la pratique, est choisi subjectivement lui aussi. Les méthodes mathématiques de lissage apparaissent donc comme des procédés qui remplacent les courbes à main levée par des courbes calculées mais qui n'ont pas eux-mêmes aucune supériorité sur le tracé à main levée. Le choix d'une courbe de lissage est un acte de jugement personnel, aussi mal rattaché par un raisonnement déductif aux mesures effectuées dans le cas où ce choix porte sur une méthode mathématique de lissage que lorsqu'il porte sur une courbe tracée à la main.

En outre, la plupart des méthodes mathématiques de lissage se bornent à remplacer un point observé par un point calculé, de même abscisse. Elles ne donnent ni une fonction analytique, ni un tracé continu. Or le rôle d'une courbe

de lissage est de servir l'interpolation ou même à l'extrapolation, ainsi qu'à des opérations mathématiques : dérivation, intégration, etc. On devra donc faire, après un lissage mathématique effectué par l'une de ces méthodes une opération mathématique ou graphique équivalente au tracé à main levée d'une courbe **continue** passant par les points lissés. En d'autres termes **à l'exception de la méthode de TCHEBYCHEF et de celle de l'analyse harmonique, le lissage mathématique ne dispense pas du tracé à main levée.**

Une étude expérimentale du lissage à main levée est donc justifiée.

V

Nous avons procédé comme suit :

Une liasse de 14 suites de points représentant toutes des mesures expérimentales véritables a été remise à 17 sujets appartenant aux laboratoires de calcul de l'**Office National d'Études et Recherches Aéronautiques** ou de l'**Institut de Calcul Blaise Pascal**. Il leur était demandé de tracer à main levée la courbe qui leur paraissait la meilleure courbe de lissage de ces suites de points. Dans le but de comparer le sens intuitif du lissage de chacun des sujets, aucune indication n'était donnée sur la nature du phénomène physique.

Les mesures se rapportaient à des phénomènes très divers : caractéristiques d'éléments électroniques, propriétés mécaniques du caoutchouc, relevés de distances mesurées par un radar, mesures de l'ordre de la psychotechnique.

Nous avons ainsi repris avec plus d'ampleur l'expérience déjà faite par M. Blet (2)

VI

Le dépouillement des courbes obtenues confirme d'abord une observation de M. Blet : les sujets qui n'ont pas été exercés au lissage de courbes expérimentales comprennent mal le problème posé : leurs tracés passent par tous les points donnés ou presque, soit en ligne brisée, soit en ligne très sinueuse.

Il semble que l'on doive conclure qu'**il n'existe pas d'intuition du lissage : savoir bien lisser une courbe est un résultat d'apprentissage** - ce mot étant pris au sens de la psychophysiologie.

Cette constatation, si elle se confirme pleinement, conduit à chercher quelles sont les meilleures méthodes pour cet apprentissage et à introduire dans l'enseignement des sciences expérimentales et des techniques des exercices de lissage.

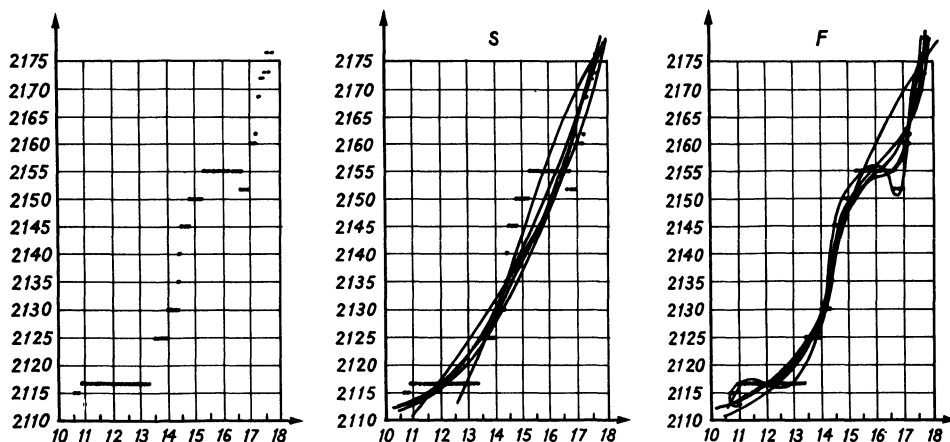


Fig. 3

VII.

Les courbes de lissage tracées par les autres sujets se divisent nettement en deux groupes dont la figure 3 montre un exemple caractéristique.

