

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. VESSEREAU

Réduction de la dispersion par des associations systématiques

Revue de statistique appliquée, tome 2, n° 2 (1954), p. 49-77

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1954__2_2_49_0

© Société française de statistique, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉDUCTION DE LA DISPERSION PAR DES ASSOCIATIONS SYSTÉMATIQUES

par

A. VESSEREAU

Le problème auquel on a cherché des solutions théoriques, et dont on trouvera des exemples d'application dans la deuxième partie de cet article, s'est trouvé posé de la façon suivante :

Une marchandise, constituée d'un grand nombre de petits éléments (poudre, grains, brins, etc...) est vendue en paquets d'un poids déterminé m_0 . Les pesées, qu'elles aient été faites mécaniquement ou à la main, ne sont pas rigoureusement exactes, de sorte que les poids réels se dispersent autour de m_0 , suivant une loi que nous supposons approximativement normale, caractérisée par un écart-type σ_0 .

On constate très généralement que m_0 et σ_0 varient dans le même sens, et souvent qu'il y a à peu près proportionnalité entre ces deux nombres. Si donc on fabrique des paquets de poids moyen $\frac{m_0}{2}$ l'écart-type sera à peu près $\frac{\sigma_0}{2}$, la dispersion relative restant approximativement la même.

Imaginons que, pour constituer un paquet, on assemble deux éléments de poids moyen $\frac{m_0}{2}$ et d'écart-type $\frac{\sigma_0}{2}$.

1) Si l'on associe systématiquement un élément de poids $\frac{m_0}{2} - x$ et un élément de poids $\frac{m_0}{2} + x$ les paquets auront tous rigoureusement le même poids. Mais ce procédé est évidemment sans intérêt, car il obligerait à peser (et à classer) tous les éléments.

2) Si l'on associe deux éléments de façon rigoureusement quelconque, les poids se disperseront autour de la moyenne m_0 , avec un écart-type $(\frac{\sigma_0}{2})\sqrt{2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} = 0,707\sigma_0$; on aura donc amélioré la dispersion, et ce résultat reste vrai, même s'il n'y a pas exacte proportionnalité entre la moyenne et l'écart-type.

3) Mais on peut aussi envisager, sans qu'il en résulte de grandes complications, d'associer systématiquement un élément « léger » (poids inférieur à $\frac{m_0}{2}$) et un élément « lourd » (poids supérieur à $\frac{m_0}{2}$) ; il est quasi évident qu'on aura une meilleure compensation qu'avec l'association au hasard et que la dispersion des paquets sera plus faible.

4) On peut généraliser cette idée de bien des façons. Par exemple :

a) Partir d'éléments de poids moyen $\frac{m_0}{4}$; les associer deux à deux comme il vient d'être dit ; puis associer à nouveau de la même façon deux éléments doubles de poids moyen $\frac{m_0}{2}$;

b) Partir d'éléments de poids moyen $\frac{m_0}{3}$; les séparer en « légers » ($x < \frac{m_0}{3} - d$), « moyens » ($\frac{m_0}{3} - d < x < \frac{m_0}{3} + d$) et « lourds » ($x > \frac{m_0}{3} + d$) ; associer de façon systématique un élément pris dans chacune de ces classes ;

c) Partir d'éléments de poids moyen $\frac{m_0}{4}$; les séparer en 4 classes ($x < \frac{m_0}{4} - d$; $\frac{m_0}{4} - d < x < \frac{m_0}{4}$; $\frac{m_0}{4} < x < \frac{m_0}{4} + d$; $x > \frac{m_0}{4} + d$) ; associer de façon systématique un élément pris dans chacune de ces classes.

Les résultats obtenus avec ces diverses modalités d'associations seront décrits dans la première partie de cet article. Dans une deuxième partie, on envisagera leur application à des problèmes pratiques (pesées, etc...). Enfin, en appendice, le lecteur pourra trouver, s'il le désire, leur justification théorique.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS.

I Nous adopterons les notations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{densité de la loi normale réduite})$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (\text{fonction de distribution de la loi normale réduite})$$

$$\theta(x) = \int_{-x}^{+x} f(t) dt$$

$$F(x) = \frac{1+\theta(x)}{2} \quad \text{si } x > 0 \quad F(x) = \frac{1-\theta(x)}{2} \quad \text{si } x < 0$$

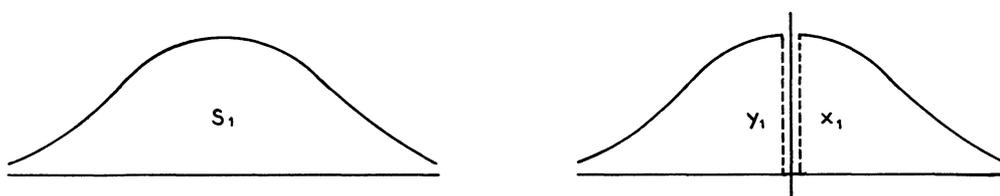
2 Diverses distributions « dérivées de la loi de Laplace-Gauss » seront utilisées. Nous les définissons de la façon suivante :

Variable S_1 . — Pour permettre des notations générales, S_1 désigne une variable normale, de moyenne nulle et d'écart-type σ .

Variables X_1, Y_1, S_2 (étudiées en Appendice paragraphe I).

1) X_1 et Y_1 sont les variables représentées respectivement par la moitié droite ($0 \leq x_1 < \infty$) et la moitié gauche ($-\infty \leq y_1 < 0$) de la distribution de S_1 .

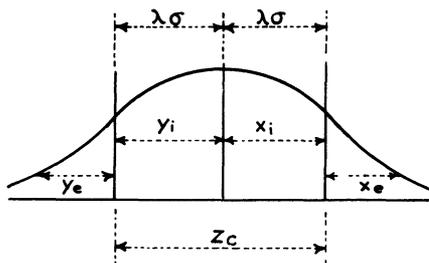
S_2 $X_1 \cdot Y_1$ est la somme de variables X_1 et Y_1 indépendantes.



Lorsqu'on effectue sur S_2 la même « dichotomie » que sur S_1 , on donne naissance à deux variables : X_2 ($0 \leq x_2 < \infty$) et Y_2 ($-\infty \leq y_2 < 0$) ; la somme de variables X_2 et Y_2 indépendantes est désignée par S_4 . La distribution de ces nouvelles variables est étudiée en Appendice, paragraphe II.

Variable Z_c ; variables X_e, Y_e et S_e ; variables X_i, Y_i et S_i .

La définition de ces variables (qui sont étudiées en Appendice, paragraphe III) résulte de la découpe de la distribution de S_1 en 3 ou 4 classes centrées sur l'origine (intervalles $\pm \lambda \sigma$, λ étant un nombre quelconque).



Z_e est la variable « centrale » : $(-\lambda\sigma \leq z_c \leq +\lambda\sigma)$

X_i et Y_i sont les variables « intérieures » : $(0 \leq x_i \leq \lambda\sigma ; -\lambda\sigma \leq y_i \leq 0)$

$S_i = X_i + Y_i$ est la somme de variables X_i et Y_i indépendantes : $(-\lambda\sigma \leq s_i \leq +\lambda\sigma)$

X_e et Y_e sont les variables « extérieures » : $(\lambda\sigma \leq x_e < \infty ; -\infty < y_e \leq -\lambda\sigma)$

$S_e = X_e + Y_e$ est la somme de variables X_e et Y_e indépendantes $(-\infty < s_e < +\infty)$

PREMIÈRE PARTIE

RÉSULTATS OBTENUS AVEC DIFFÉRENTES MODALITÉS D'ASSOCIATIONS SYSTÉMATIQUES

De nombreuses combinaisons d'associations systématiques peuvent être envisagées, en vue d'obtenir, par réunion de plusieurs éléments, une dispersion aussi réduite que possible autour de la moyenne désirée.

1) Nous nous limiterons au cas où le nombre de ces éléments est 2, 3 ou 4. Nous désignerons leurs moyennes par m_2, m_3, m_4 ; si m_0 est la moyenne désirée, on aura $m_0 = 2m_2 = 3m_3 = 4m_4$. Nous désignerons leurs écarts-types (distribution supposée normale) par $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$; s'il y a proportionnalité entre moyenne et écart-type, on aura :

$$\sigma_0 = 2\sigma_2 = 3\sigma_3 = 4\sigma_4$$

2) Avant assemblage, les éléments peuvent être séparés une seule fois en deux classes, deux fois de suite en deux classes, ou bien encore en 3 ou 4 classes.

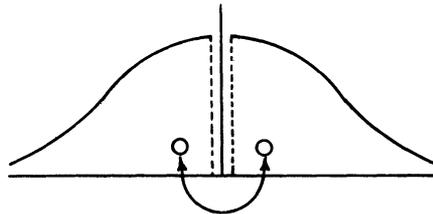
A. — ASSOCIATION DE DEUX ÉLÉMENTS (m_2, σ_2)

A 1. — Association au hasard (pour mémoire).

La distribution résultante est normale, avec pour écart-type $\sigma_2\sqrt{2} = 1,4142\sigma_2$, soit $0,707\sigma_0$ si $\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}$.

A 2. — Séparation en deux classes et association systématique d'un élément $< m_2$ et d'un élément $> m_2$. (Cf. Appendice, paragraphe I : Loi de S_2).

La distribution résultante est non gaussienne avec pour écart-type $\sqrt{2(1 - \frac{2}{\pi})}\sigma_2 = 0,852\sigma_2$. Si $\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}$, cet écart-type devient $0,426\sigma_0$.



A 3. — Séparation en 3 classes ($m < m_2 - \lambda\sigma_2 ; m_2 - \lambda_2\sigma < m < m_2 + \lambda\sigma_2 ; m > m_2 + \lambda_2\sigma_2$).

La valeur arbitraire de λ définit l'étendue de la classe centrale. On associe :

- soit deux éléments pris dans chacune des classes extérieures ;
- soit deux éléments pris au hasard dans la classe centrale.

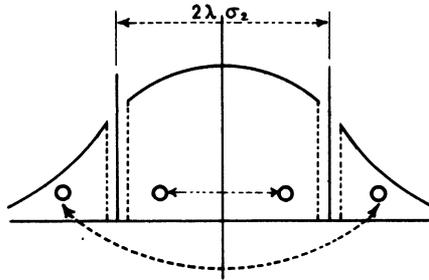
Dans le 1^{er} cas (Appendice, § III, Loi de S_e), la distribution résultante est non gaussienne, de variance :

$$2 \left[1 + \frac{\lambda f(\lambda)}{1 - F(\lambda)} - \frac{f^2(\lambda)}{[1 - F(\lambda)]^2} \right] \sigma_2^2$$

Dans le 2^e cas (Appendice, § III, Loi de Z_0), la distribution est encore non gaussienne, de variance :

$$2 \left[1 - \frac{2\lambda f(\lambda)}{2F(\lambda)-1} \right] \sigma_2^2$$

Dans la production des éléments de moyenne m_2 , les deux modes d'association se présentent avec des fréquences représentées par $1-\theta(\lambda)$ et $\theta(\lambda)$. Compte tenu de ces fréquences, on trouve pour écart-type de la distribution (non gaussienne) de l'ensemble de tous les éléments associés :



$$\sqrt{2 - \frac{4f^2(\lambda)}{1-F(\lambda)}} \sigma_2$$

Cet écart-type dépend naturellement de la valeur choisie pour λ . Il est minimum lorsque λ est solution de

$$f(\lambda) = 2\lambda [1 - F(\lambda)]$$

ce qui donne pour λ une valeur voisine de 0,6 (un peu supérieure à 0,6). L'écart-type minimum correspondant est très voisin de $0,617\sigma_2$.

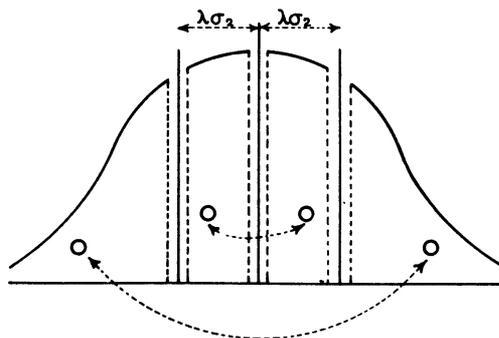
Si l'on désire que les deux modes d'association se produisent avec des fréquences égales, il faut $\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$; $\lambda = 0,67449$. On trouve alors pour écart-type $0,620\sigma_2$, valeur très voisine du minimum. Si $\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}$, l'écart-type a pour valeur $0,310\sigma_0$.

A 4. — Séparation en 4 classes ($m < m_2 - \lambda\sigma_2$; $m_2 - \lambda\sigma_2 < m < m_2$; $m_2 < m < m_2 + \lambda\sigma_2$; $m > m_2 + \lambda\sigma_2$).

