REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

C. CASSIGNOL

Note sur la construction d'intervalles de confiance pour la proportion de défectueux d'un lot à partir d'échantillons d'effectif peu élevé

Revue de statistique appliquée, tome 2, nº 3 (1954), p. 43-55

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1954__2_3_43_0>

NOTE

Sur la construction d'intervalles de confiance pour la proportion de défectueux d'un lot à partir d'échantillons d'effectif peu élevé

par

Mme C. CASSIGNOL

Agrégée de Mathématiques
Directeur des Études au Centre de formation

L'estimation des paramètres caractéristiques d'une loi de distribution de type connu (loi binomiale, loi normale, ...) conduit à rechercher pour la vraie valeur (inconnue) de ces paramètres des intervalles appelés « intervalles de confiance ».

Encore faut-il définir de façon précise ce qu'on entend par ce terme.

D'un point de vue superficiel, ceci correspond à une notion qui paraît intuitivement assez simple : déterminer pour le paramètre inconnu θ *(moyenne, fréquence, ...) un intervalle* (t_1, t_2) *tel qu'il soit vraisemblable de penser que l'on n'a que peu de chances de se tromper en disant que* θ *est compris entre* t_1 *et* t_2*, ou encore que, si* θ *est extérieur à cet intervalle, il est peu probable que cette hypothèse soit compatible avec les observations utilisées pour l'estimation* T *que l'on peut en déduire.*

L'expérience de l'enseignement donné aux stagiaires du Centre de Formation (stages du second degré) et les remarques faites par les stagiaires à propos de l'utilisation des abaques relatifs à la distribution binomiale ont montré que ces notions devaient être précisées.

Une étude rigoureuse de cette question, présentée dans la note ci-après, satisfera l'esprit de rigueur tant des stagiaires, qui ont manifesté quelque curiosité à cet égard, que de tous ceux qui ne sauraient se satisfaire d'une simple recette.

Cet exposé nécessite quelque attention, mais il est de nature à éclairer deux concepts différents en matière d'induction statistique, concepts conduisant dans certains cas à des résultats pratiquement identiques, mais qu'il importe de distinguer lorsqu'il s'agit d'échantillons d'effectifs peu élevé.

I. – RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS GÉNÉRALES A PARTIR DE L'ÉTUDE D'UN EXEMPLE SIMPLE.

L'estimation d'un paramètre inconnu d'une population de type connu (moyenne, variance, proportion de défectueux, etc...) s'obtient à partir d'une certaine fonction des observations, appelée **estimateur.**

Etudions le cas simple et classique de l'estimation de la moyenne m d'une population normale d'écart-type σ connu à partir de n observations $x_1, x_2, ..., x_n$ (échantillon d'effectif n).

L'estimation classique de m est donnée par la moyenne de l'échantillon :

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Pour l'ensemble de tous les échantillons d'effectif n extraits au hasard, et indépendamment, de la population étudiée (moyenne m inconnue, mais fixe, écart-type σ connu), l'estimateur $\overline{x}$ est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m, d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. On a donc une quasi-certitude de trouver, **pour un échantillon observé**, une valeur de $\overline{x}$ dans l'intervalle $m \pm 3{,}09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$(1) \quad \Pr\left(m - 3{,}09\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{x} \leqslant m + 3{,}09\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 998\ ^\circ/_{\circ\circ}$$

$$(2) \quad \Pr\left(\overline{x} \leqslant m - 3{,}09\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Pr\left(\overline{x} \geqslant m + 3{,}09\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1\ ^\circ/_{\circ\circ}$$

Si n est suffisamment grand pour que $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ soit de l'ordre de la précision des mesures, on prendra pour la valeur m inconnue la valeur $\overline{x}$ observée ; le risque de se tromper en procédant ainsi est extrêmement faible.

Il n'en est plus de même lorsque l'effectif n de l'échantillon est peu élevé : l'observation peut dans ce cas donner une valeur $\overline{x}$ nettement différente de m.

On cherchera, dans ce cas, à définir à partir des observations, non plus une valeur unique, **mais un intervalle dans lequel placer m.**

Généralisation des inégalités (1) et (2).

Nous considérerons par la suite des intervalles ayant une probabilité $1 - \alpha$ (α quelconque petit) de contenir $\overline{x}$:

$$(3) \quad \Pr\left(m - t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{x} \leqslant m + t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$(4) \quad \begin{cases} \Pr\left(\overline{x} \leqslant m - t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{t'}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \alpha' \\ \Pr\left(\overline{x} \geqslant m + t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{t''}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \alpha'' \end{cases}$$

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha$$

1. 1. — Définition et construction d'un intervalle de confiance pour m, à partir d'une valeur observée $\overline{x}$, avec un niveau (ou degré, ou coefficient) de confiance $1 - \alpha$, au sens de Neyman (intervalles du type N).