Un groupe de courbes, S, paraît dénoter au souci de **simplicité** de tracé ; un autre groupe, F, le souci d'approcher le plus possible le plus grand nombre de points de courbe ; c'est en quelque sorte un souci de **fidélité**.

Onze suites de points, parmiles suites proposées, prêtaient indifféremment à un lissage du type simple (type S), ou à un lissage du type fidèle (type F), selon l'intuition du sujet. Pour chacune de ces onze suites, les courbes de lissage se répartissent en deux groupes, l'un du type S, l'autre du type F.

En outre, dans l'ensemble, **ce sont les mêmes sujets qui ont proposé des courbes du type S, et les mêmes sujets qui ont proposé des courbes du type F.** Statistiquement :

Sur 14 sujets :

5 ont tracé 7 courbes sur 11, ou plus, du type F,
2 ont tracé 7 courbes sur 11, ou plus, du type S,
3 ont tracé 6 courbes F, 4 courbes S et une courbe de type imprécis.
2 ont tracé 6 courbes S, 4 courbes F et une courbe de type imprécis.
2 ont tracé un nombre égal de courbes F, S et de type imprécis.

Préférer la simplicité ou la fidélité apparaît donc comme un trait de caractère du sujet.

C'est ce résultat que met en évidence la répétition de l'expérience de M. Blet sur un nombre assez élevé de courbes.

VIII

La similitude constatée par M. Blet entre les courbes de lissage calculées par la méthode de Whittaker ou la méthode géométrique qu'il à lui-même élaborée et les courbes de lissage tracées à main levée, si on la rapproche de la disproportion énorme entre le temps et la peine dépensés dans le premier cas (quelques jours ou quelques heures) et dans le second (quelques minutes seulement) conduirait à dénier tout intérêt pratique aux procédés mathématiques de lissage.

Objectivement, on devrait conclure, semble-t-il, que, tout au moins, **l'arbitraire que comporte le choix des paramètres d'une méthode mathématique de lissage est du même ordre et de même effet que l'arbitraire d'un tracé à la main.**

On doit reconnaître, toutefois, que, pour donner à ce jugement la valeur d'une règle d'origine expérimentale, les essais comparatifs tels que celui de M. Blet devraient être multipliés.

XI

Le but véritable du lissage étant la **détermination d'une courbe continue**, nous avons mis à l'épreuve la méthode des polynomes de Tchebychef sur un certain nombre de suites de points (3).

La méthode de Tchebychef, comme on le sait, est longue, Même en utilisant une réduction canonique des abscisses mesurées à des valeurs entières, la durée du calcul s'évalue en journées de travail.

Les résultats sont très inégaux. La figure 4 montre deux suites de points qui semblent analogues, et les lissages de ces suites de points par un poly-

3. L'idée d'utiliser l'analyse harmonique, de préférence, vraisemblablement, selon la méthode d'H. et Y. Labrousse, s'est fait jour trop tard pour que nous ayons des résultats comparatifs. Les premières applications en sont encourageantes.

nôme de Tchebychef du 5° degré. La courbe de gauche est très fidèle, celle de droite inacceptable.

La figure 5 montre le résultat d'une tentative de représentation d'une table de mortalité par un polynôme de Tchebychef. Les courbes p_4 , p_5 , p_6 , repré-