On associe :

- soit deux éléments pris au hasard dans chacune des 2 classes extérieures ;
- soit deux éléments pris au hasard dans chacune des 2 classes intérieures.

Dans le 1^{er} cas, la distribution résultante est non gaussienne (l'expression de la variance a été donnée ci-dessus en A 3).



Dans le 2^e cas (Appendice, § III, loi de S_i), la distribution est encore non gaussienne, de variance :

$$\left[2 - \frac{8}{[\theta(\lambda)]^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - f(\lambda) \right)^2 + \frac{4\lambda f(\lambda)}{\theta(\lambda)} \right] \sigma_2^2$$

Dans la production des éléments de moyenne m_2 , les deux modes d'association se présentent avec les fréquences respectives $1 - \theta(\lambda)$ et $\theta(\lambda)$. On trouve ici, pour l'écart-type de la distribution (non gaussienne) de l'ensemble de tous les éléments associés :

$$\sigma = \sqrt{2 - \frac{4f^2(\lambda)}{1-F(\lambda)} - \frac{8\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - f(\lambda)\right]^2}{2F(\lambda)-1}} \sigma_2$$

Le minimum de cette expression (que l'on recherche par des approximations successives) a lieu pour une valeur de λ voisine de 1 (un peu inférieure à 1).

L'écart-type minimum est voisin de $0.485\sigma_2$, soit $0.242\sigma_0$ si $\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}$.

Si l'on désire que les deux modes d'association se produisent avec des fréquences égales, il faut $\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$; $\lambda = 0.67449$. L'écart-type a alors pour valeur $0.528\sigma_2 = 0.264\sigma_0$ si $\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}$.

Cette valeur est un peu supérieure à la valeur minimum.

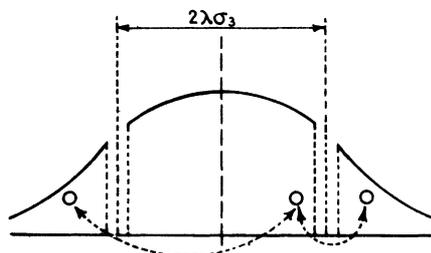
B. — ASSOCIATION DE TROIS ÉLÉMENTS (m_3, σ_3)

B 1. — Association au hasard (pour mémoire).

La distribution résultante est gaussienne, avec pour écart-type $\sqrt{3}\sigma_3 = 1.732\sigma_3$ soit $0.577\sigma_0$ si $\sigma_3 = \frac{\sigma_0}{3}$.

B 2. — Séparation en trois classes ($m < m_3 - \lambda\sigma_3$; $m_3 - \lambda\sigma_3 < m < m_3 + \lambda\sigma_3$; $m > m_3 + \lambda\sigma_3$).

On associe trois éléments pris au hasard dans chacune des classes.



L'élément résultant peut être considéré comme la somme de deux éléments pris au hasard, l'un dans la distribution de S_e , l'autre dans la distribution de Z_c (Appendice, § III).

Les variances correspondantes (dont les expressions ont déjà été données) sont :

$$\sigma_e^2 = 2 \left[1 + \frac{\lambda f(\lambda)}{1-F(\lambda)} - \frac{f^2(\lambda)}{[1-F(\lambda)]^2} \right] \sigma_3^2$$

$$\sigma_c^2 = \left[1 - \frac{2\lambda f(\lambda)}{2F(\lambda)-1} \right] \sigma_3^2$$

Il est ici obligatoire que $\theta(\lambda) = \frac{1}{3}$, soit $\lambda = 0.43074$. La distribution résultante est non gaussienne, avec un écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_c^2}$$

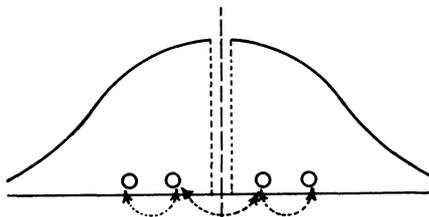
la valeur de cette expression étant prise pour $\lambda = 0.43074$. On trouve ainsi $0.788\sigma_3$, soit $0.263\sigma_0$ si $\sigma_3 = \frac{\sigma_0}{3}$.

C. — ASSOCIATION DE QUATRE ÉLÉMENTS (m_4, σ_4)

C 1. — Association au hasard (pour mémoire).

La distribution résultante est gaussienne, avec pour écart-type $2\sigma_4$, soit $0,5\sigma_0$ si $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$.

C 2. — Séparation en deux classes et association systématique de deux éléments $< m_4$ pris au hasard et de deux éléments $> m_4$ également pris au hasard.



Ce dispositif se ramène à celui décrit en A_2 ; il suffit de remplacer σ_2 par σ_4 et de multiplier par $\sqrt{2}$ l'écart-type de la distribution résultante. Celle-ci est donc non gaussienne et d'écart-type $2\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}\sigma_4 = 1,206\sigma_4$. Si $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$, l'écart-type devient $0,302\sigma_0$.

C 3. — Séparation en deux classes ; association systématique d'un élément $< m_4$ et d'un élément $> m_4$; séparation en deux classes des éléments doubles ; association systématique d'un élément $< 2m_4$ et d'un élément $> 2m_4$.

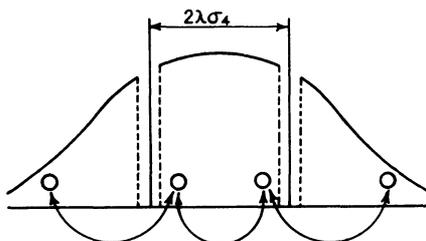
La distribution résultante est non gaussienne (Appendice § II) et a pour écart-type :

$$2\sqrt{\frac{8\sqrt{2} + \pi - 14}{\pi}}\sigma_4 = 0,761\sigma_4$$

soit, si $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$, $0,190\sigma_0$.

C 4. — Séparation en trois classes ($m < m_4 - \lambda\sigma_4$; $m_4 - \lambda\sigma_4 < m < m_4 + \lambda\sigma_4$; $m > m_4 + \lambda\sigma_4$).

Association de deux éléments pris au hasard dans la classe centrale et d'un élément pris dans chacune des classes extérieures.



La distribution obtenue résulte de la somme :

— d'un élément pris au hasard dans la distribution de S_e (Appendice § III) de variance :

$$\sigma_e^2 = 2 \left[1 + \frac{\lambda f(\lambda)}{1 - F(\lambda)} - \frac{f^2(\lambda)}{[1 - F(\lambda)]^2} \right] \sigma_4^2$$

— et de deux éléments pris au hasard dans la distribution de Z_c (Appendice § III), dont la variance est :

$$\sigma_c^2 = \left[1 - \frac{2\lambda f(\lambda)}{2F(\lambda) - 1} \right] \sigma_4^2$$

Il est obligatoire que $\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$, soit $\lambda = 0,67449$.

La distribution résultante est non gaussienne, de variance :

$$\sigma_e^2 + 2\sigma_c^2$$

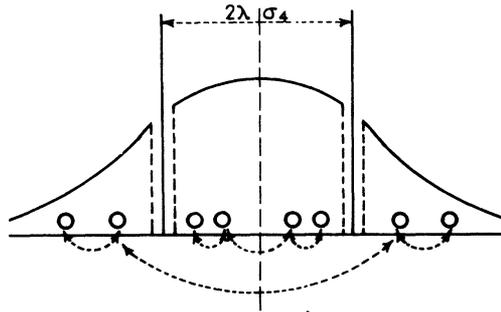
cette expression étant prise pour $\lambda = 0.67449$. On trouve ainsi pour écart-type de la distribution résultante $0.877\sigma_4$.

(C'est, multipliée par $\sqrt{2}$, et en remplaçant σ_2 par σ_4 , la valeur trouvée en A_3 dans le cas particulier $\lambda = 0.67449$).

Si l'on suppose $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$, l'écart-type devient $0.219\sigma_0$.

C 5. — Même séparation qu'en C 4. — On associe :

- soit deux éléments pris au hasard dans chacune des classes extérieures ;
- soit quatre éléments pris au hasard dans la classe centrale.



Ce dispositif se ramène à celui décrit en A_3 , en remplaçant σ_2 par σ_4 , et en multipliant par $\sqrt{2}$ l'écart-type de la distribution résultante. Dans le cas général (λ quelconque) celui-ci a donc pour expression :

$$2\sqrt{1 - \frac{2f^2(\lambda)}{1-F(\lambda)}} \sigma_4 \quad (\text{distribution non gaussienne}).$$

Il est minimum lorsque λ satisfait à la condition :

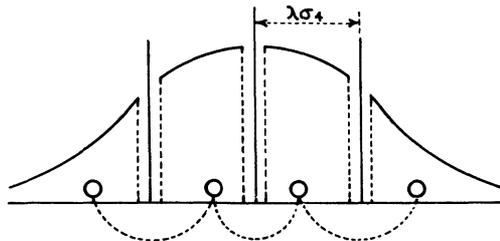
$$f(\lambda) = 2\lambda [1 - F(\lambda)]$$

qui donne pour λ une valeur très voisine de 0,6 (un peu supérieure à 0.6) ; la valeur correspondante de l'écart-type est très voisine de $0.873\sigma_4$, soit $0.218\sigma_0$ si l'on suppose $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$.

Si l'on désire que les deux modes d'association se produisent avec des fréquences égales, il faut $\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$, $\lambda = 0.67449$. L'écart-type a alors pour valeur $0.877\sigma_4$ ($0.219\sigma_0$, si $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$) valeur très voisine de la valeur minimum.

C 6. — Séparation en 4 classes ($m < m_4 - \lambda\sigma_4$; $m_4 - \lambda\sigma_4 < m < m_4$; $m_4 < m < m_4 + \lambda\sigma_4$; $m > m_4 + \lambda\sigma_4$).

Association systématique d'un élément pris au hasard dans chacune des classes :



La distribution obtenue résulte de la somme de deux éléments pris au hasard, l'un dans la distribution de S_e , l'autre dans la distribution de S_i (Appendice § III).

Les variances correspondantes (σ_e^2 et σ_i^2) ont déjà été exprimées dans les pages qui précèdent.

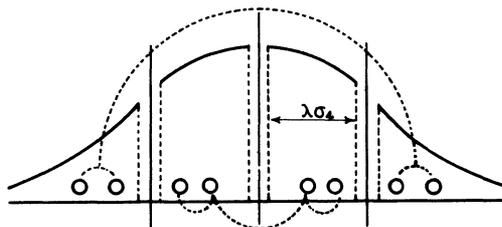
Il faut obligatoirement $\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$, soit $\lambda = 0.67449$. L'écart-type résultant (distribution non gaussienne) est :

$$\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_i^2}$$

la valeur de cette expression étant prise pour $\lambda = 0.67449$. On trouve ainsi $0.747\sigma_4$, soit $0.187\sigma_0$, si $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$. C'est, multipliée par $\sqrt{2}$, et en remplaçant σ_2 par σ_4 , la valeur trouvée en A 4, dans le cas particulier $\lambda = 0.67449$.

C 7. — Même séparation qu'en C 6. — On associe :

- soit deux éléments pris au hasard dans chacune des 2 classes extérieures ;
- soit deux éléments pris au hasard dans chacune des 2 classes intérieures.



Ce dispositif se ramène à celui décrit en A 4 ; il suffit de remplacer σ_2 par σ_4 et de multiplier par $\sqrt{2}$ l'écart-type de la distribution résultante.

Dans le cas général (λ quelconque), celui-ci a pour expression :

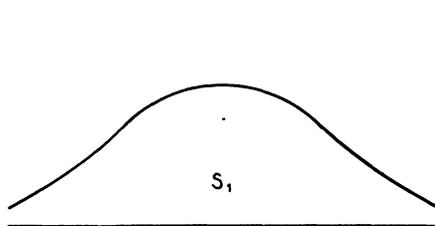
$$2 \sqrt{1 - \frac{2f^2(\lambda)}{1-F(\lambda)} - \frac{4 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - f(\lambda) \right]^2}{2F(\lambda)-1}} \sigma_4 \quad (\text{distribution non gaussienne}).$$

Il est minimum pour une valeur de λ voisine de 1 (un peu inférieure à 1). Avec la valeur approchée $\lambda = 1$, on trouve $0.686 \sigma_4$ (soit $0.171 \sigma_0$, si $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$).

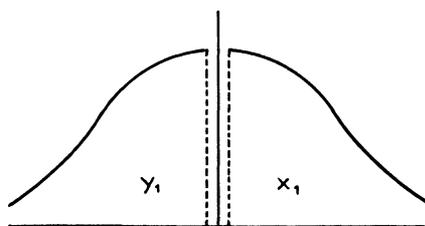
Si l'on désire que les deux modes d'association se produisent avec des fréquences égales, il faut $\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$, soit $\lambda = 0.67449$. L'écart-type a alors pour valeur $0.747 \sigma_4$ ($0.187 \sigma_0$ lorsque $\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{4}$). Cette valeur est la même que celle qui résulte du dispositif C 6.