L'inégalité (3) exprime que, quel que soit m, l'événement : « $\overline{x}$ (aléatoire) intérieur à l'intervalle (non aléatoire) : $m - t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $m + t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ » a une probabilité $1 - \alpha$.

Définition : $\left(m - t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ m + t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (\overline{x}_1(m)\ ;\ \overline{x}_2(m))$ est un intervalle de probabilité $1 - \alpha$ pour $\overline{x}$. (m étant fixe).

Cette inégalité peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$(3)' \quad \Pr\left(\bar{x} - t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant m \leqslant \bar{x} + t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

et se lira :

« La probabilité pour que l'intervalle aléatoire $\left(\bar{x} - t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ contienne la valeur m de la moyenne de la population d'où est extrait l'échantillon observé est égale à $1 - \alpha$ ».

Ou encore (d'après la loi des grands nombres) :

« En disant que m se trouve dans l'intervalle $\left(\bar{x} - t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ lorsqu'on a observé la valeur x, on se trompera en moyenne dans une proportion α des cas pour une grande série d'épreuves ».

Une épreuve consiste en l'estimation de la moyenne d'une population à partir de n observations ; les valeurs m peuvent varier d'une épreuve à l'autre.

L'intervalle $\left(\bar{x} - t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (m_2(\bar{x})\ ;\ m_1(\bar{x}))$ est un intervalle de confiance de niveau (ou degré) de confiance $1 - \alpha$ au sens de Neyman.

α mesure le risque d'erreur de la règle de construction ;

$1 - \alpha$ mesure la fréquence de réussite de cette règle.

Représentation graphique.

Dans l'exemple étudié, une simple résolution d'inégalité permet de déterminer l'intervalle de confiance $(m_2(\bar{x}), m_1(\bar{x}))$ à partir de l'intervalle de probabilité $1 - \alpha$ $(\bar{x}_1(m)\ ;\ \bar{x}_2(m))$. Il n'en est pas toujours ainsi (cas d'inégalités non linéaires par rapport au paramètre, de loi non tabulée pour l'estimateur, etc.).

La représentation graphique permet par contre toutes les généralisations. Portons en abscisse m (paramètre inconnu), en ordonnée $\bar{x}$ (moyenne d'échantillon aléatoire d'effectif n fixe).

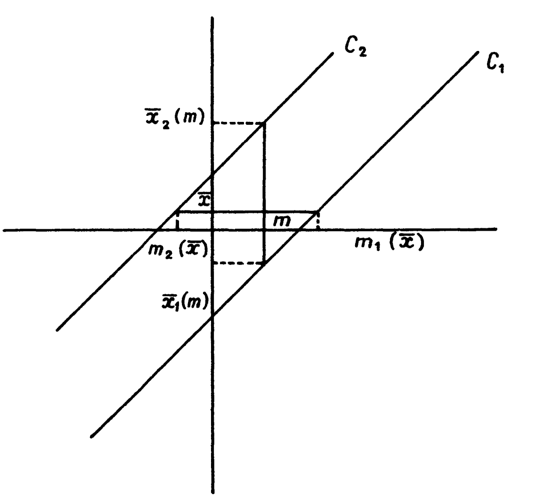

Fig. 1

Pour m donné, l'intervalle de probabilité $1 - \alpha$ choisi pour $\bar{x}$ a pour extrémités :

$$\bar{x}_1(m) = m - t'\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{x}_2(m) = m + t''\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

lorsque m varie, ces points décrivent deux courbes (C_1) et (C_2) (ici des droites) :

$$(C_1) \quad \overline{x} = \overline{x}_1 (m) = m - t' \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$(C_2) \quad \overline{x} = \overline{x}_2 (m) = m + t'' \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pour une valeur observée $\overline{x}$, l'intervalle de confiance pour m s'obtient en coupant les deux courbes par la droite d'ordonnée $\overline{x}$:

$$(m_2(\overline{x}) \; ; \; m_1(\overline{x})) = \text{intervalle intérieur à la bande } (C_1, C_2)$$

Pour obtenir des intervalles de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour m, il suffit donc de savoir construire pour toute valeur de m des intervalles de probabilité $1 - \alpha$ pour $\overline{x}$.

La seule propriété nécessaire pour les courbes (C_1) et (C_2) est qu'elles soient monotones (coupées chacune en un seul point par une droite d'ordonnée $\overline{x}$ quelconque).

