REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. RAMBACH

Application aux problèmes industriels de la règle de composition des variances

Revue de statistique appliquée, tome 3, nº 1 (1955), p. 57-61
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_1_57_0>

APPLICATION AUX PROBLÈMES INDUSTRIELS DE LA RÈGLE DE COMPOSITION DES VARIANCES

par

R. RAMBACH

Ingénieur-Conseil
Ancien élève de l'Ecole Polytechnique

La règle classique d'additivité des variances suppose des conditions d'emploi qui ne sont pas toujours réalisées dans la pratique.

Après avoir examiné quelques-unes des raisons qui peuvent restreindre l'emploi de cette règle, M. Rambach examine un cas particulier où il est possible d'admettre une règle modifiée tenant compte d'informations complémentaires relatives à la fabrication des éléments d'un assemblage.

La règle de l'addition des variances stipule que si un certain nombre d'éléments aléatoires respectent chacun une loi normale et si les causes de leurs variations sont absolument indépendantes les unes des autres, la distribution de la somme algébrique de ces divers éléments est elle-même une distribution normale dont la moyenne est la somme algébrique des moyennes des distributions des éléments et dont la variance est la somme arithmétique des variances des éléments. Nous rappelons qu'on appelle variance le carré de l'écart-type.

Cette règle est la base de la démonstration de divers théorèmes du calcul de probabilité, mais elle s'applique aussi directement à la solution de certains problèmes industriels, et plus particulièrement à deux types bien déterminés : l'étude de la valeur relative des divers éléments qui concourent à la variabilité d'un produit et le calcul des tolérances à admettre chez les divers composants d'un ensemble soumis lui-même à des règles de tolérance déterminées.

ANALYSE DES CAUSES DE VARIABILITÉ

L'étude préalable à la mise sous contrôle statistique d'une opération industrielle révèlera souvent des anomalies riches d'enseignements. Le problème se présentera d'ailleurs d'une manière un peu différente selon que les deux causes de variabilité jouent l'une et l'autre sur toutes les valeurs mesurées, et par conséquent sur les diverses valeurs rencontrées au sein d'un même échantillon ou qu'au contraire, une seule des causes de variabilité joue au sein d'un échantillon tandis que l'autre intervient seulement lorsque l'on passe d'un échantillon à l'autre.

Un bon exemple du premier cas est fourni par le cas d'une fabrication par extrusion à travers une filière, disons par exemple la fabrication d'un tube de matière plastique.

La mesure de l'épaisseur, prise au hasard sur le tube, dépend à la fois du réglage de la filière dont les éléments peuvent être plus ou moins concentriques et de conditions inhérentes à la matière elle-même telles que son homogénéité plus ou moins grande ou les différences de retrait qui peuvent se produire au refroidissement, la variance de l'ensemble s'obtiendra facilement en appliquant les règles habituelles du Contrôle Statistique, c'est-à-dire en prenant un certain nombre d'échantillons de quelques mesures, disons de 5 mesures, en calculant l'amplitude de chacun et la moyenne de ces amplitudes. L'écart-type de la distribution sera le quotient de cette amplitude moyenne par un coefficient numérique lu sur des tables et la variance le carré de cet écart-type.

Il serait par contre extrêmement difficile d'avoir un moyen de mesure direct du plus ou moins bon réglage de la filière.

Mais en vertu du théorème de l'addition des variances, nous pourrons connaître la part de la variance dûe au plus ou moins bon réglage de la filière par la seule différence entre la variance totale calculée ci-dessus et la variance inhérente aux causes autres que la filière. Cette dernière s'obtiendra en effectuant les calculs précédents à partir de mesures faites le long d'une même génératrice.

Supposons au contraire que nous désirions surveiller la régularité d'épaisseur de feuilles moulées et qu'à cet effet, nous mesurions sur chaque feuille l'épaisseur en un certain nombre de points. L'amplitude de chaque groupe de mesures ne dépendra que de l'irrégularité plus ou moins grande des épaisseurs à l'intérieur de chaque feuille. Alors que les valeurs moyennes des mesures faites différeront entre elles, d'une part du fait du hasard qui aura présidé au choix des quelques points de la feuille sur lesquels auront été faites les mesures, d'autre part du fait des différences existant entre les feuilles, dues par exemple à des irrégularités de pesée si l'épaisseur des feuilles dépend de leur poids.