RÉCAPITULATION DES RÉSULTATS ET CONCLUSIONS

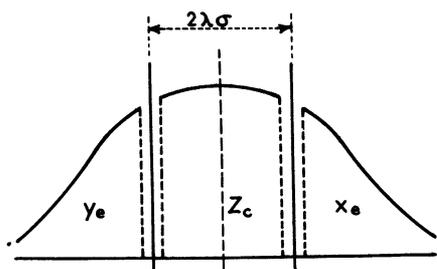
Le tableau ci-après récapitule les résultats précédents. Les symboles utilisés pour les différents modes de séparation et d'association résultent des schémas suivants :



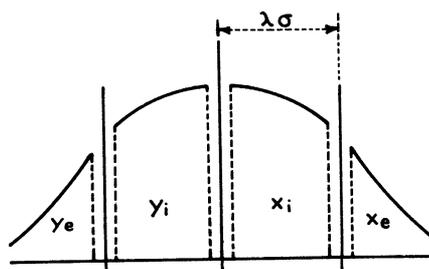
Type I
(Pas de séparation)



Type II
(Séparation en 2 classes)



Type III
(Séparation en 3 classes)



Type IV
(Séparation en 4 classes)

Les lettres G et NG désignent respectivement une distribution gaussienne ou non gaussienne.

Lorsque l'écart-type résultant dépend de λ (séparation en 3 ou 4 classes), les subdivisions (a) et (b) ont la signification suivante :

(a) écart-type minimum ;

(b) écart-type correspondant à une égale fréquence des deux modes d'association adoptés.

| RÉFÉRENCE | CARACTÉRISTIQUE de la distribution (gaussienne) des éléments associés | NOMBRE d'éléments associés | TYPE de séparation | MODE d'association | NATURE de la distribution résultante | ÉCART-TYPE résultant en fonction de σ_n | VALEUR de cet écart-type dans l'hypothèse $\sigma_n = \frac{\sigma_o}{n}$ |
|-----------|---|----------------------------|--------------------|--|--------------------------------------|--|---|
| A 1 | $m_2 = \frac{m_o}{2}; \sigma_2$ | 2 | I | $[2 S_1]$ | G | $1.414 \sigma_2$ | $0.707 \sigma_o$ |
| A 2 | | 2 | II | $[X_1 + Y_1]$ | NG | $0.852 \sigma_2$ | $0.426 \sigma_o$ |
| A 3 | | 2 | III | $[X_e + Y_e]$ $[2 Z_c]$ | NG | (a) $0.617 \sigma_2$ (b) $0.620 \sigma_2$ | $0.308 \sigma_o$ $0.310 \sigma_o$ |
| A 4 | | 2 | IV | $[X_e + Y_e]$ $[X_i + Y_i]$ | NG | (a) $0.485 \sigma_2$ (b) $0.528 \sigma_2$ | $0.242 \sigma_o$ $0.264 \sigma_o$ |
| B 1 | $m_3 = \frac{m_o}{3}; \sigma_3$ | 3 | I | $[3 S_1]$ | G | $1.732 \sigma_3$ | $0.577 \sigma_o$ |
| B 2 | | 3 | III | $[X_e + y_e + Z_c]$ | NG | $0.788 \sigma_3$ | $0.263 \sigma_o$ |
| C 1 | $m_4 = \frac{m_o}{4}; \sigma_4$ | 4 | I | $[4 S_1]$ | G | $2.000 \sigma_4$ | $0.500 \sigma_o$ |
| C 2 | | 4 | II | $[2 X_1 + 2 Y_1]$ | NG | $1.206 \sigma_4$ | $0.302 \sigma_o$ |
| C 3 | | 4 | (II) ² | $[X_1 + Y_1]^2$ | NG | $0.761 \sigma_4$ | $0.190 \sigma_o$ |
| C 4 | | 4 | III | $[X_e + Y_e + 2 Z_c]$ | NG | $0.877 \sigma_4$ | $0.219 \sigma_o$ |
| C 5 | | 4 | III | $[2 X_e + 2 Y_e]$ $[4 Z_c]$ | NG | (a) $0.873 \sigma_4$ (b) $0.877 \sigma_4$ | $0.218 \sigma_o$ $0.219 \sigma_o$ |
| C 6 | | 4 | IV | $[X_e + Y_e + X_i + Y_i]$ | NG | $0.747 \sigma_4$ | $0.187 \sigma_o$ |
| C 7 | | 4 | IV | $[2 X_e + 2 Y_e]$ $[2 X_i + 2 Y_i]$ | NG | (a) $0.686 \sigma_4$ (b) $0.747 \sigma_4$ | $0.171 \sigma_o$ $0.187 \sigma_o$ |

Il était logiquement utile d'étudier les modalités d'association qui sont récapitulées dans le tableau précédent. Mais il est bien évident que toutes n'ont pas le même intérêt pratique. On constate que les dispositifs les plus compliqués n'apportent pas toujours un avantage considérable, comparés aux dispositifs les plus simples. Il faut aussi, pour interpréter correctement les résultats, remarquer que la réduction de dispersion provient à la fois des compensations qui résultent d'associations systématiques et du fait que l'écart-type de chacun des « petits éléments » associés est généralement plus petit que l'écart-type d'un élément complet produit directement.

1) Admettons tout d'abord que l'écart-type est indépendant de la moyenne ($\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_0$).

Le dispositif le plus simple (A 2) réduit l'écart-type à $0.85\sigma_0$

L'association de 3 éléments (B 2) le réduit à $0.79\sigma_0$

L'association de 4 éléments par double dichotomie (C 3) donne $0.76\sigma_0$

Il faut des dispositifs compliqués, tels que A_4 et C_7 pour obtenir un écart-type compris entre 0.5 et $0.7\sigma_0$.

2) Supposons maintenant que l'écart-type est rigoureusement proportionnel à la moyenne ($\sigma_n = \frac{\sigma_0}{n}$).

Les valeurs précédentes deviennent :

| | |
|----------------------------|----------------|
| Dispositif A_2 | $0.43\sigma_0$ |
| » B_2 | $0.26\sigma_0$ |
| » C_3 | $0.19\sigma_0$ |

L'écart-type le plus petit ($0.17\sigma_0$) correspond au dispositif le plus compliqué (C_7).

La proportionnalité (au moins approximative) entre m et σ est sans doute le cas le plus général : on verra que cette propriété est très exactement respectée dans les exemples traités dans la deuxième partie. Elle présente une analogie évidente avec la constance de l'erreur relative associée à une méthode et un appareil de mesure.

Dans une fabrication en série « contrôlée », l'écart-type d'une caractéristique des objets produits (ici, le poids des paquets) a une valeur déterminée qui dépend du type et de l'état de la machine, de la régularité des matières premières, etc... Réduire l'écart-type (amélioration de la dispersion) ne se peut qu'en changeant quelque chose dans la technique de fabrication. De telles modifications — parmi lesquelles se rangent les dispositifs d'association systématique que nous avons étudiés — entraînent inévitablement des frais plus ou moins importants. Quels avantages peut-on mettre en regard ?

Dans le cas d'une marchandise vendue en paquets d'un poids déterminé, le client peut exiger d'avoir **au minimum** ce poids dans chaque paquet. Le fabricant doit donc régler sa fabrication sur une valeur moyenne dépassant ce minimum, la dépassant d'autant plus que la dispersion est plus forte : d'où une perte, ou un gaspillage de matière.

Plus généralement, il arrive que le client soit plus sensible à la régularité du produit qu'il achète qu'à son niveau moyen de qualité. Ce cas se présente, par exemple, lorsque les objets sont utilisés un à un, et que certains d'entre eux doivent être rebutés, faute d'une valeur suffisante pour une caractéristique essentielle : le client pourra consentir à payer plus cher une marchandise plus régulière qui lui donnera moins de déchets à l'emploi.

En définitive, le fabricant et le consommateur sont, l'un et l'autre, intéressés à l'amélioration de régularité des produits ; c'est au fabricant de s'assurer que les modifications de technique envisagées dans ce but sont effectivement rentables.

Il est bien évident, enfin, que des dispositifs de séparations puis associations, du type de ceux que nous avons étudiés, ne sauraient s'appliquer à n'importe quelle caractéristique de n'importe quel produit.

DEUXIÈME PARTIE

EXEMPLES D'APPLICATION PRATIQUE

I. — VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE CERTAINS RÉSULTATS THÉORIQUES

Dans la fabrication mécanique des cigares, le tabac qui constitue l'intérieur de chaque unité est puisé dans un réservoir au moyen d'une sorte de pince, puis introduit dans une chambre de compression où s'effectue un dosage volumétrique. On a apporté à ce mécanisme quelques modifications, de façon à pouvoir recueillir commodément les « pincées » et à modifier à volonté le poids moyen de celles-ci.

Dans les deux essais dont les résultats vont être donnés, les pincées ont été recueillies, pesées et numérotées dans l'ordre où elles se sont succédées ; on a pu ensuite les associer suivant le mode désiré.

1^{er} ESSAI. — 200 pincées ont été recueillies, dont la distribution des poids figure dans le tableau I (colonne 0). Le poids moyen est 19 g. 3, l'écart-type 5 g. 15. Après groupement des classes deux par deux, on constate, par un test de χ^2 , que la distribution est en assez bon accord avec une distribution normale.

TABLEAU I

| DISTRIBUTION INITIALE (0) | | ASSOCIATION (1) | | ASSOCIATION (2) | |
|---------------------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| Poids (gr) | Effectifs | Poids (gr) | Effectifs | Poids (gr) | Effectifs |
| > 30.5 | 3 | | | | |
| 29.5 — 30.5 | 1 | | | | |
| 28.5 — 29.5 | 2 | > 46.5 | 4 | > 46.5 | 2 |
| 27.5 — 28.5 | 1 | 45.5 — 46.5 | 1 | 45.5 — 46.5 | 4 |
| 26.5 — 27.5 | 13 | 44.5 — 45.5 | 2 | 44.5 — 45.5 | 4 |
| 25.5 — 26.5 | 3 | 43.5 — 44.5 | 8 | 43.5 — 44.5 | 5 |
| 24.5 — 25.5 | 17 | 42.5 — 43.5 | 6 | 42.5 — 43.5 | 8 |
| 23.5 — 24.5 | 6 | 41.5 — 42.5 | 9 | 41.5 — 42.5 | 4 |
| 22.5 — 23.5 | 9 | 40.5 — 41.5 | 8 | 40.5 — 41.5 | 5 |
| 21.5 — 22.5 | 17 | 39.5 — 40.5 | 8 | 39.5 — 40.5 | 12 |
| 20.5 — 21.5 | 18 | 38.5 — 39.5 | 12 | 38.5 — 39.5 | 12 |
| 19.5 — 20.5 | 14 | 37.5 — 38.5 | 14 | 37.5 — 38.5 | 13 |
| 18.5 — 19.5 | 18 | 36.5 — 37.5 | 7 | 36.5 — 37.5 | 7 |
| 17.5 — 18.5 | 12 | 35.5 — 36.5 | 3 | 35.5 — 36.5 | 5 |
| 16.5 — 17.5 | 18 | 34.5 — 35.5 | 3 | 34.5 — 35.5 | 5 |
| 15.5 — 16.5 | 11 | 33.5 — 34.5 | 3 | 33.5 — 34.5 | 5 |
| 14.5 — 15.5 | 8 | 32.5 — 33.5 | 1 | 32.5 — 33.5 | 0 |
| 13.5 — 14.5 | 5 | 31.5 — 32.5 | 3 | 31.5 — 32.5 | 2 |
| 12.5 — 13.5 | 7 | 30.5 — 31.5 | 3 | 30.5 — 31.5 | 4 |
| 11.5 — 12.5 | 4 | < 30.5 | 5 | < 30.5 | 3 |
| 10.5 — 11.5 | 3 | | | | |
| 9.5 — 10.5 | 5 | | | | |
| < 9.5 | 5 | | | | |
| Total | 200 | — | 100 | — | 100 |
| Moyenne | 19.3 | — | 38.6 | — | 38.6 |
| Ecart-type | 5.15 | — | 4.63 | — | 4.26 |

Les 200 pincées ont été séparées en « lourdes » (poids supérieur à 19 g. 3) et « légères » (poids inférieur à 19 g. 3). On a réalisé de deux façons l'association d'une pincée lourde et d'une pincée légère.

1) Association au hasard : On ajoute une pincée lourde tirée au sort dans la série des lourdes, et une pincée légère, également tirée au sort dans la série des légères ;

2) Association dans l'ordre de fabrication des pincées : La première pincée lourde sortie de la machine est associée à la première pincée légère, et ainsi de suite.