I. 2. — Deuxième définition d'intervalles de confiance pour m (intervalles du type F).

a) $m_1(\overline{x})$, extrémité supérieure de l'intervalle, est telle que pour une population de moyenne $m \geqslant m_1(\overline{x})$ la probabilité d'obtenir une moyenne d'échantillon $\leqslant$ à la valeur $\overline{x}$ observée est au plus égale à α' :

$$\Pr(\text{moyenne d'échantillon} \leqslant \overline{x} / m \geqslant m_1(\overline{x})) \leqslant \alpha'$$

b) $m_2(\overline{x})$, extrémité inférieure, est telle que pour une population de moyenne $m \leqslant m_2(\overline{x})$ la probabilité d'obtenir une moyenne d'échantillon $\geqslant$ à la valeur $\overline{x}$ observée est au plus égale à α'' :

$$\Pr(\text{moyenne d'échantillon} \geqslant \overline{x} / m \leqslant m_2(\overline{x})) \leqslant \alpha''$$

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha$$

Cette définition permet de construire l'intervalle $(m_2(\overline{x}), m_1(\overline{x}))$ sans passer par l'intervalle $(\overline{x}_1(m), \overline{x}_2(m))$ de probabilité $1 - \alpha$

$\overline{x}$ étant connu, la lecture de la table de l'intégrale de la loi normale donne immédiatement m_1 et m_2 :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\overline{x}-m_2)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \alpha''$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(m_1-\overline{x})\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \alpha'$$

I. 3. — Généralisation. — Comparaison des deux définitions.

Intervalles de confiance pour le paramètre inconnu θ d'une loi de type connu :

La construction d'intervalles de l'un ou l'autre type nécessite en premier lieu la construction d'une fonction des observations $T(x_1, ..., x_n)$ dont la loi soit calculable lorsque θ est donné :

$$\Pr(T \leqslant t) = F(t \; ; \theta)$$

Il n'est pas nécessaire que T soit un estimateur de θ ; en particulier dans l'exemple traité, on peut utiliser une fonction de $\overline{x}$.

Exemple : $S = \Sigma x_i = n \, \overline{x}$.

Intervalles au sens de Neyman (type N) :

Les intervalles de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ se déduisent des intervalles de probabilité $1-\alpha$ pour T (à θ donné), à la seule condition de monotonie des courbes, lieu des extrémités de ces intervalles. Ils s'obtiennent par lecture inverse des abaques correspondants — ou résolution d'une inégalité. Le degré de confiance $1-\alpha$ a une signification concrète précise : c'est la proportion moyenne des cas où l'on ne se trompe pas en plaçant le paramètre dans l'intervalle de confiance (fréquence de réussite).

La construction d'intervalles de degré $1-\alpha$ exactement exige la construction d'intervalles de probabilité $1-\alpha$ exactement pour T quel que soit θ. Ceci n'est généralement possible que si **T est une variable aléatoire continue.**

Dans ce cas — et sauf indications contraires — on prendra en général $\alpha' = \alpha'' = \frac{\alpha}{2}$ (intervalles centraux).

Intervalles du 2e type (type F) :

Ils se construisent directement, à partir de la valeur observée T_0, par résolution d'égalités et inégalités du type suivant :

$$\Pr(T \geqslant T_0/\theta = \theta_2) = \alpha'' \qquad \Pr(T \geqslant T_0/\theta \leqslant \theta_2) \leqslant \alpha''$$

$$\Pr(T \leqslant T_0/\theta = \theta_1) = \alpha' \qquad \Pr(T \leqslant T_0/\theta \geqslant \theta_1) \leqslant \alpha'$$

inégalités et égalités généralement résolubles en θ, **lorsque θ est un paramètre à variation continue**, et F (t ; θ) fonction continue de θ.

Dans ce cas, il est toujours possible de choisir $\alpha' = \alpha'' = \frac{\alpha}{2}$. α' et α'' mesurent ici la vraisemblance minima que l'on admet pour les événements du type $T \geqslant T_0$ ou $T \leqslant T_0$; on a pris par convention $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

Comparaison des deux définitions :

Dans l'exemple traité, les deux définitions donnent les mêmes intervalles, résultat dû au fait :
- que la caractéristique $\bar{x}$ est continue ;
- et que le paramètre m est à variation continue,

ce qui permet :
- la construction d'un intervalle (F) pour toute valeur de $\bar{x}$;
- la construction d'un intervalle de probabilité $1-\alpha$ exactement pour toute valeur de m,

et entraîne : $\Pr(T \geqslant t_0) = \Pr(T > t_0)$; $\Pr(T \leqslant t_0) = \Pr(T < t_0)$

Nous allons voir qu'il n'en est plus de même pour l'estimation du paramètre d'une loi binomiale, et que, dans ce cas, il sera nécessaire de préciser la définition adoptée.

2. — INTERVALLES DE CONFIANCE POUR LA PROPORTION p DE DÉFECTUEUX D'UN LOT (effectif d'échantillon n fixé).

2. 1. — Remarques générales. — Choix de la fonction des observations.