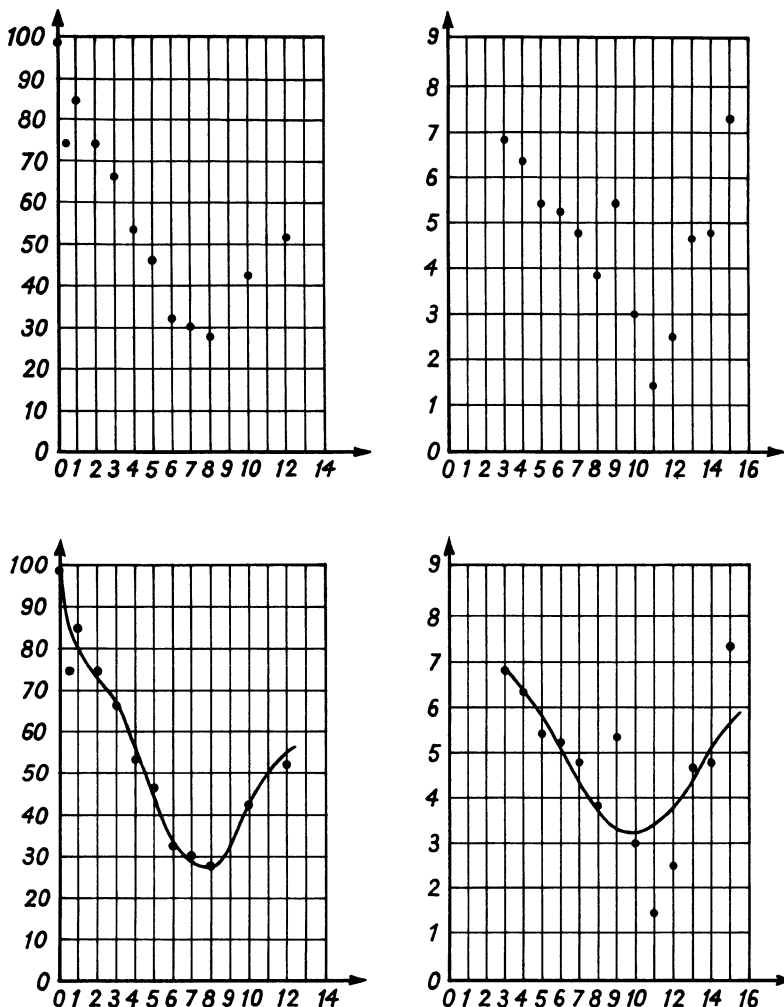


Fig. 4

sentent les polynômes de degrés 4, 5, 6. On voit qu'il faut dépasser le 7° degré pour atteindre une représentation acceptable ; l'appareil mathématique de cette représentation devient d'un maniement difficile.

X

On voit apparaitre, dans ces appréciations un jugement de valeur, d'ordre subjectif.

Nous voudrions insister à cette occasion sur une remarque dont l'importance ne paraît pas avoir été suffisamment mise en évidence et qui semble même avoir échappé aux auteurs de méthodes mathématiques de lissage : c'est que **la donnée des seuls points expérimentaux ne suffit pas à déterminer, ni mathématiquement, ni à main levée, une courbe de lissage objectivement satisfaisante.**

XI

Dans cet apprentissage du lissage, dont l'utilité, sinon la nécessité, nous est apparue, la connaissance de la nature et des lois du phénomène représenté par la suite de points à lisser tient une place importante.

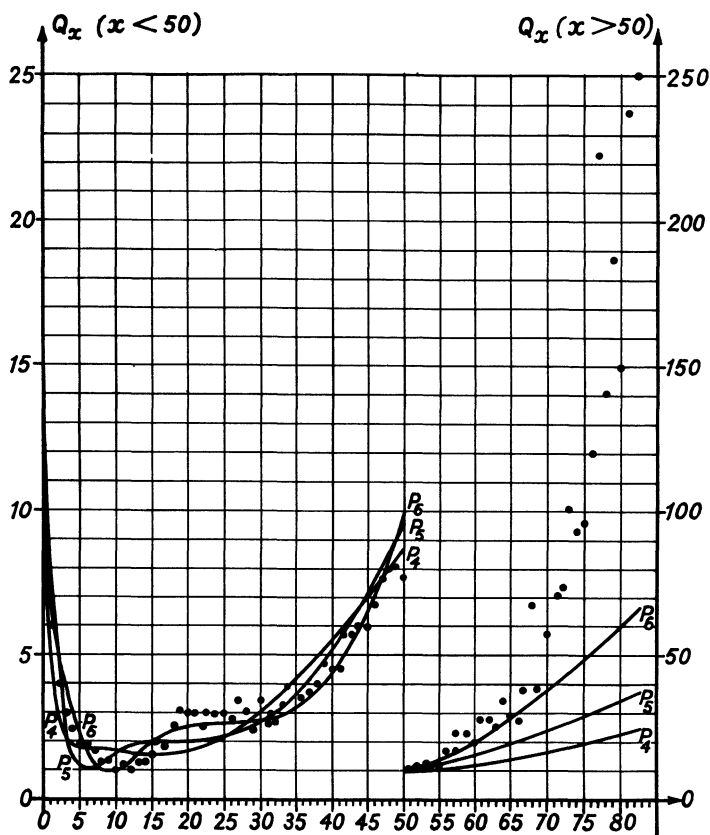


Fig. 5

La figure 6 montre, à gauche, la courbe de lissage proposée par l'un de nos sujets pour la suite de points déjà considérée dans la figure 3. Cette courbe, qui se rattache au type F, courbe fidèle, est parfaitement raisonnable. Toutefois, si le sujet avait été prévenu que l'unité en abscisses représentait une seconde de temps et l'unité en ordonnée une longueur d'un mètre, et que la suite de points représentait la distance moyenne d'un avion mesurée par un radar de dixième en dixième de seconde, il aurait écarté le tracé sinueux abc qui impose à un avion, en une durée d'à peine plus d'une seconde, un recul de l'ordre de 4 m suivi d'une avance égale : l'arc sinueux aurait également été éliminé. On atteint ainsi un tracé tel que le graphique de droite, proposé par un autre sujet, sans connaître plus que le premier la nature de la question.