Les résultats obtenus figurent dans les parties (1) et (2) du tableau I.

Les écarts-types, dans ces deux modes d'association, ont été trouvés respectivement égaux à 4.63 et 4.26. D'après ce qui a été vu dans la 1^{re} partie (mode d'association A 2), l'écart-type théorique est :

$$5.15 \times 0.852 = 4.39.$$

Les valeurs expérimentales sont donc en bon accord avec la valeur théorique attendue.

2^e ESSAI. — On a recueilli 600 pincées, après avoir modifié le mécanisme de façon à abaisser le poids moyen aux environs de 13 g. La distribution des poids figure dans le tableau II, colonne 0. Le poids moyen est 12 g. 8, l'écart-type 3 g. 19. Là encore, un test de χ^2 permet de constater que la distribution est approximativement gaussienne.

a) **Association de deux pincées.** — Les 600 mesures ont été séparées en « lourdes » (poids supérieur à 12 g. 8) et « légères » (poids inférieur à 12 g. 8). Comme dans le premier essai, l'association a été faite de deux façons : au hasard (colonne a 1 du tableau II), dans l'ordre de fabrication des pincées (colonne a 2).

b) **Association de quatre pincées.** — On reprend la distribution de deux pincées associées et l'on sépare les pincées doubles en lourdes (poids supérieur à 25 g. 6) et légères (poids inférieur à 25 g. 6). On associe ensuite deux pincées lourdes et deux pincées légères, soit au hasard (colonne b 1 du tableau II), soit dans l'ordre de fabrication des pincées doubles (colonne b 2). Plus précisément, dans ce dernier cas, on associe la première pincée double lourde et la première pincée double légère obtenues elles-mêmes par association de la première pincée lourde et de la première pincée légère sortant de la machine, et ainsi de suite.

La comparaison des écarts-types observés et des écarts-types théoriques donne les résultats suivants :

a) Association de deux pincées (1^{re} partie, mode d'association A 2) :

$$\text{Ecart-type théorique } 3.19 \times 0.852 = 2.72$$

$$\gg \text{ observé (a 1) } \dots = 2.73$$

$$\gg \quad \quad \quad \text{(a 2) } \dots = 2.69$$

b) Association de quatre pincées (1^{re} partie, mode d'association C 3) :

$$\text{Ecart-type théorique } 3.19 \times 0.761 = 2.43$$

$$\gg \text{ observé (b 1) } \dots = 2.68$$

$$\gg \quad \quad \quad \text{(b 2) } \dots = 2.34$$

Dans les deux cas, on peut considérer que l'accord avec la théorie est satisfaisant.

Remarques.

1) La comparaison des moyennes et écarts-types, d'un essai à l'autre, donne :

$$1^{\text{er}} \text{ essai : } m = 19.3$$

$$2^{\text{e}} \text{ essai : } m = 12.8$$

$$\sigma = 5.15$$

$$\sigma = 3.19$$

$$\sigma/m = 0.27$$

$$\sigma/m = 0.25$$

La proportionnalité de m et σ est bien vérifiée.

2) Dans tous les cas étudiés, on trouve que l'écart-type obtenu en associant les pincées dans l'ordre de sortie de la machine est inférieur à l'écart-type obtenu par association au hasard. Cette constatation, qui est favorable au point de vue pratique, tendrait à prouver qu'il y a corrélation négative entre les pincées successives, les pincées ayant tendance à être alternativement lourdes et légères.

TABLEAU II

| DISTRIBUTION INITIALE (0) | | ASSOCIATION DE 2 PINCÉES (a) | | | ASSOCIATION DE 4 PINCÉES (b) | | |
|---------------------------|-----------|------------------------------|-----------|-------|------------------------------|-----------|-------|
| Poids (gr) | Effectifs | Poids (gr) | Effectifs | | Poids (gr) | Effectifs | |
| | | | (a 1) | (a 2) | | (b 1) | (b 2) |
| > 21.5 | 7 | | | | | | |
| 20.5 — 21.5 | 5 | > 32.5 | 3 | 6 | | | |
| 19.5 — 20.5 | 6 | 31.5 — 32.5 | 6 | 3 | > 56.5 | 6 | 4 |
| 18.5 — 19.5 | 12 | 30.5 — 31.5 | 9 | 8 | 55.5 — 56.5 | 4 | 5 |
| 17.5 — 18.5 | 24 | 29.5 — 30.5 | 8 | 11 | 54.5 — 55.5 | 7 | 6 |
| 16.5 — 17.5 | 44 | 28.5 — 29.5 | 24 | 18 | 53.5 — 54.5 | 17 | 15 |
| 15.5 — 16.5 | 43 | 27.5 — 28.5 | 33 | 33 | 52.5 — 53.5 | 23 | 22 |
| 14.5 — 15.5 | 66 | 26.5 — 27.5 | 44 | 45 | 51.5 — 52.5 | 18 | 26 |
| 13.5 — 14.5 | 55 | 25.5 — 26.5 | 43 | 54 | 50.5 — 51.5 | 27 | 31 |
| 12.5 — 13.5 | 69 | 24.5 — 25.5 | 57 | 41 | 49.5 — 50.5 | 16 | 15 |
| 11.5 — 12.5 | 83 | 23.5 — 24.5 | 26 | 33 | 48.5 — 49.5 | 11 | 12 |
| 10.5 — 11.5 | 69 | 22.5 — 23.5 | 18 | 23 | 47.5 — 48.5 | 13 | 9 |
| 9.5 — 10.5 | 44 | 21.5 — 22.5 | 15 | 14 | 46.5 — 47.5 | 3 | 3 |
| 8.5 — 9.5 | 40 | 20.5 — 21.5 | 5 | 5 | < 46.5 | 5 | 2 |
| 7.5 — 8.5 | 21 | < 20.5 | 9 | 6 | | | |
| 6.5 — 7.5 | 7 | | | | | | |
| < 6.5 | 5 | | | | | | |
| Total . . . | 600 | — | 300 | 300 | — | 150 | 150 |
| Moyenne . . | 12.8 | — | 25.6 | 25.6 | — | 51.2 | 51.2 |
| Ecart-type . | 3.19 | — | 2.73 | 2.69 | — | 2.68 | 2.34 |

II. — ESSAIS D'APPLICATION A LA FABRICATION DES TABACS A MACHER

Le tabac à mâcher n'est pas une marchandise très distinguée. Cependant, sous ses deux présentations : « carottes » et « rôles », le poids total vendu en 1953 s'est élevé à 540.000 kgs, pour une valeur, au prix de vente, de l'ordre de 1.100 millions de francs. Deux applications des méthodes de « régularisation du poids moyen par association systématique » ont été mises à l'étude par M. Cyffers, Ingénieur de la Manufacture productrice.

Régularisation du poids des « rôles » en 50 grammes.

A la sortie du « rouet » qui le fabrique, le « rôle » se présente sous la forme d'une sorte de grosse corde de 21 mm de diamètre ; celle-ci est sectionnée en tronçons de 15 cm de longueur, correspondant à un poids moyen de 50 grs. L'écart-type de la dispersion en poids est assez considérable : 10 % du poids moyen environ.

On a mis à l'étude la fabrication d'unités de 50 grs constituées de deux éléments de 25 grs emballés sous cellophane.

A cet effet, une bobine de rôle a été sectionnée en tronçons deux fois plus courts que d'habitude (7 cm 5). On a obtenu 1.146 tronçons de poids moyen 26 grs 1 ; l'écart-type était de 2 grs 63 (très exactement 10 % du poids moyen, comme dans les tronçons de 50 grs). Ces tronçons ont été séparés en 4 classes :

Très lourds : poids supérieurs à $26.1 + 2.6 = 28.7$.

Lourds : poids compris entre 26.1 et 28.7

Légers : poids compris entre 23.5 et 26.1

Très légers : poids inférieurs à $26.1 - 2.6 = 23.5$.

puis associés de la façon suivante :

(très lourd) - (très léger)
(lourd) - (léger)

(mode d'association A_4 dans le cas $\lambda = 1$).

L'écart-type constaté, sur les unités de 50 grs ainsi constituées, a été de 1.28 gr. L'écart-type théorique est :

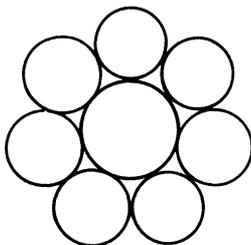
$$2.63 \times 0.485 = 1.273$$

L'accord est donc excellent.

Dans la fabrication directe des unités de 50 grs, 95 % des unités ont un poids compris entre 40 et 60 grs. Par le moyen de l'association qui vient d'être décrit, la dispersion est considérablement réduite : 95 % environ des unités ont un poids compris entre 47 grs 4 et 52 grs 6.

Réduction des catégories de vente des « carottes ».

La carotte est encore une sorte de corde de tabac, mais plus grosse que le rôle; son diamètre est de 27 mm; elle est constituée de 8 brins disposés comme l'indique la figure ci-dessous; avant assemblage, les brins sont coupés à la longueur de 54 cm. Le poids moyen d'une carotte (qui est ensuite vendue au détail par le débitant) est de l'ordre de 2 kgs, mais la dispersion est très forte. Elle oblige à constituer et à stocker séparément quatorze « catégories de vente » (déterminées après pesée individuelle de chaque carotte), ces catégories ayant des poids échelonnés de 50 en 50 grs.



La répartition des 101.394 carottes confectionnées au cours d'un semestre est indiquée dans les colonnes (1) et (2) du tableau III. L'écart-type observé est de 128,82 grs pour un poids moyen général de 2 kg, 280.

On peut espérer améliorer la dispersion par pesée, avant assemblage, de groupes de 4 brins, puis assemblage systématique de groupes « lourds » et « légers ». Le poids moyen et l'écart-type d'un groupe de 4 brins peuvent être estimés à :

$$\frac{2.280}{2} = 1 \text{ kg } 140$$

$$\frac{128.82}{\sqrt{2}} = 91.10$$

Deux solutions ont été envisagées :

Séparation des groupes en 3 classes (mode d'association A_3 , avec $\lambda = 0.6$).

Les classes sont ainsi définies :

Poids inférieur à 1 kg 085 (27.5 % des groupes)
Poids compris entre 1.085 et 1.195 . . . (45 % »)
Poids supérieur à 1 kg 195 (27.5 % »)

L'écart-type serait ramené à $91.1 \times 0.617 = 56.2$.

Séparation des groupes en 4 classes (mode d'association A_4 , avec $\lambda = 1$).

Les classes sont ainsi définies :

Poids inférieur à 1 kg 049 (16 % des groupes)
Poids compris entre 1.049 et 1.140 . . . (34 % »)
» » 1.140 et 1.231 . . . (34 % »)
Poids supérieur à 1 kg 231 (16 % »)

L'écart-type serait ramené à $91.1 \times 0.485 = 44.2$.

En supposant (ce qui n'est pas exact, mais constitue une première approximation) que les poids après assemblage se dispersent suivant une loi normale, les % dans les différentes catégories de vente prennent les valeurs qui sont indiquées dans les colonnes (3) et (4) du tableau III.

Le nombre de catégories de vente pourrait être ramené :

à six au maximum avec la 1^{re} solution ;

à quatre au maximum avec la 2^e solution.

TABLEAU III

| CATÉGORIE de vente | NOMBRE de carottes Colonne (1) | % de carottes Colonne (2) | SÉPARATION en 3 classes Colonne (3) | SÉPARATION en 4 classes Colonne (4) |
|--------------------|--------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 14 | 98 | 0.10 | — | — |
| 13 | 549 | 0.54 | — | — |
| 12 | 2025 | 2.00 | — | — |
| 11 | 4995 | 4.93 | 0.05 | — |
| 10 | 8379 | 8.26 | 1.34 | 0.26 |
| 9 | 14940 | 14.73 | 11.53 | 7.17 |
| 8 | 19305 | 19.04 | 35.09 | 39.78 |
| 7 | 19080 | 18.82 | 36.37 | 43.20 |
| 6 | 14400 | 14.20 | 13.35 | 9.22 |
| 5 | 9405 | 9.28 | 2.20 | 0.37 |
| 4 | 4896 | 4.83 | 0.07 | — |
| 3 | 2205 | 2.17 | — | — |
| 2 | 729 | 0.72 | — | — |
| 1 | 252 | 0.25 | — | — |
| 0 | 136 | 0.13 | — | — |
| Total | 101394 | 100.00 | 100.00 | 100.00 |

III. — AUTRES POSSIBILITÉS D'APPLICATION

Comme on l'a déjà noté plus haut, l'idée de réduction de la dispersion par séparations puis associations systématiques ne peut s'appliquer à n'importe quelle caractéristique de n'importe quel objet fabriqué. Cependant, il semble que l'application soit possible à d'autres domaines que celui des pesées, qui sont à l'origine de cette étude. Nous nous bornerons à évoquer — sans être en mesure de donner d'autres précisions — l'assemblage d'éléments dont les dimensions ne sont pas rigoureusement constantes, en vue d'obtenir des pièces de dimensions aussi régulières que possible (dans la construction par exemple).