Le meilleur estimateur de p est la proportion $\frac{k}{n}$ de défectueux contenue dans l'échantillon. Pour n peu élevé, cas étudié ici, la loi tabulée est celle de k (loi binomiale). On déterminera donc les intervalles de confiance à partir de k.

Conséquences du fait que k est une variable aléatoire discrète et p un paramètre continu.

Quelques précisions et conventions complémentaires sont nécessaires :

a) — pour les abaques conduisant aux intervalles au sens de Neyman : préciser si l'intervalle de probabilité $1-\alpha$ comporte ou non les points sur C_1 et C_2 ;

b) — pour les intervalles de type (F) : préciser si, pour $k = j$, on prend :

pour la limite inférieure p_2 : $Pr(k > j/p_2) = \frac{\alpha}{2}$ ou $Pr(k \geqslant j/p_2) = \frac{\alpha}{2}$

pour la limite supérieure p_1 : $Pr(k < j/p_1) = \frac{\alpha}{2}$ ou $Pr(k \leqslant j/p_1) = \frac{\alpha}{2}$

2. 2. — Intervalles au sens de Neyman (type N).

Construction des abaques (C_1, C_2).

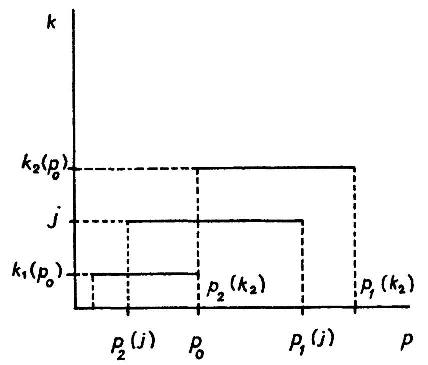

Fig. 2

1 . — L'intervalle de probabilité $(1 - \alpha)$ pour k, pour $p = p_0$ donné, comportera un nombre fini de points à coordonnées entières, chaque point correspondant à une probabilité (ou masse) finie :

$$C_n^j \, p_0^j \, (1 - p_0)^{n-j}$$

Il est logique de prendre pour extrémités de l'intervalle (points sur C_1 et C_2) des points à coordonnées entières (k_1, k_2). Il reste à préciser si l'on considérera $Pr(k_1 < k < k_2)$, ou $Pr(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$, ou toute autre combinaison des signes $\leqslant$ et $<$ aux deux extrémités.

Cette précision était inutile au paragraphe 1, du fait de la continuité de la loi de $\bar{x}$.

Regardons de plus près l'interprétation des abaques (cf. fig. 2). Pour $k = j$ l'intervalle de confiance est $(p_2(j), p_1(j))$, et en raison de la continuité du paramètre p, la question « extrémités comprises ou non » n'a guère de sens. L'intervalle sera normalement défini par :

$$p_2(j) \leqslant p \leqslant p_1(j)$$

Pour $k = k_2$ par exemple, l'intervalle comprendra l'extrémité $p_2(k_2) = p_0$. Autrement dit : p_0 est intérieur à l'intervalle de confiance correspondant à $k = k_2$ — et aussi à l'intervalle pour $k = k_1$.

Pour une longue série d'extractions de n pièces d'un lot comportant une proportion p_0 de défectueux, l'intervalle de confiance contiendra p_0 lorsque $k = k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2$. La probabilité correspondante — proportion des cas où l'on aboutit à une conclusion exacte — est égale à : $Pr(k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_2/p = p_0)$. Cette probabilité définissant le niveau de confiance, on voit qu'on est amené à prendre pour intervalle de probabilité $1 - \alpha$:

$$k_1 \leqslant k \leqslant k_2$$

2. — k étant une variable discrète, il est impossible de définir, pour toute valeur de p, un intervalle (k_1, k_2) contenant exactement une masse (probabilité) fixée :

il n'existe pas d'intervalles du type (N) de niveau $1 - \alpha = P$ exactement.

On se contentera de fixer une **limite inférieure** pour le niveau $1 - \alpha$ (donc une limite supérieure pour l'erreur α) :

$$1 - \alpha \geqslant P \qquad\qquad \alpha \leqslant 1 - P$$

Résultats analogues pour α' et α'' ($\alpha' + \alpha'' = \alpha$) : impossibilité de fixer $\alpha' = \alpha''$.

Nous proposons les conventions suivantes :

Choisir pour p donné un intervalle $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ tel que :

a) — $Pr(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \geqslant P$ et le plus proche possible de P ;

b) — $Pr(k < k_1)$ et $Pr(k > k_2)$ du même ordre de grandeur lorsque cela est possible ;

c) — k_1 et k_2 non décroissants avec p ;

d) — intervalle pour $p = 0,50$:

— soit symétrique : $k_1 = n - k_2$,

— soit, si cela est impossible, tel que : $k_1 < n - k_2$.