Dans ce cas, il sera possible de calculer la variance relative à chaque feuille en utilisant l'amplitude de l'échantillon tel qu'il se présente et la variance de l'ensemble en utilisant des échantillons fictifs constitués par des groupes de 5 mesures prises au hasard dans l'ensemble de toutes les mesures effectuées. La variance des épaisseurs moyennes vraies des feuilles elles-mêmes pourra être obtenu par différence entre les variances calculées des deux manières précédentes.

Il y a lieu d'ailleurs de remarquer dans ce cas que si la variance dûe aux différences d'une feuille à l'autre n'est pas trop importante, le calcul préalable à la mise sous contrôle statistique aura pu paraître autoriser l'application pure et simple des règles du contrôle statistique, et qu'alors seule une analyse plus fouillée de la réalité concrète aura permis de discerner la cause de variance supplémentaire, tandis que si les variations d'épaisseur moyenne d'une feuille à l'autre sont importantes, le calcul préliminaire à toute mise sous contrôle statistique aura révélé des variations de valeur moyenne incompatibles avec les seules lois du hasard et aura ainsi attiré l'attention des services techniques sur cette seconde cause de variation.

De toutes façons, que les diverses causes de variation aient été discernées par l'analyse statistique ou qu'elles aient été connues à l'avance des services techniques, le fait de pouvoir chiffrer l'importance relative de chacune d'entre elles s'avère le plus souvent féconde en résultats d'un grand intérêt pratique.

TOLÉRANCES DES DIVERS ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE

La connaissance de la règle d'additivité des variances est nécessaire à tout bureau d'étude qui veut éviter de fixer des tolérances inutilement trop sévères et par suite d'aboutir à un prix de revient inutilement trop élevé.

Il arrive très souvent en effet qu'une certaine cote soumise à des tolérances déterminées résulte en réalité d'un certain nombre d'autres. Par exemple, la largeur d'une couronne circulaire sera la différence des rayons intérieurs et extérieurs ; la longueur totale d'un assemblage de deux pièces mises bout à bout sera la somme des longueurs des deux pièces : ou bien encore on emmanchera une pièce d'une longueur déterminée dans un trou percé dans une plaque, et la tolérance à respecter sera celle du dépassement par rapport à la plaque, cote qui est alors la différence entre la longueur de la pièce emmanchée et l'épaisseur de la plaque.

Il est d'usage courant dans chacun de ces cas de calculer la tolérance des divers éléments de telle sorte que la somme des tolérances des éléments soit égale à la tolérance de l'ensemble. Par exemple si l'on met deux éléments bout à bout et que l'on désire avoir sur l'ensemble une tolérance de plus ou moins 2/ 10 on réalisera chacun des deux éléments à la tolérance de plus ou moins 1/ 10.

S'il s'agit de réaliser un assemblage unitaire, c'est-à-dire de faire une seule fois chacun des deux éléments pour aboutir à un seul ensemble de deux pièces, la méthode adoptée peut être considérée comme parfaitement satisfaisante Mais s'il s'agit de fabriquer un très grand nombre de pièces du type A, un très grand nombre de pièces du type B, et ensuite d'assembler chaque fois une pièce A et une pièce B prise au hasard dans les deux ensembles précédemment fabriqués, il est clair que la personne chargée de l'assemblage n'a à peu près aucune chance de saisir pour les mettre ensemble à la fois la plus petite pièce A et la plus petite pièce B. Autrement dit, en ayant fabriqué chacune des pièces à $\pm$ 1/ 10, on ne réalisera aucun ensemble qui atteigne les cotes extrêmes de - 2/ 10 ou + 2/ 10 ; et l'on aura réalisé des ensembles présentant des tolérances plus serrées que celles qui étaient demandées initialement.

Si l'on réfléchit qu'en pratique, on peut assimiler la dispersion d'un ensemble a 6 fois son écart-type, on voit que la règle d'additivité des variances, autrement dit d'additivité des carrés des écarts-types peut se transformer en une règle d'additivité des carrés des tolérances. Si chacun des deux éléments à assembler a été réalisé avec des tolérances de $\pm$ 2/ 10, le carré de la tolérance réalisée par l'ensemble sera $(2/10)^2 + (2/10)^2 = 8/100$ et la tolérance respectée par l'assemblage sera $\frac{\sqrt{8}}{10}$, c'est-à-dire environ $\pm \frac{3}{10}$. Pour respecter la tolérance d'ensemble de 4/ 10, il aurait suffi d'usiner chacun des éléments à la tolérance de $\frac{2\sqrt{2}}{10}$, c'est-à-dire environ 3/10

Cette même règle d'additivité des variances s'appliquera par exemple aux tolérances des deux rayons, intérieur et extérieur, si c'est sur leur différence qu'est imposée une tolérance de fonctionnement.