APPENDICE

(Notes théoriques)

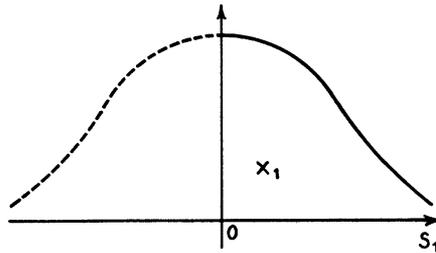
I. — ASSOCIATION SYSTÉMATIQUE APRÈS SÉPARATION EN DEUX CLASSES

(Dichotomie simple de la loi normale)

On part d'une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ . Pour permettre les généralisations qui suivent, la variable est désignée par S_1 ; sa densité de probabilité est :

$$\varphi_1(s_1) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{S_1}{\sigma}\right) \quad (-\infty \leq s_1 \leq +\infty)$$

1) Considérons la distribution représentée par la partie droite ($s_1 > 0$) de cette distribution normale.



On définit ainsi une variable X_1 , qui prend ses valeurs de 0 à $+\infty$ et dont la densité est :

$$\frac{2}{\sigma} f\left(\frac{X_1}{\sigma}\right) \quad (0 \leq x_1 < +\infty)$$

Les moments de cette variable par rapport à l'origine se calculent aisément ; on trouve :

$$\mu'_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \quad \mu'_2 = \sigma^2 \quad \mu'_3 = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^3 \quad \mu'_4 = 3 \sigma^4$$

et l'on en déduit, par les formules de transformation connues, les moments centrés et les cumulants. On trouve ainsi :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} K_2 = \mu_2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2 & K_3 = \mu_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) \sigma^3 \\ K_4 = \mu_4 - \left(3 - \frac{4}{\pi} + \frac{12}{\pi^2}\right) \sigma^4 & K_4 = 8 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{3}{\pi^2}\right) \sigma^4 \end{array} \right.$$

Si, de la même façon, on considère la distribution représentée par la partie gauche ($s_1 < 0$) de la distribution de S_1 , on définit une variable Y_1 , qui prend ses valeurs de $-\infty$ à 0, et dont la densité est encore :

$$\frac{2}{\sigma} f\left(\frac{Y_1}{\sigma}\right) \quad \text{avec} \quad -\infty \leq y_1 \leq 0$$

Ses moments et cumulants d'ordre pair sont identiques à ceux de X_1 ; ses moments et cumulants d'ordre impair ont des valeurs opposées à celles trouvées pour X_1 .

2) Considérons la somme de deux variables suivant, indépendamment l'une de l'autre, la première la loi de X_1 , le deuxième la loi de Y_1 :

$$S_2 = X_1 + Y_1$$

S_2 prend ses valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Pour obtenir sa loi de distribution, on part de la probabilité élémentaire du couple (x_1, y_1) , soit :

$$\frac{4}{\sigma^2} f\left(\frac{x_1}{\sigma}\right) f\left(\frac{y_1}{\sigma}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\infty \leq y_1 \leq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq +\infty \end{array} \right.$$

Des intégrations simples conduisent :

pour la densité de probabilité de S_2 , à l'expression :

$$\varphi_2(s_2) = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} f\left(\frac{s_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left[-\frac{|s_2|}{\sigma\sqrt{2}}\right] \quad (-\infty \leq s_2 \leq +\infty)$$

et pour la fonction de distribution à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_2(s_2) = 2F^2\left(\frac{s_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) & (s_2 < 0) \\ \Phi_2(s_2) = 1 - 2F^2\left(-\frac{s_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) & (s_2 > 0) \end{array} \right.$$

La distribution de S_2 est évidemment symétrique par rapport à l'origine. Les moments centrés et les cumulants d'ordre impair sont nuls. Les cumulants d'ordre pair s'obtiennent en additionnant les cumulants de même ordre de X_1 et Y_1 (qui sont eux-mêmes égaux). On trouve ainsi, en se reportant aux expressions (1) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_2 = \mu_2 = 2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \sigma^2 = 0,7268 \sigma^2 = (0,8525 \sigma)^2 \\ K_4 = 16 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{3}{\pi^2} \right) \sigma^4 = 0,2295 \sigma^4 \\ \mu_4 = K_4 + 3 K_2^2 = 4 \left(3 - \frac{8}{\pi} \right) \sigma^4 = 1,8141 \sigma^4 \end{array} \right.$$

(Loi de S_2)

Ainsi, la somme de deux variables prises, indépendamment l'une de l'autre, la première dans la partie « droite » et la deuxième dans la partie « gauche » d'une même distribution normale d'écart-type σ , a pour écart-type $0,8525\sigma$, alors que si les deux variables avaient été prises au hasard dans cette même distribution, l'écart-type aurait été $\sqrt{2}\sigma = 1,4142\sigma$.

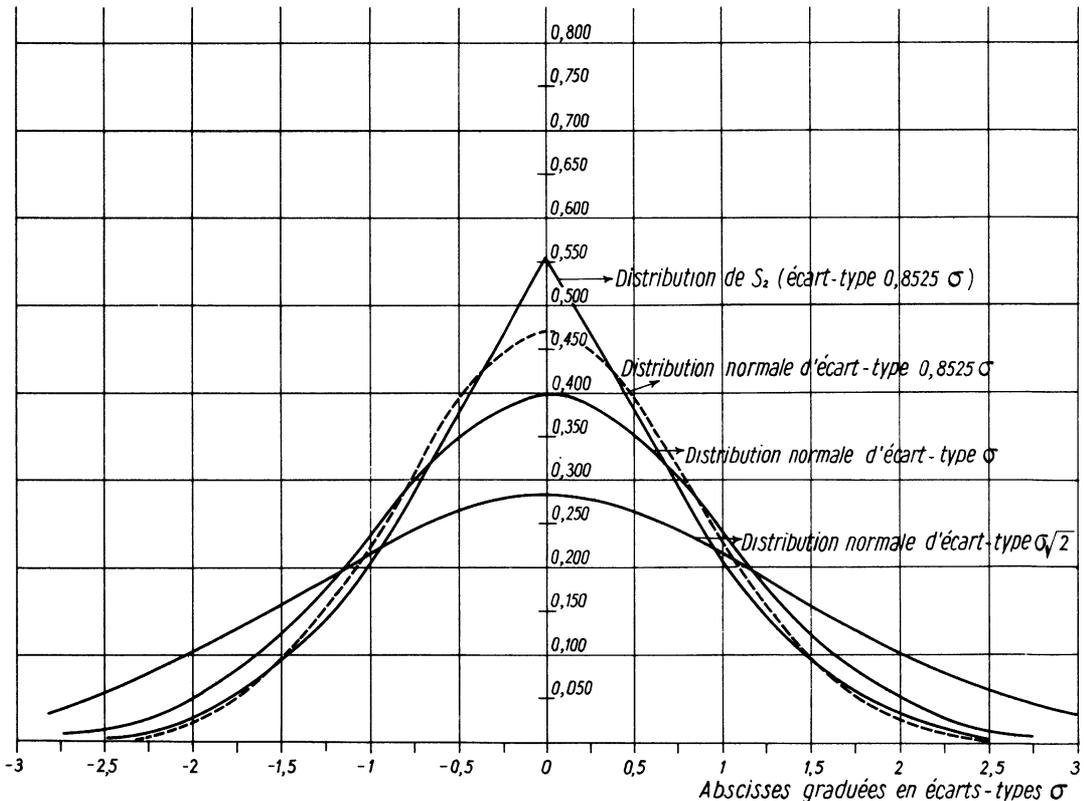
Il convient d'observer que la distribution de S_2 est symétrique, mais non normale ; le deuxième coefficient de Pearson a pour valeur :

$$\beta_2 = 3 + \frac{4(\pi - 3)}{(\pi - 2)^2} = 3,4346$$

La distribution est du type « leptokurtic » ; la courbe représentative présente un point anguleux à sa rencontre avec l'axe des ordonnées.

Sur un même graphique (G 1) on a représenté, avec une échelle conventionnelle :

- 1) La distribution normale d'écart-type σ ;
- 2) La distribution normale de la somme de deux valeurs prises au hasard dans la distribution précédente (écart-type $1,4142\sigma$) ;



G 1. — Distribution de la variable S_2

3) La distribution de S_2 (non normale) ; écart-type 0.8525σ ;

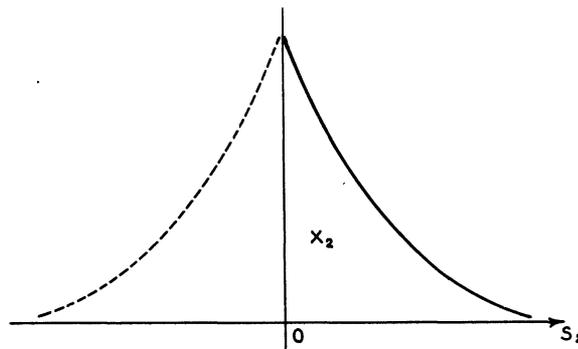
4) A titre de comparaison avec la distribution précédente, la distribution normale d'écart-type 0.8525σ .

Au moyen des tables de la loi normale, on calcule facilement les valeurs des fonctions φ_2 et Φ_2 (densité de probabilité et fonction de distribution de S_2) pour différentes valeurs de $\frac{S_2}{\sigma}$ ou $\frac{S_2}{\sigma\sqrt{2}}$. Les tables correspondantes figurent en Annexe I.

II. — ASSOCIATION SYSTÉMATIQUE APRÈS DOUBLE SÉPARATION EN DEUX CLASSES

(Dichotomie répétée de la loi normale)

On part maintenant de la loi de S_2 , telle qu'elle a été définie au paragraphe précédent.



1) En considérant la distribution représentée par la partie droite ($s_2 > 0$) de la distribution de S_2 , on définit une variable X_2 , qui prend ses valeurs de 0 à $+\infty$, et dont la densité de probabilité est :

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sigma} f\left(\frac{X_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left(-\frac{X_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (0 \leq x_2 \leq +\infty)$$

Les moments par rapport à l'origine s'obtiennent au moyen d'intégrations qui ne présentent pas de difficultés particulières. On trouve :

$$\begin{cases} \mu'_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma & \mu'_2 = 2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2 \\ \mu'_3 = \frac{16 - 10\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma^3 & \mu'_4 = 4\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \sigma^4 \end{cases}$$

Les moments centrés, obtenus au moyen des formules de transformation habituelles, ont des expressions compliquées :

$$(3) \quad \text{(Loi de } X_2 \text{)} \quad \begin{cases} K_2 = \mu_2 = \frac{2[8\sqrt{2} + \pi - 14]}{\pi} \sigma^2 \\ K_3 = \mu_3 = \frac{[368 - 248\sqrt{2} + 2\pi\sqrt{2} - 8\pi]}{\pi\sqrt{\pi}} \sigma^3 \\ \mu_4 = \frac{4[3\pi^2 - 40\pi + 24\pi\sqrt{2} + 672\sqrt{2} - 960]}{\pi^2} \sigma^4 \\ K_4 = \frac{16[11\pi - 6\pi\sqrt{2} + 336\sqrt{2} - 483]}{\pi^2} \sigma^4 \end{cases}$$

Si, de la même façon, on considère la distribution représentée par la **partie gauche** ($s_2 < 0$) de la distribution de S_2 , on définit une variable Y_2 , qui prend ses valeurs de $-\infty$ à 0 et dont la densité est :

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sigma} f\left(\frac{Y_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{Y_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \text{avec } -\infty \leq Y_2 \leq 0$$

Ses moments et cumulants d'ordre pair sont identiques à ceux de X_2 ; ses moments et cumulants d'ordre impair ont des valeurs opposées à celles trouvées pour X_2 .