Allure des abaques :

Les courbes C_1 et C_2 se présenteront sous forme d'escalier :

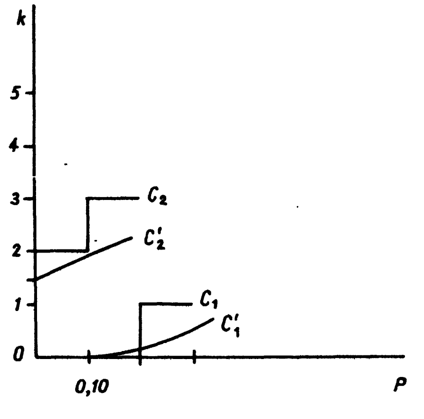

Fig. 3

Remarque importante :

Certains auteurs ont cherché à obtenir des intervalles de confiance de niveau $1 - \alpha$ **par interpolation sur les intervalles de probabilité** : Par exemple, dans le cas : $n = 5$, $p = 0,10$, on a :

$$Pr(0 \leqslant k \leqslant 1) = 92\ \%$$

$$Pr(0 \leqslant k \leqslant 2) = 99\ \%$$

et pour un niveau de 95 %, une interpolation grossière donne l'intervalle (0 — 1,4). On fait alors passer la courbe C_2 par $k'_2 = 1,4$ (au lieu de $k_2 = 2$ pour $1 - \alpha \geqslant 95\ \%$).

Les courbes C_1 et C_2 sont remplacées par des courbes continues C'_1 et C'_2.

En réalité, cette interpolation ne sert à rien — et chercher à l'affiner ne résoud pas le problème :

Supposons, en effet, une longue série de tirages de 5 pièces dans un lot à 10 % de défectueux. Les valeurs possibles du nombre k de défectueux observé sont les nombres **entiers** 0, 1, 2, 3, 4, 5 avec probabilités — donc fréquences — $C_5^j (0,10)^j (0,90)^{5-j}$ (cf. tableau I). Les intervalles de confiance correspondants contiennent la vraie valeur $p = 0,10$ lorsque $k = 0$ ou $k = 1$, **donc dans une proportion de cas égale à 92 % et non 95 %.**

2. 3. — Intervalles de confiances du type F.

Ils se construisent directement pour $k = 0, 1, ..., n$. k étant une variable discrète, il faut préciser si l'on prend, pour $k = j$:

— pour limite inférieure p_2 tel que :

$$\frac{\alpha}{2} = Pr\ (k > j/p_2) = Pr\ (k \geqslant j + 1/p_2)$$

ou

$$\frac{\alpha}{2} = Pr\ (k \geqslant j/p_2)$$

— pour limite supérieure p_1 tel que :

$$\frac{\alpha}{2} = Pr\ (k < j/p_1) = Pr\ (k \leqslant j - 1/p_1)$$

ou

$$\frac{\alpha}{2} = Pr\ (k \leqslant j/p_1)$$

La convention généralement adoptée est :

$$Pr\ (k \leqslant j/p_1) = Pr\ (k \geqslant j/p_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Cas de $j = 0$ et $j = n$.

Quel que soit p :

$$Pr\ (k \geqslant 0) = 1 \qquad p_2\ (0) \text{ indéterminé}$$

$$Pr\ (k \leqslant n) = 1 \qquad p_1\ (n) \text{ indéterminé}$$

Il est naturel de prendre :

$$p_2\ (0) = 0 \qquad p_1\ (n) = 1$$

2. 4. — Interprétation des intervalles (F) en termes de fréquence d'obtention d'une conclusion exacte :

Etude du cas simple :

$$n = 5 \qquad 1 - \alpha = 90\ \% \qquad \frac{\alpha}{2} = 5\ \% = 0,05$$

La distribution du nombre de défectueux k pour un échantillon de 5 est donnée dans le tableau II (Annexe) pour des valeurs de p de 0,01 en 0,01.

On y lit directement $p_1\ (j)$ et $p_2\ (j)$ à 0,01 près (approximation très suffisante)

$$Pr\ (k \leqslant j/p_1\ (j)) = Pr\ (k \geqslant j/p_2(j)) = 0,05 = 5\ \%$$

Ces valeurs sont transcrites dans le tableau I.

On a pris par convention : $p_2\ (0) = 0 \qquad p_1\ (5) = 1$
(les valeurs correspondant à $p > 0,50$ s'obtiennent par symétrie).

La figure 4 reproduit les abaques correspondants.