Si l'on examine de près les deux tracés sinueux on peut interpréter celui de gauche ef. comme une conception subjective de la courbe de lissage, mais le second abc a été suggéré par la disposition des points au voisinage de l'abscisse 17, et cette disposition ne peut résulter que d'un fonctionnement défectueux de l'appareil de mesures (vraisemblablement le point de réflexion des ondes émises par le radar a changé brusquement à la surface de l'avion par suite des évolutions de ce dernier).

Cet exemple tend à la conclusion qu'un **lissage correct nécessite l'intervention réfléchie d'un spécialiste des questions auxquelles se rapportent les mesures effectuées**, et qu'il est prudent de ne point appliquer sans précautions des méthodes mathématiques ou mécaniques de lissage.

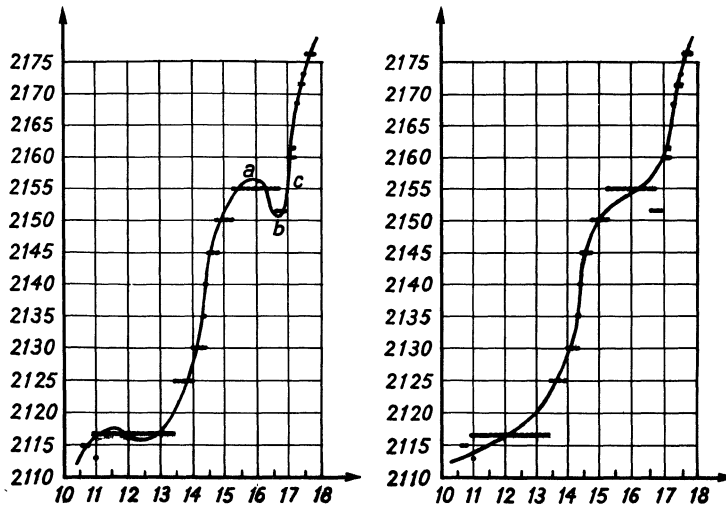


Fig. 6

Toutefois, s'il faut connaître les circonstances expérimentales d'établissement de la suite des points à lisser pour en faire un bon lissage, il faut craindre aussi d'aborder l'étude d'un nuage de points avec des idées trop arrêtées.

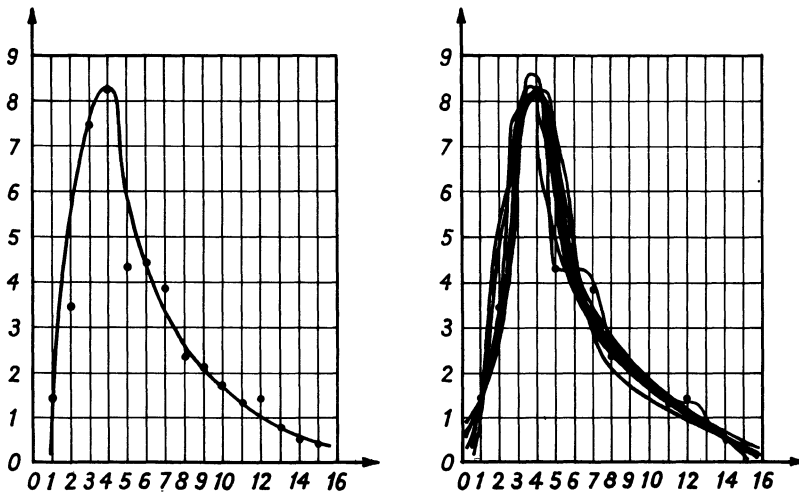


Fig. 7

La figure 7 montre le lissage de points représentant en fonction du temps le nombre de réponses à des lettres publicitaires, expédiées toutes les même jour. L'auteur de l'étude, au vu des points obtenus, a tracé la courbe de gauche. Dans un travail ultérieur, il déclare que cette courbe est mauvaise, car elle n'est pas une courbe en cloche de Gauss. Nous avons soumis à nos sujets la même suite de points. La figure de droite montre les divers tracés proposés ; aucun d'entre eux ne ressemble à une courbe en cloche. Il semble que la loi de répartition de Gauss n'apparait dans cette question que si on l'y introduit à dessein.