2) Comme au paragraphe précédent, nous considérons la somme de deux variables suivant, indépendamment l'une de l'autre, la première la loi de X_2 , la deuxième la loi de Y_2 .

$$S_4 = X_2 + Y_2$$

S_4 prend ses valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Pour obtenir la loi de distribution de cette variable, on part de la probabilité élémentaire du couple (x_2, y_2) , soit :

$$\frac{32}{\sigma^2} f\left(\frac{x_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left(-\frac{x_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) f\left(-\frac{y_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{y_2}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \begin{cases} -\infty \leq y_2 \leq 0 \\ 0 \leq x_2 \leq +\infty \end{cases}$$

La densité de probabilité de S_4 a pour expression :

$$\varphi_4(s_4) = \frac{32}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) f\left[\frac{t-s_4}{\sigma\sqrt{2}}\right] F\left[\frac{t-s_4}{\sigma\sqrt{2}}\right] dt$$

($-\infty \leq s_4 \leq +\infty$)

La fonction de distribution s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_4(s_4) = \frac{16\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left(-\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) F^2\left(\frac{s_4-t}{\sigma\sqrt{2}}\right) dt \\ \Phi_4(-s_4) = 1 - \Phi_4(s_4) \end{array} \right. \quad \text{pour } s_4 < 0$$

Les intégrales qui figurent dans les expressions de φ_4 et Φ_4 ne peuvent pas être calculées, mais, par la méthode qui a été appliquée au paragraphe précédent, on obtient aisément les expressions des moments et cumulants. En se reportant aux formules 3, on trouve :

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_3 = K_3 = 0 \quad (\text{loi symétrique}) \\ K_2 = \mu_2 = \frac{4(8\sqrt{2} + \pi - 14)}{\pi} \sigma^2 = 0,5997 \sigma^2 = (0,7614 \sigma)^2 \\ K_4 = \frac{32[11\pi - 6\pi\sqrt{2} + 336\sqrt{2} - 483]}{\pi^2} \sigma^4 = 0,2458 \sigma^4 \\ \mu_4 = \frac{16[3\pi^2 - 62\pi + 36\pi\sqrt{2} + 6]}{\pi^2} \sigma^4 = 1,2539 \sigma^4 \end{array} \right\} \quad (\text{Loi de } S_4)$$

Ainsi, la **somme de quatre variables** prises dans une distribution normale d'écart-type σ , en **opérant deux séparations, ou « dichotomies » successives a pour écart-type 0.7614σ** , alors que si les quatre variables avaient été prises au hasard dans cette même distribution, l'écart-type aurait été 2σ .

La distribution de S_4 est symétrique, mais fortement « leptokurtic ». Le coefficient β_2 de Pearson a pour valeur :

$$\beta_2 = 3 + \frac{2[11\pi - 6\pi\sqrt{2} + 336\sqrt{2} - 483]}{(8\sqrt{2} + \pi - 14)^2} = 3,7313$$

La courbe représentant la densité de probabilité comporte un point anguleux à l'intersection avec l'axe des ordonnées.

En raison de leur expression compliquée, il n'a pas été calculé de table des fonctions φ_4 et Φ_4 .

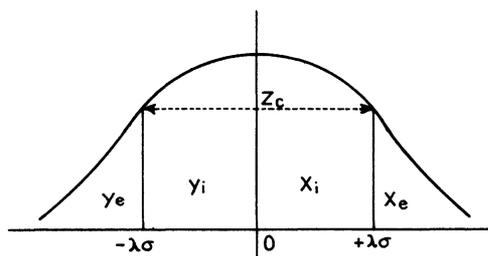
GÉNÉRALISATIONS.

On peut envisager de généraliser ce qui précède à un nombre quelconque de séparations, ou dichotomies successives. Malheureusement, les difficultés d'intégration sont insurmontables dès la deuxième dichotomie. L'étude des propriétés des sommes S pourrait sans doute être tentée par d'autres méthodes ; pour les problèmes pratiques que nous avons en vue, cela ne présentait pas d'intérêt.

III. — AUTRES ASSOCIATIONS SYSTÉMATIQUES

(Découpe de la loi normale en 3 ou 4 classes)

Un intervalle $\pm \lambda \sigma$ symétrique autour de l'origine découpe dans la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ quatre « tranches » auxquelles on fait correspondre (voir figure ci-dessous) deux variables « extérieures », X_e et Y_e , deux variables « intérieures » X_i et Y_i ainsi qu'une variable « centrale » Z_c .



La densité de probabilité de X_e est :

$$\frac{1}{\sigma F(-\lambda)} f\left(\frac{X_e}{\sigma}\right) \quad (\lambda \sigma \leq x_e \leq +\infty)$$

Elle a la même expression pour Y_e , avec $-\infty \leq y_e \leq -\lambda \sigma$.

La densité de probabilité de X_i est :

$$\frac{2}{\sigma \theta(\lambda)} f\left(\frac{X_i}{\sigma}\right) \quad (0 \leq x_i \leq \lambda \sigma)$$

Elle a la même expression pour Y_i , avec $-\lambda \sigma \leq y_i \leq 0$.

Quant à la densité de Z_c , elle est :

$$\varphi_c(z_c) = \frac{1}{\sigma \theta(\lambda)} f\left(\frac{Z_c}{\sigma}\right) \quad (-\lambda \sigma \leq z_c \leq +\lambda \sigma)$$

Loi de Z_c . — La distribution de Z_c est symétrique par rapport à l'origine ; moyenne et moments centrés d'ordre impair sont nuls. Au moyen d'intégrations simples, on trouve, pour les moments du 2^e et 4^e ordre, les expressions suivantes :

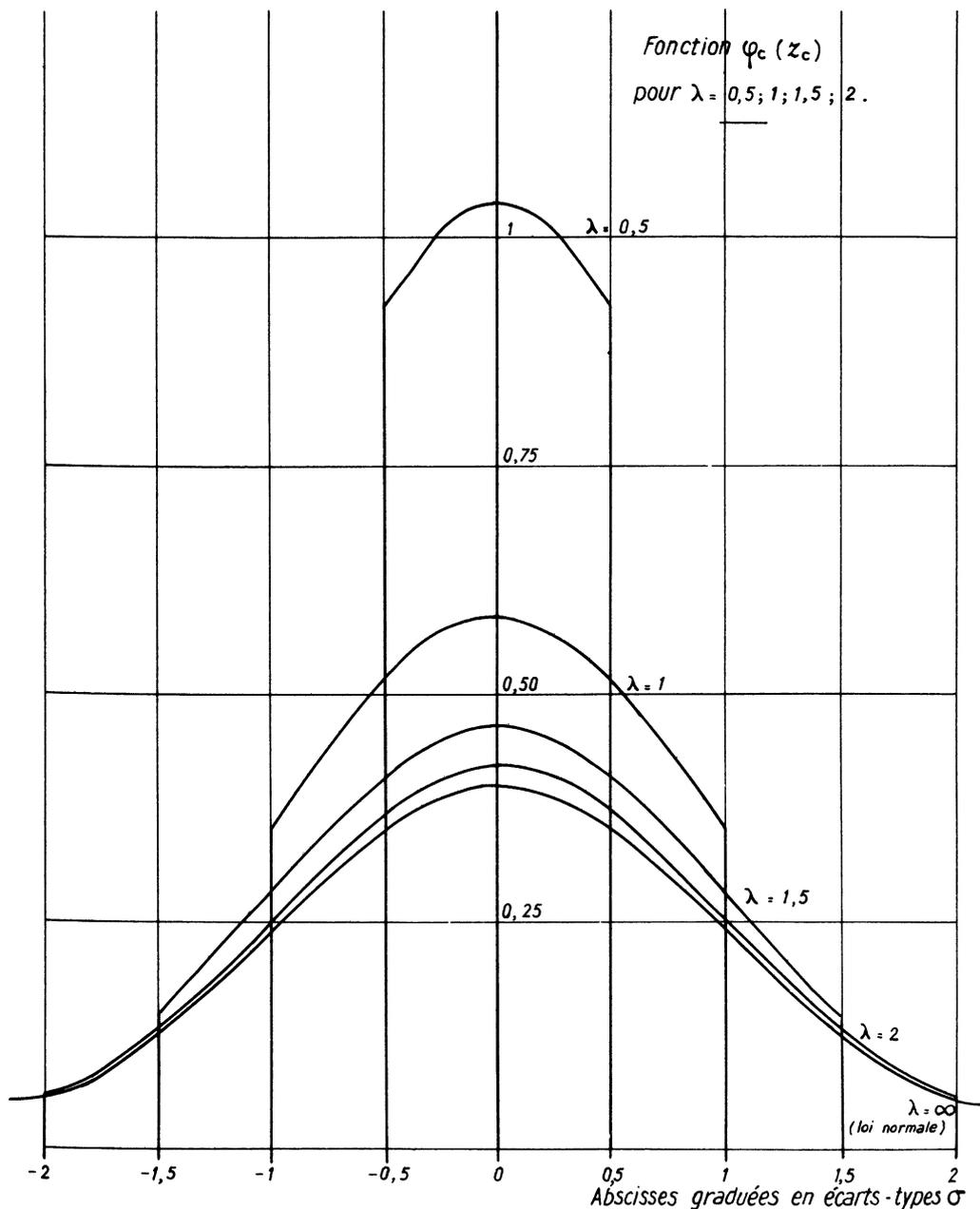
$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_c^2 = \mu_2 = [1 - h(\lambda)] \sigma^2 \\ \mu_4 = [3 - (\lambda^2 + 3) h(\lambda)] \sigma^4 \\ \text{en posant } h(\lambda) = \frac{2\lambda f(\lambda)}{2F(\lambda) - 1} \end{array} \right.$$

expressions qui se réduisent naturellement à σ^2 et $3\sigma^4$ lorsque λ est infini. Des formules précédentes on peut déduire le coefficient β_2 de Pearson.

La **fonction de distribution** a pour expression :

$$\Phi_c(z_c) = \frac{1}{\theta(\lambda)} [F\left(\frac{Z_c}{\sigma}\right) - F(-\lambda)]$$

On trouvera ci-après (graphique G 2), pour différentes valeurs de λ , la représentation graphique de la fonction $\varphi_c(z_c)$. Ses valeurs, celles de la fonction de distribution, ainsi que les valeurs de μ_2, μ_4 et β_2 , sont données en Annexe 2.



G 2. — Distribution de la variable Z_c

Loi de $S_e = X_e + Y_e$ (X_e et Y_e indépendants). — L'expression de la densité de X_e (ou Y_e) a été donnée plus haut.

$S_e = X_e + Y_e$ est la somme de deux valeurs prises, indépendamment l'une de l'autre, la première dans la « tranche extérieure droite », la deuxième dans la « tranche extérieure gauche » de la loi normale.

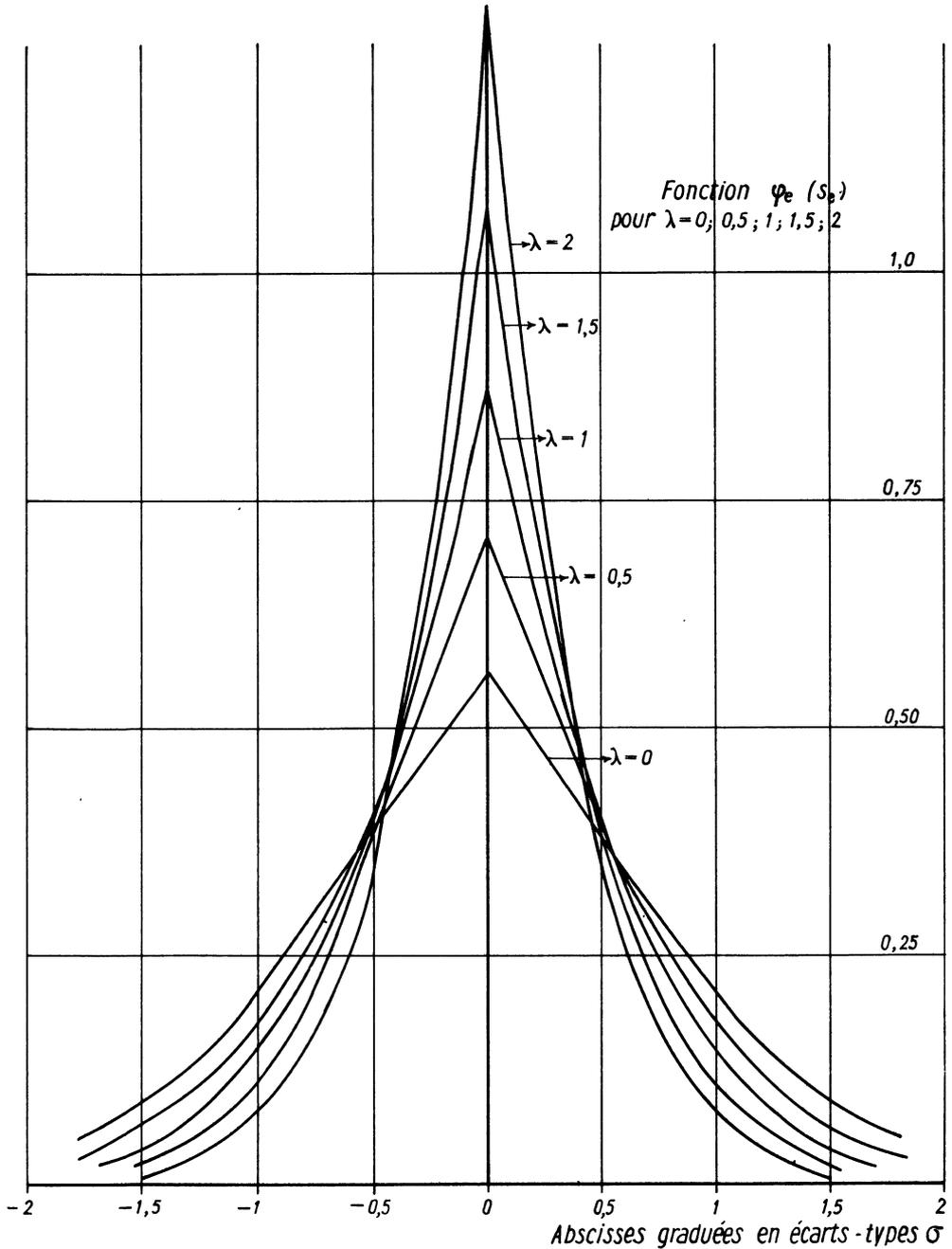
La loi du couple (X_e, Y_e) a pour densité :

$$\frac{1}{[\sigma F(-\lambda)]^2} f\left(\frac{X_e}{\sigma}\right) f\left(\frac{Y_e}{\sigma}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda\sigma \leq X_e \leq +\infty \\ -\infty \leq Y_e \leq -\lambda\sigma \end{array} \right.$$