TABLEAU 1 : **Intervalles (F) pour $n = 5$; $1 - \alpha = 90\%$**

j	$p_2(j)$	$p_1(j)$
0	0	0,45
1	0,01	0,66
2	0,08	0,81
3	0,19	0,92
4	0,34	0,99
5	0,55	1

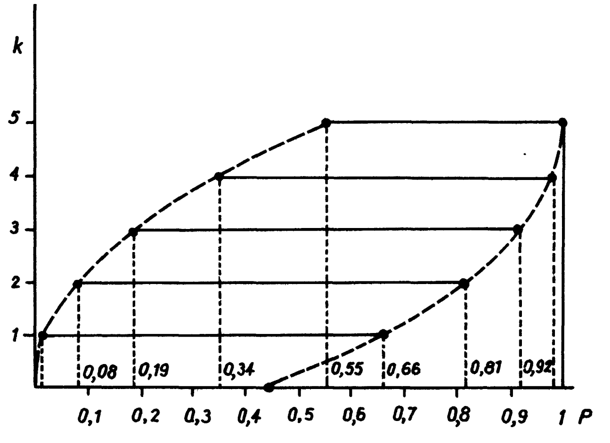

Fig. 4

I. — Tirage dans un lot contenant une proportion p de défectueux égale à une des valeurs extrémités $p_1(j)$ ou $p_2(j)$:

Exemple 1 : $p = 0,19 = p_2(3)$.

L'intervalle (F) contient p (conclusion exacte ; réussite) lorsque $k = 0, 1, 2, 3$.

Par construction : $Pr(k \geqslant 3/p = 0,19) = 5\%$.

Risque d'erreur : $Pr(k > 3/p = 0,19) < 5\% = \alpha/2 < \alpha$

Fréquence de réussite : $Pr(k \leqslant 3/p = 0,19) > 95\% = 1 - \alpha/2 > 1 - \alpha$

Exemple 2 : $p = 0,45 = p_1(0)$.

L'intervalle (F) contient p (conclusion exacte ; réussite) lorsque $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Pour $p' = 0,55 = p_2(5) > p$, on a : $Pr(k \geqslant 5/p' = 0,55) = 5\%$

Or : $Pr(k \geqslant j/p)$ pour j fixé est une fonction croissante de p (propriété classique de la distribution binomiale, de même $Pr(k \leqslant j/p)$, j donné est fonction décroissante de p).

Donc : $Pr(k \geqslant 5/p = 0,45) < Pr(k \geqslant 5/p' = 0,55) = 5\% = \frac{\alpha}{2}$

Risque d'erreur : $< \frac{\alpha}{2} < \alpha$

Fréquence de réussite : $> 1 - \frac{\alpha}{2} > 1 - \alpha$.

2. — Tirages dans un lot de proportion p quelconque :

Exemple : $0{,}45 < p < 0{,}55$

L'intervalle (F) contient p lorsque $k = 1, 2, 3, 4$.

On a ici :

$$\Pr(k = 0/p) < \Pr(k = 0/0{,}45) = \frac{\alpha}{2} = 5\ \%$$
$$\Pr(k \geqslant 5/p) < \Pr(k \geqslant 5/0{,}55) = \frac{\alpha}{2} = 5\ \%$$

Risque d'erreur :

$$\Pr(k = 0) + \Pr(k = 5) < \alpha$$

Fréquence de réussite :

$$\Pr(1 \leqslant k \leqslant 4) > 1 - \alpha.$$

Ces résultats sont facilement généralisables pour p et n quelconques, en raison de la propriété signalée plus haut :

$$\begin{cases} \Pr(k \geqslant j/p) & \text{fonction croissante de p pour j et n donnés ;} \\ \Pr(k \leqslant j/p) & \text{fonction décroissante de p pour j et n donnés.} \end{cases}$$

Conclusion :

Les intervalles du type (F) de niveau $1 - \alpha$ correspondent à un niveau de confiance (au sens de Neyman) au moins égal à $1 - \alpha$.

En général, tout au moins pour des valeurs peu élevées de l'effectif n, le niveau au sens de Neyman aura un minimum assez nettement supérieur à $1 - \alpha$.

D'autre part, les intervalles du type (N), de niveau $\geqslant 1 - \alpha$, construits selon les règles indiquées au paragraphe 2. 2, seront, en général, **plus courts** que les intervalles (F).

Si l'on adopte la définition du niveau de confiance d'après Neyman, c'est-à-dire si l'on désire se fixer une valeur minima pour le risque d'erreur, on aura des intervalles plus courts, donc meilleurs, en opérant comme indiqué au paragraphe 2. 2.

3. — Construction des tables donnant des intervalles de confiance (N) :

1. — Niveaux de confiance :

Nous estimons que deux séries de tables sont suffisantes en pratique :

— première série correspondant à $1 - \alpha \geqslant 90\ \%$,

— deuxième série correspondant à $1 - \alpha \geqslant 99\ \%$.