Cette règle n'obligera pas d'ailleurs à soumettre chacun des éléments à la même tolérance. Si l'usinage d'un des éléments est beaucoup plus difficile qu'un autre, on pourra soumettre cet élément à une tolérance plus réduite et l'autre à une tolérance plus sévère, à la seule condition que la somme des carrés des tolérances aboutisse à la tolérance de l'ensemble.

L'application de ces règles simples peut conduire à des économies d'usinage très importantes. Il ne faut toutefois pas perdre de vue avant de les appliquer que leur emploi est limité par deux séries de conditions extrêmement importantes et que l'on ne saurait négliger sous peine d'arriver à des résultats tout différents de ceux escomptés.

Tout d'abord la règle d'indépendance. Les éléments soumis aux tolérances devront être indépendants les uns des autres. Ceci veut dire, toujours en choisissant l'exemple type de deux pièces que l'on assemble l'une au bout de l'autre, que si l'on usine séparément les deux éléments et que l'on choisisse ensuite au hasard dans l'ensemble des pièces usinées celles à assembler, on aura le droit d'additionner les variances. Mais si au contraire, on les prend dans l'ordre de leur usinage pour les assembler, c'est-à-dire la première pièce A avec la première pièce B, puis la deuxième pièce A avec la deuxième pièce B et ainsi de suite, il peut y avoir certaines causes systématiques telles que l'usure de l'outil qui feront qu'on prendra à ce moment-là au début des éléments qui ont des raisons d'être tous deux parmi les plus grands par exemple, et à la fin des éléments qui ont des raisons d'être l'un et l'autre parmi les plus petits. La règle d'additivité des variances ne s'applique plus alors.

De même, lorsque nous évoquions l'idée de la fabrication d'une couronne et de la différence des rayons intérieur et extérieur, si ces deux rayons sont usinés séparément, il n'y a aucune raison pour que l'endroit de la circonférence ou le rayon extérieur sera le plus petit coincide avec celui où le rayon intérieur sera le plus grand et la règle pourra s'appliquer sans restriction ; mais si au contraire les deux rayons sont usinés en même temps, il y aura peut être une raison systématique pour que les variations de l'un ne soient pas indépendantes de celles de l'autre et l'on ne sera pas alors en droit d'appliquer la règle d'additivité des variances.

Mais il est une autre condition nécessaire à l'application de ces règles qui n'est pas moins importante que la première et en restreint malheureusement sensiblement les possibilités. C'est que l'ensemble de l'intervalle de tolérance fixé à partir de cette règle doit être effectivement et complètement respecté. Nous voulons dire par là que si l'on a fixé un intervalle de tolérance de $\pm$ 1/10, l'ensemble des pièces fabriquées doit être réparti selon une loi approximativement normale entre - 1/10 et + 1/10. La règle ne saurait être appliquée sous la forme où nous l'avons énoncée si l'ensemble des pièces fabriquées étaient toutes comprises entre 0 et + 1/10 par exemple, alors que l'intervalle de tolérance imposé serait cependant respecté. Il est clair en effet que dans ce cas le choix des pièces au hasard fera trouver sensiblement plus de pièces voisines de la limite supérieure que si l'ensemble avait été réparti entre - 1/10 et + 1/10. Par suite, on trouvera une proportion non négligeable d'assemblages plus grands que la limite supérieure de tolérance.

La remarque que nous venons de faire interdit d'appliquer la règle d'additivité des variances, au moins sous sa forme la plus simple, au cas où la machine est trop précise pour l'intervalle de tolérance demandé et où l'on respecte un intervalle de tolérance plus restreint.

Le cas inverse où la machine est insuffisamment précise pour l'intervalle de tolérance demandé et où le fabricant est obligé de procéder ensuite au tri intégral des pièces ne permet pas plus l'application des règles d'additivité des variances. Dans ce cas, en effet, la proportion des pièces s'approchant des valeurs extrêmes de tolérance peut être beaucoup plus grande que dans le cas d'une répartition normale puisque la courbe de répartition de l'ensemble des valeurs est une courbe très ouverte et tronquée de ses extrémités.