Des intégrations simples donnent :

pour la densité de probabilité de S_e :

$$\varphi_e(s_e) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}[F(-\lambda)]^2} f\left(\frac{s_e}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left[-\sqrt{2}\lambda - \frac{|s_e|}{\sigma\sqrt{2}}\right] \quad (-\infty \leq s_e \leq +\infty)$$



G 3. — Distribution de la variable S_e

et pour la **fonction de distribution** :

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_e(s_e) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2}[F(-\lambda)]^2} \int_{-\infty}^{s_e} f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) F\left[-\sqrt{2}\lambda + \frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right] dt \\ \Phi_e(-s_e) &= 1 - \Phi_e(s_e) \end{aligned} \right. \quad \text{pour } s_e < 0$$

Dans le cas général (λ quelconque), la fonction Φ_e n'est pas intégrable. Dans le cas particulier $\lambda = 0$, on retrouve naturellement les fonctions φ_2 et Φ_2 étudiées au paragraphe 1.

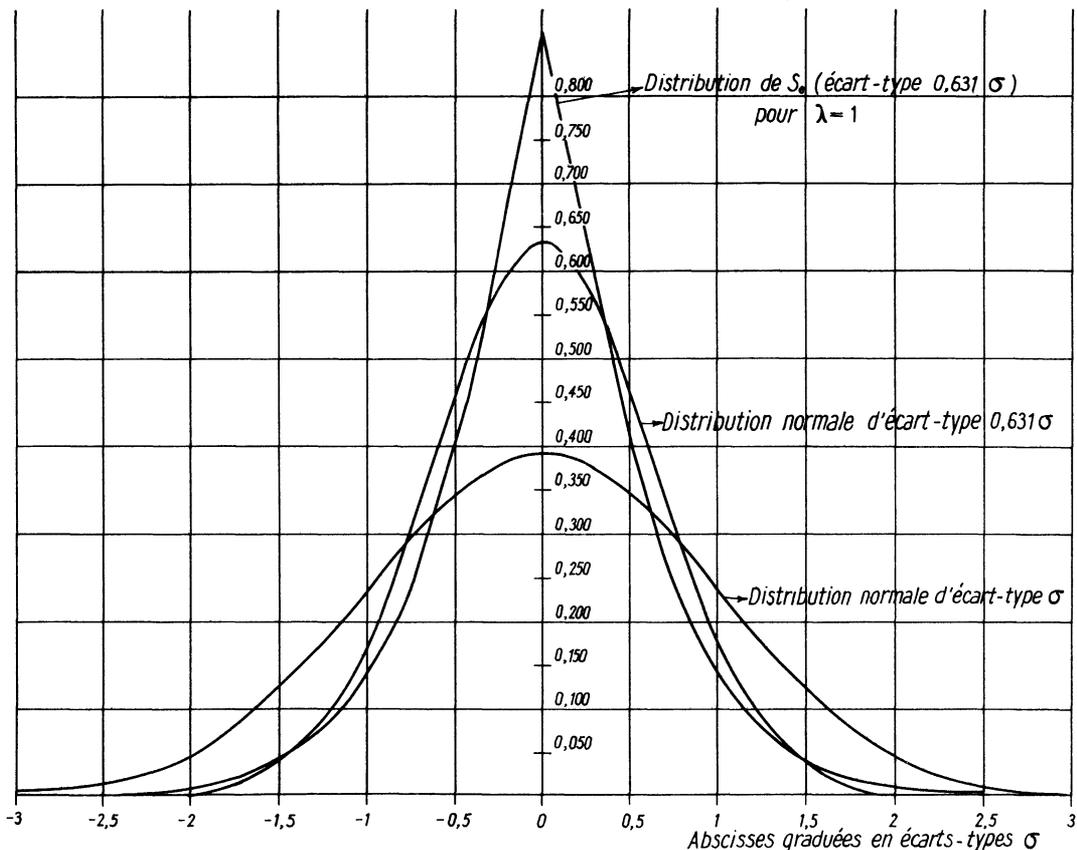
On a représenté, sur le graphique G 3, pour différentes valeurs de λ , la fonction $\varphi_e(s_e)$. La distribution de S_e est symétrique et présente un point anguleux au point $s_e = 0$. Sur un autre graphique (G 4), on a fait figurer, à titre de comparaison, la loi normale d'écart-type σ , la loi de S_e pour $\lambda = 1$, ainsi que la loi normale de même écart-type (0.631σ , voir ci-dessous) que cette dernière.

Le calcul des moments de S_e pourrait être entrepris par la même méthode qu'aux paragraphes 1 et 2. Nous nous servirons cette fois des propriétés de la fonction caractéristique. Pour X_e , la fonction caractéristique a pour expression :

$$\frac{1}{\sigma F(-\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x_e}{\sigma}\right) e^{itx_e} dx_e = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{F(i\sigma t - \lambda)}{F(-\lambda)}$$

Celle de Y_e s'obtient en changeant t en $-t$ dans l'expression précédente. Il en résulte que la fonction caractéristique de la somme $S_e = X_e + Y_e$ (variables indépendantes) est :

$$u(t) = e^{-\sigma^2 t^2} \frac{F(i\sigma t - \lambda) F(-i\sigma t - \lambda)}{[F(-\lambda)]^2}$$



G 4. — Distribution de la variable S_e

La deuxième fonction caractéristique est :

$$v(t) = \log u(t) = -\sigma^2 t^2 + \log F(i\sigma t - \lambda) + \log F(-i\sigma t - \lambda) - 2 \log F(-\lambda)$$

et l'on sait que les cumulants de tous ordres s'obtiennent en développant $V(t)$, ou en prenant les valeurs de ses dérivées successives pour $t = 0$.

On vérifie immédiatement que $V(0)$, $V'(0)$, $V'''(0)$, sont nuls (distribution symétrique). On trouve ensuite, en posant :

$$g(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{1 - F(\lambda)}$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_2 = \sigma_e^2 = 2 [1 + \lambda g(\lambda) - g^2(\lambda)] \sigma^2 \\ K_4 = 2g(\lambda) [(\lambda^3 - 3\lambda) - (7\lambda^2 - 4)g(\lambda) + 12\lambda g^2(\lambda) - 6g^3(\lambda)] \sigma^4 \end{array} \right.$$

expressions qui, pour $\lambda = 0$, prennent les valeurs respectives $2(1 - \frac{2}{\pi})\sigma^2$ et $16(\frac{1}{\pi} - \frac{3}{\pi^2})\sigma^4$ trouvées au paragraphe I, lors de l'étude de la variable S_2 .

Connaissant K_4 , on en déduit μ_4 par la relation :

$$\mu_4 = K_4 + 3 K_2^2$$

et l'on peut calculer le coefficient β_2 de Pearson.

Les valeurs de la fonction $\varphi_e(s_e)$, de μ_2 , μ_4 et β_2 sont données en Annexe III pour différentes valeurs de λ .

La distribution de S_e est du type « leptokurtic » et cela d'autant plus que λ est plus grand (cf. valeurs de β_2 , ainsi que la représentation graphique).

L'écart-type de S_e décroît lorsque λ augmente, en restant toujours inférieur à σ (sa valeur maximum a lieu pour $\lambda = 0$, et est égale à 0.8525σ). Si par exemple, éliminant toute la partie de la distribution initiale gaussienne comprise entre les abscisses $\pm\sigma$, on associe une valeur prise au hasard dans le reste « extérieur droit » et une valeur prise au hasard dans le reste « extérieur gauche », on obtient une distribution à type leptokurtic accusé ($\beta_2 \neq 4$) ayant pour écart-type 0.631σ .

Loi de $S_i = X_i + Y_i$ (X_i et Y_i indépendants). — La même méthode, appliquée aux variables « intérieures » X_i et Y_i , conduit aux résultats suivants :

1) **La densité de probabilité** et la **fonction de distribution** de la somme $S_i = X_i + Y_i$ ont les expressions suivantes :

$$\varphi_i(s_i) = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma[\theta(\lambda)]^2} f\left(\frac{s_i}{\sigma\sqrt{2}}\right) \left[F\left(\frac{-|s_i|}{\sigma\sqrt{2}} + \lambda\sqrt{2}\right) - F\left(\frac{|s_i|}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$(-\lambda\sigma \leq s_i \leq +\lambda\sigma)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_i(s_i) = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma[\theta(\lambda)]^2} \int_{-\lambda\sigma}^{s_i} f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) \left[F\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{2}} + \lambda\sqrt{2}\right) - F\left(-\frac{t}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] dt \\ \text{pour } s_i < 0 \end{array} \right.$$

$$\Phi_i(-s_i) = 1 - \Phi_i(s_i)$$

Dans le cas général (λ quelconque), la fonction Φ_i n'est pas intégrable. Pour $\lambda = \infty$, on retrouve naturellement les fonctions φ_2 et Φ_2 étudiées au paragraphe I.

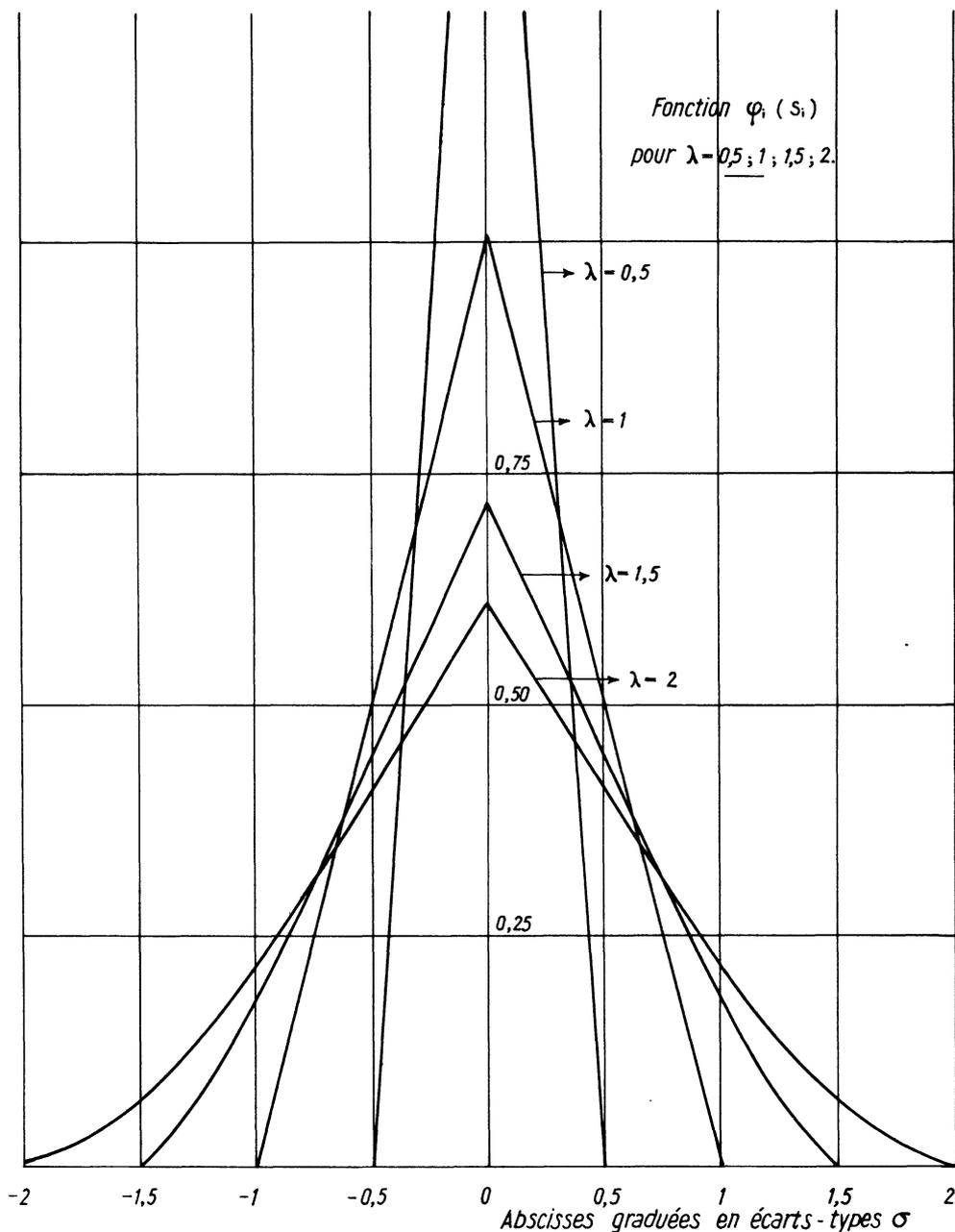
La représentation graphique de $\varphi_i(s_i)$ est indiquée ci-après, pour différentes valeurs de λ (graphique G 5). La distribution de S_i est symétrique ; elle comporte un point anguleux à sa rencontre avec l'axe des ordonnées et coupe l'axe des abscisses avec une tangente non horizontale.