2. — Construction :

L'approximation de 0,01 pour les extrémités des intervalles nous paraît très suffisante. Nous construirons les intervalles d'après les règles indiquées au paragraphe 2. 2, en utilisant les tables existantes de la distribution binomiale pour $p = 0{,}01\ (0{,}01)\ 0{,}50$.

Nous donnons ci-après, comme exemple, la construction d'intervalles (N) pour $1 - \alpha \geqslant 90\ \%$ et $n = 5$.

Les tables pour diverses valeurs de n jusqu'à $n = 50$, et pour $1 - \alpha \geqslant 90\ \%$ et $1 - \alpha \geqslant 99\ \%$ sont actuellement en préparation. Elles seront très prochainement publiées.

ANNEXE

Constructions d'intervalles (N) pour :

$$n = 5 \qquad\qquad 1 - \alpha \geqslant 90\,\%$$

Le tableau II donne la distribution du nombre de défectueux k pour $n = 5$ et des valeurs de p de 1/100 en 1/100.

Un simple examen de la colonne $k = 0$ montre :

— que pour $p \leqslant 0{,}02$, on peut prendre l'intervalle composé du seul point $k = 0$;

— que pour $0{,}02 < p < 0{,}37$, l'intervalle comportera nécessairement le point $k = 0$

$$[\Pr(k = 0) > 10\,\%].$$

Pour $0{,}02 < p < 0{,}37$, nous examinerons donc les probabilités correspondant à $0 \leqslant k \leqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, etc...

Cet examen donne :

Valeurs de p	Intervalles
$p < 0{,}02$	$k = 0$
$0{,}02 < p < 0{,}11$	$k = 0{,}1$
$0{,}11 < p < 0{,}25$	$k = 0,\ 1,\ 2$
$0{,}25 < p < p_i \leqslant 0{,}42$	$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Ces résultats sont reproduits dans le tableau III.

Fixation de p_i : l'intervalle $0 \leqslant k \leqslant 3$ convient jusqu'à $p = 0{,}42$. On peut, si l'on veut, prendre plus tôt un intervalle pseudo central $1 \leqslant k \leqslant 4$. Nous adopterons ici $p_i = 0{,}40$, la probabilité de $0 \leqslant k \leqslant 3$ devenant a partir de cette valeur inférieure à la probabilité de $1 \leqslant k \leqslant 4$ (nous diminuerons ainsi un peu le risque d'erreur). Le choix influe d'ailleurs peu sur les intervalles.

$0{,}25 < p < 0{,}40$	$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
$0{,}40 < p < 0{,}50$	$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

Nous arrivons à un intervalle symétrique pour $p = 0{,}50$.

Pour $p > 0{,}50$: on complétera par symétrie.

La simple lecture du tableau de distribution permet donc de dresser le tableau III

— 1re colonne : valeurs de p pour lesquelles l'intervalle change ;

— 2e colonne : intervalle (points de l'intervalle indiqués par des croix) ;

— 3e colonne : probabilités limites de l'intervalle.

Intervalles de confiance : ils s'obtiennent par lecture verticale du tableau III

Valeur minima de $1 - \alpha$ $89{,}6\,\% \cong 90\,\%$.

Valeur maxima : c'est toujours 100 % si l'on considère toutes les valeurs de p : pour $p = 0$ la probabilité d'obtenir 0 défectueux est 1 ; si l'on expérimente sur un lot sans défectueux, l'intervalle de confiance contient toujours $p = 0$.

Nous avons indiqué dans le tableau III les valeurs limites de P.

Comparaison avec les intervalles (F) ($1 - \alpha = 90\,\%$) :

En rapprochant le tableau I du paragraphe 2. 4 et le tableau IV ci-dessus, on voit que les intervalles (N) sont nettement plus courts que les intervalles (F).

Ce résultat est assez général.

TABLEAU II. — **Distribution binomiale, n = 5**

Probabilité de : (en %)