XII

L'exemple de la figure 6 met en relief la nécessité de tenir compte de la précision des mesures, tout au moins afin de négliger les points manifestement erronés.

Cette considération s'est présentée à l'esprit de plusieurs de nos sujets, ainsi qu'en témoigne la figure 8. Les tracés de gauche considèrent le point A comme aberrant, les tracés du milieu, le point B, le tracé de droite les considère comme également bons.

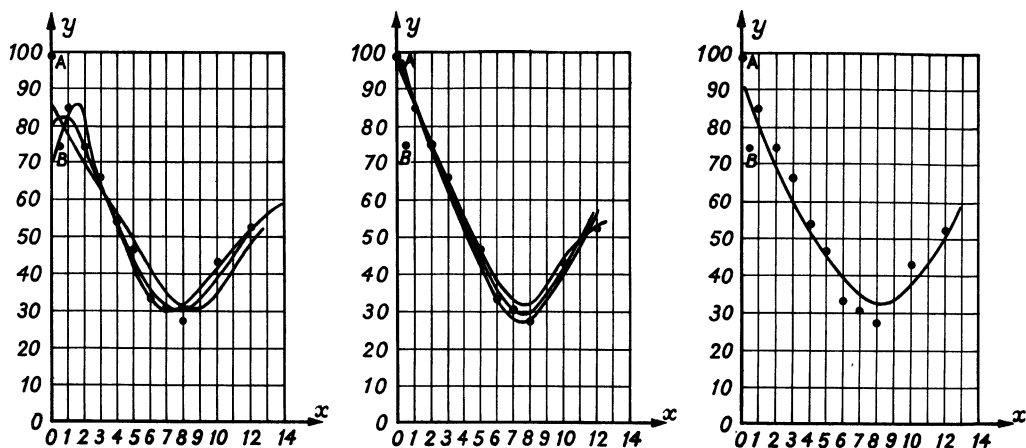


Fig. 8

Il est probable que, dans l'esprit de chacun des sujets sollicités, il s'est construit, d'après la répartition des points sur la figure, une évaluation de l'erreur des mesures représentées par ces points. Vraisemblablement, même, c'est cette évaluation intuitive de la précision de l'expérience qui a guidé le tracé de la courbe de lissage, tant pour le groupe S que pour le groupe F.

On ne trouve guère d'observations sur ce point dans la littérature. Il paraît important cependant.

En particulier, la précision du graphique (choix des échelles et finesse du trait) devrait exprimer la précision des mesures. Il semble que c'est cette considération qui a guidé l'intuition de nos sujets dans leur tracé.

XIII

En conclusion :

1° Une méthode de lissage d'une suite de points expérimentaux qui prend ces points pour seules données est de nature subjective, et ne peut être considérée comme scientifique :

2° Le lissage doit être fait par une personne ayant une connaissance détaillée du phénomène représenté par la suite de points :

3° La considération de l'erreur de chaque mesure, c'est-à-dire de l'erreur de position de chaque point, joue vraisemblablement un rôle prépondérant dans la détermination d'une bonne courbe de lissage.

On peut craindre que les conclusions tirées de travaux expérimentaux ne présentent pas toujours le degré de certitude que l'on a coutume d'attribuer à des tableaux de nombres : telle est une conclusion, un peu pessimiste, de notre étude. La nécessité d'élaborer des méthodes objectives d'interprétation des mesures s'en dégage également ainsi que des voies d'accès.

Pour poursuivre ces recherches, et pouvoir compléter bientôt ces premiers résultats, nous espérons trouver les concours, indispensables, de physiciens et de techniciens. Et, en conclusion ultime de ces lignes, dans l'intérêt de tous les expérimentateurs, nous nous permettons de les solliciter.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Whittaker and Robinson.- The calculus of observations. Blackie and Son Limited. London and Glasgow (4^e édition). 1944.
- (2) Blet.- Une nouvelle méthode d'exploitation des résultats expérimentaux ; C.R.S.I.M. (Marseille) : note n° 213.
- (3) Vernotte.- Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air : n° 37, 1950.
- (4) Tchebychef.- Oeuvres, 1907.
- (5) Wiener.- Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary-time series. John Wiley and Sons Inc. New-York (2^e édition), 1950.