Les limitations que nous venons d'énoncer : impossibilité d'appliquer la règle d'additivité des tolérances aussi bien lorsque les pièces seront fabriquées avec une dispersion inférieure à celles des tolérances que lorsqu'elles seront fabriquées avec une dispersion supérieure, puis soumises à un tri, rend impossible l'emploi de cette règle chaque fois que l'on à affaire à des pièces fournies par l'extérieur. Dans ce cas en effet, le fournisseur est libre de choisir le procédé de son choix pour respecter les tolérances demandées. Ou sinon il faudrait lui imposer des règles de dispersion qu'il lui serait sans doute en général difficile d'accepter.

Mais ce que est plus grave, c'est que même lorsqu'il s'agit d'assembler des pièces fabriquées dans son propre établissement, la règle d'additivité des variances sous sa forme la plus simple limiterait son champ d'application à la fabrication de pièces pour lesquelles les machines seraient rigoureusement adaptées aux tolérances calculées, ce qui serait évidemment rarement le cas.

Il est heureusement possible d'établir une règle simple d'additivité des tolérances qui tienne compte de la dispersion réelle du procédé d'usinage. Cette règle permettra de calculer les tolérances les plus économiques pour l'usinage des éléments d'un ensemble chaque fois que l'on aura la possibilité de connaître les conditions de travail des machines chargées de cet usinage, c'est-à-dire en général lorsque cet usinage aura lieu dans son propre établissement.

Si nous désignons alors par t_1 et t_2 les tolérances respectées en fait par le procédé d'usinage centré sur une valeur quelconque mais constamment la même, et par conséquent par t_1^2 et t_2^2 les variances, la tolérance respectée par l'assemblage des deux pièces serait $T = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$, et ce serait une tolérance plus resserrée que la tolérance demandée. Pour respecter la tolérance demandée, on pourra de ce fait se permettre certaines variations de la valeur moyenne au cours de l'usinage de chacune de ces pièces. Si nous désignons par a_1 et a_2 ces déplacements de valeur moyenne, la valeur moyenne de l'ensemble subira au maximum des déplacements plus grands de$(a_1 + a_2)$ que la tolérance résultant de la formule précédente. Autrement dit si les machines produisant chacune des deux pièces, respectent en fait des intervalles de tolérances t_1 et t_2 et si l'on désigne par T la tolérance que l'on désire voir respecter par l'ensemble usiné, on pourra admettre des déplacements de valeur moyenne d'usinage a_1 et a_2 tels que $(a_1 + a_2 + \sqrt{t_1^2 + t_2^2})$ soit égale à T. Telle est la règle que le bureau d'études devra imposer au service de fabrication.

Celui-ci choisira les valeurs de a_1 et a_2 qui lui paraissent les plus commodes tout en respectant la condition de base imposée. Les limites de contrôle seront ensuite faciles à calculer. On calculera pour chacune des deux machines des limites correspondant aux précisions t_1 et t_2, puis on les écartera des valeurs a_1 et a_2.

En fait, les tolérances respectées par l'atelier seront $(a_1 + t_1)$ et $(a_2 + t_2)$

Le cas des machines juste assez précises pour la tolérance demandée apparaît comme un cas particulier de cette formule où l'on fait $a_1 = a_2 = 0$.

Cette formule est un peu moins simple que la règle d'additivité des variances pure et simple. Elle n'est cependant pas extrêmement compliquée et mérite d'être prise en considération chaque fois qu'il s'agit de fabrications de grande série. Car en contre partie d'un calcul malgré tout simple, elle permet par rapport aux règles anciennement appliquées de simple additivité des tolérances, un élargissement sensible des conditions qui doit aboutir à des économies importantes. Par contre le cas d'application aux opérations d'assemblage de la théorie pure et simple d'additivité des variances est en pratique extrêmement rare puisque s'il s'agit seulement du cas où chacune des machines respecte à peu de choses près l'intervalle de tolérance calculé.

En conclusion, nous croyons devoir insister encore sur le très gros intérêt pratique que présente la connaissance de ces règles d'additivité des variances, mais sur la nécessité de veiller strictement au respect de deux conditions: a) indépendance des causes de variation, condition aussi indispensable au premier groupe d'application que nous avons évoqué qu'au deuxième ; b) existence d'une répartition normale couvrant l'ensemble de l'intervalle de variation condition automatiquement réalisée dans le premier groupe d'applications, mais au contraire assez rarement dans le cas des tolérances.