p	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	0⩽k⩽1	0⩽k⩽2	0⩽k⩽3	1⩽k⩽4
0,01	95,1	4,8	0,1	0,0	0,0	0,0	99,9	100		
2	90,4	9,2	0,4	0,0	0,0	0,0	99,6	100		
3	85,9	13,3	0,8	0,0	0,0	0,0	99,2	100		
4	81,5	17,0	1,4	0,1	0,0	0,0	98,5	99,9		
5	77,4	20,4	2,1	0,1	0,0	0,0	97,7	99,8		
6	73,4	23,4	3,0	0,2	0,0	0,0	96,8	99,7		
7	69,6	26,2	3,9	0,3	0,0	0,0	95,8	99,6		
8	65,9	28,7	5,0	0,4	0,0	0,0	94,6	99,5		
9	62,4	30,9	6,1	0,6	0,0	0,0	93,3	99,4		
0,10	59,0	32,8	7,3	0,8	0,0	0,0	91,9	99,2	100	
1	55,8	34,5	8,5	1,1	0,1	0,0	90,3	98,9	99,9	
2	52,8	36,0	9,8	1,3	0,1	0,0	88,8	98,6	99,9	
3	49,8	37,2	11,1	1,7	0,1	0,0		98,2	99,8	
4	47,0	38,3	12,5	2,0	0,2	0,0		97,7	99,8	
5	44,4	39,2	13,8	2,4	0,2	0,0		97,3	99,8	
6	41,8	39,8	15,2	2,9	0,3	0,0		96,8	99,7	
7	39,4	40,3	16,5	3,4	0,3	0,0		96,3	99,6	
8	37,1	40,7	17,9	3,9	0,4	0,0		95,6	99,6	
9	34,9	40,9	19,2	4,5	0,5	0,0		94,9	99,4	
0,20	32,8	41,0	20,5	5,1	0,6	0,0		94,2	99,3	
1	30,8	40,9	21,7	5,8	0,8	0,0		93,4	99,2	
2	28,9	40,7	23,0	6,5	0,9	0,1		92,6	99,0	
3	27,1	40,4	24,2	7,2	1,1	0,1		91,6	98,9	
4	25,4	40,0	25,3	8,0	1,3	0,1		90,7	98,7	
5	23,7	39,6	26,4	8,8	1,5	0,1		89,6	98,4	
6	22,2	39,0	27,4	9,6	1,7	0,1		88,6	98,2	
7	20,7	38,3	28,4	10,5	1,9	0,1			97,9	
8	19,3	37,6	29,3	11,4	2,2	0,2			97,6	
9	18,0	36,8	30,1	12,3	2,5	0,2			97,3	
0,30	16,8	36,0	30,9	13,2	2,8	0,2			96,9	
1	15,6	35,1	31,6	14,2	3,2	0,3			96,5	
2	14,5	34,2	32,2	15,2	3,6	0,3			96,1	
3	13,5	33,2	32,8	16,1	4,0	0,4			95,6	
4	12,5	32,3	33,2	17,1	4,4	0,5	*décroissant* ↓		95,1	
5	11,6	31,2	33,6	18,1	4,9	0,5			94,6	
6	10,7	30,2	34,0	19,1	5,4	0,6			94,0	
7	9,9	29,1	34,2	20,1	5,9	0,7			93,4	89,4
8	9,2	28,1	34,4	21,1	6,5	0,8			92,7	90.0
9	8,4	27,0	34,5	22,1	7,1	0,9			92,0	90,7
0,40	7,8	25,9	34,6	23,0	7,7	1,0		*décroissant* ↓	91,3	91,2
1	7,1	24,8	34,5	24,0	8,3	1,2			90,5	91,7
2	6,6	23,8	34,4	24,9	9,0	1,3			89,7	92,1
3	6,0	22,7	34,2	25,8	9,7	1,5			88,8	92,5
4	5,5	21,6	34,0	26,7	10,5	1,6				92,8
5	5,0	20,6	33,7	27,6	11,3	1,8				93,1
6	4,6	19,6	33,3	28,4	12,1	2,1				93,3
7	4,2	18,5	32,9	29,2	12,9	2,3			*décroissant* ↓	93,5
8	3,8	17,5	32,4	29,9	13,8	2,5				93,6
9	3,5	16,6	31,8	30,6	14,7	2,8				93,7
0,50	3,1	15,6	31,3	31,3	15,6	3,1	18,7	50,0	81,2	93,8

TABLEAU III

Hypothèse : $n = 5 \qquad 1 - \alpha \geqslant 90\,\%$

p	Intervalle (N) 0	1	2	3	4	5	P = Probabilité de l'intervalle (en %)	
0,01	x						95,1	
0,02	x						90,4	
0,03	x	x					99,2	99,6 (1)
0,11	x	x					90,3	
0,12	x	x	x				98,6	98,9
0,25	x	x	x				89,6	
0,26	x	x	x	x			98,2	98,4
0,40	x	x	x	x			91,3	
0,41		x	x	x	x		91,7	91,2
0,50		x	x	x	x		93,8	
0,59		x	x	x	x			
0,60			x	x	x	x		
0,74			x	x	x	x		
0,75				x	x	x		
0,88				x	x	x		
0,89					x	x		
0,97					x	x		
0,98						x		

(1) — 99,6 % est la probabilité de l'intervalle $0 \leqslant k \leqslant 1$ pour $p = 0{,}02$

TABLEAU IV

Hypothèse : $n = 5 \qquad 1 - \alpha \geqslant 90\,\%$

Nombre de défectueux dans l'échantillon k	Intervalle de confiance (p_2, p_1) p_2	p_1
0	0 —	0,40
1	0,02 —	0,60
2	0,11 —	0,75
3	0,25 —	0,89
4	0,40 —	0,98
5	0,60 —	1