2) **La première fonction caractéristique de S_i** est :

$$u(t) = \frac{4e^{-\sigma^2 t^2}}{[\theta(\lambda)]^2} [F(\lambda - i\sigma t) - F(-i\sigma t)] [F(\lambda + i\sigma t) - F(i\sigma t)]$$

et la **deuxième fonction caractéristique** est :

$$v(t) = \log U(t)$$



G 5. — Distribution de la variable S_i

3) Tous les **moments et cumulants** d'ordre impair sont nuls (distribution symétrique). La **variance** est :

$$\mu_2 = \sigma_i^2 = \left[2 - \frac{8}{[\theta(\lambda)]^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - f(\lambda) \right)^2 + \frac{4\lambda f(\lambda)}{\theta(\lambda)} \right] \sigma^2$$

(pour $\lambda = \infty$, cette expression se réduit à $2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \sigma^2$, valeur trouvée pour la variance de S_2 au paragraphe 1).

Les valeurs de $\varphi_i(s_i)$ et de la variance sont données en Annexe IV pour différentes valeurs de λ . Lorsque λ augmente, σ_i^2 croît de 0 jusqu'à la valeur limite $2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \sigma^2$; mais il faut observer que la distribution de S_i (variable limitée à l'intervalle $\pm \lambda \sigma$) est tout à fait différente d'une distribution normale de même écart-type.

4) Les **expressions de K_4 , μ_4 et β_2** sont très compliquées; on n'a pas jugé utile de les expliciter.

ANNEXE I

Table de la variable S_2

(densité $\varphi_2 (s_2)$ et fonction de distribution $\Phi_2 (s_2)$ pour $s_2 > 0$)

| S_2 | $\varphi_2 (s_2)$ | $\Phi_2 (s_2)$ |
|--------|-------------------|----------------|
| 0.0000 | 0.5642 | 0.5000 |
| 0.1414 | 0.5167 | 0.5765 |
| 0.2828 | 0.4654 | 0.6460 |
| 0.4243 | 0.4122 | 0.7080 |
| 0.5657 | 0.3589 | 0.7625 |
| 0.7071 | 0.3073 | 0.8096 |
| 0.8485 | 0.2585 | 0.8496 |
| 0.9899 | 0.2137 | 0.8829 |
| 1.1314 | 0.1736 | 0.9102 |
| 1.2728 | 0.1385 | 0.9322 |
| 1.4142 | 0.1086 | 0.9497 |
| 1.5556 | 0.0836 | 0.9632 |
| 1.6971 | 0.0632 | 0.9735 |
| 1.8385 | 0.0469 | 0.9813 |
| 1.9799 | 0.0342 | 0.9870 |
| 2.1213 | 0.0245 | 0.9911 |
| 2.2627 | 0.0172 | 0.9940 |
| 2.4042 | 0.0118 | 0.9960 |
| 2.5456 | 0.0080 | 0.9974 |
| 2.6870 | 0.0053 | 0.9983 |
| 2.8284 | 0.0035 | 0.9989 |
| 2.9698 | 0.0022 | 0.9994 |
| 3.1113 | 0.0014 | 0.9997 |

| S_2 | $\Phi_2 (s_2)$ |
|-------|----------------|
| 0.0 | 0.5000 |
| 0.1 | 0.5548 |
| 0.2 | 0.6061 |
| 0.3 | 0.6539 |
| 0.4 | 0.6979 |
| 0.5 | 0.7381 |
| 0.6 | 0.7746 |
| 0.7 | 0.8074 |
| 0.8 | 0.8366 |
| 0.9 | 0.8624 |
| 1.0 | 0.8850 |
| 1.1 | 0.9047 |
| 1.2 | 0.9215 |
| 1.3 | 0.9352 |
| 1.4 | 0.9481 |
| 1.5 | 0.9583 |
| 1.6 | 0.9667 |
| 1.7 | 0.9737 |
| 1.8 | 0.9794 |
| 1.9 | 0.9840 |
| 2.0 | 0.9876 |
| 2.1 | 0.9905 |
| 2.2 | 0.9928 |
| 2.3 | 0.9946 |
| 2.4 | 0.9960 |
| 2.5 | 0.9970 |
| 2.6 | 0.9978 |
| 2.7 | 0.9984 |
| 2.8 | 0.9989 |
| 2.9 | 0.9992 |
| 3.0 | 0.9994 |

N. B. — s_2 est exprimé avec une unité égale à l'écart-type de la distribution normale ayant engendré la distribution $\varphi_2 (s_2)$.

ANNEXE II

Table de la variable Z_c

(Densité $\varphi_c(z_c)$ et fonction de distribution $\Phi_c(z_c)$ pour $z_c > 0$)

| z_c | $f(z_c)$ (loi de gauss) | $\varphi_c(z_c)$ | | | | $\Phi_c(z_c)$ | | | |
|---------------------------|----------------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | $\lambda = 0,5$ | $\lambda = 1,0$ | $\lambda = 1,5$ | $\lambda = 2,0$ | $\lambda = 0,5$ | $\lambda = 1,0$ | $\lambda = 1,5$ | $\lambda = 2,0$ |
| 0. - | 0.39894 | 1.0420 | 0.5844 | 0.4604 | 0.4180 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.1 | 0.39695 | 1.0368 | 0.5814 | 0.4581 | 0.4159 | 0.6033 | 0.5582 | 0.5459 | 0.5418 |
| 0.2 | 0.39104 | 1.0212 | 0.5728 | 0.4513 | 0.4097 | 0.7072 | 0.6160 | 0.5915 | 0.5831 |
| 0.3 | 0.38139 | 0.9962 | 0.5587 | 0.4402 | 0.3996 | 0.8080 | 0.6726 | 0.6361 | 0.6236 |
| 0.4 | 0.36827 | 0.9619 | 0.5394 | 0.4251 | 0.3858 | 0.9060 | 0.7275 | 0.6794 | 0.6327 |
| 0.5 | 0.35207 | 0.9196 | 0.5157 | 0.4064 | 0.3689 | 1.0000 | 0.7804 | 0.7210 | 0.7007 |
| 0.6 | 0.33322 | | 0.4881 | 0.3846 | 0.3491 | | 0.8305 | 0.7605 | 0.7365 |
| 0.7 | 0.31225 | | 0.4574 | 0.3604 | 0.3271 | | 0.8778 | 0.7978 | 0.7703 |
| 0.8 | 0.28969 | | 0.4243 | 0.3344 | 0.3035 | | 0.9219 | 0.8325 | 0.8019 |
| 0.9 | 0.26609 | | 0.3898 | 0.3071 | 0.2788 | | 0.9626 | 0.8646 | 0.8310 |
| 1.0 | 0.24197 | | 0.3544 | 0.2793 | 0.2535 | | 1.0000 | 0.8939 | 0.8576 |
| 1.1 | 0.21785 | | | 0.2514 | 0.2282 | | | 0.9204 | 0.8817 |
| 1.2 | 0.19419 | | | 0.2241 | 0.2034 | | | 0.9442 | 0.9033 |
| 1.3 | 0.17137 | | | 0.1978 | 0.1795 | | | 0.9654 | 0.9225 |
| 1.4 | 0.14973 | | | 0.1728 | 0.1569 | | | 0.9838 | 0.9393 |
| 1.5 | 0.12952 | | | 0.1495 | 0.1357 | | | 1.0000 | 0.9539 |
| 1.6 | 0.11092 | | | | 0.1162 | | | | 0.9665 |
| 1.7 | 0.09405 | | | | 0.0985 | | | | 0.9772 |
| 1.8 | 0.07895 | | | | 0.0827 | | | | 0.9863 |
| 1.9 | 0.06562 | | | | 0.0688 | | | | 0.9938 |
| 2.0 | 0.05399 | | | | 0.0566 | | | | 1.0000 |
| 2.1 | 0.04398 | | | | | | | | |
| $\mu_2 = \sigma_c^2$ | | 0.0804 | 0.2911 | 0.5516 | 0.7737 | | | | |
| $\sqrt{\mu_2} = \sigma_c$ | | 0.2835 | 0.5394 | 0.7426 | 0.8796 | | | | |
| μ_4 | | 0.0114 | 0.1642 | 0.6458 | 1.4160 | | | | |
| β_2 | | 1.767 | 1.939 | 2.123 | 2.365 | | | | |

N. B. — z_c est exprimé avec une unité égale à l'écart-type de la distribution normale ayant engendré la distribution $\varphi_c(z_c)$.

ANNEXE III

Table de la variable S_e
(Densité $\varphi_e(s_e)$ pour $s_e > 0$)

| s_e | $\frac{s_e}{\sqrt{2}}$ | $f\left(\frac{s_e}{\sqrt{2}}\right)$ (loi de gauss) | $\varphi_e(s_e)$ | | | | |
|---------------------------|------------------------|--|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | | $\lambda = 0$ | $\lambda = 0,5$ | $\lambda = 1,0$ | $\lambda = 1,5$ | $\lambda = 2,0$ |
| 0.0000 | 0.- | 0.39894 | 0.5642 | 0.7104 | 0.8809 | 1.0712 | 1.2754 |
| 0.1414 | 0.1 | 0.39695 | 0.5167 | 0.6186 | 0.7241 | 0.8276 | 0.9274 |
| 0.2828 | 0.2 | 0.39104 | 0.4654 | 0.5332 | 0.5891 | 0.6323 | 0.6622 |
| 0.4243 | 0.3 | 0.38139 | 0.4122 | 0.4446 | 0.4630 | 0.4670 | 0.4585 |
| 0.5657 | 0.4 | 0.36827 | 0.3589 | 0.3669 | 0.3600 | 0.3413 | 0.3119 |
| 0.7071 | 0.5 | 0.35207 | 0.3073 | 0.2974 | 0.2743 | 0.2443 | 0.2116 |
| 0.8485 | 0.6 | 0.33322 | 0.2585 | 0.2366 | 0.2057 | 0.1716 | 0.1366 |
| 0.9899 | 0.7 | 0.31225 | 0.2137 | 0.1848 | 0.1511 | 0.1182 | 0.0896 |
| 1.1314 | 0.8 | 0.28969 | 0.1736 | 0.1418 | 0.1090 | 0.0799 | 0.0594 |
| 1.2728 | 0.9 | 0.26609 | 0.1385 | 0.1068 | 0.0772 | 0.0531 | 0.0363 |
| 1.4142 | 1.0 | 0.24197 | 0.1086 | 0.0789 | 0.0535 | 0.0326 | 0.0198 |
| 1.5556 | 1.1 | 0.21785 | 0.0836 | 0.0572 | 0.0365 | 0.0221 | 0.0119 |
| 1.6971 | 1.2 | 0.19419 | 0.0632 | 0.0407 | 0.0244 | 0.0138 | |
| 1.8385 | 1.3 | 0.17137 | 0.0469 | 0.0285 | 0.0160 | 0.0084 | |
| 1.9799 | 1.4 | 0.14973 | 0.0342 | 0.0195 | 0.0102 | 0.0050 | |
| 2.1213 | 1.5 | 0.12952 | 0.0245 | 0.0131 | 0.0065 | 0.0031 | |
| 2.2627 | 1.6 | 0.11092 | 0.0172 | 0.0087 | 0.0040 | 0.0018 | |
| 2.4042 | 1.7 | 0.09405 | 0.0118 | 0.0056 | 0.0024 | 0.0009 | |
| 2.5456 | 1.8 | 0.07895 | 0.0080 | 0.0036 | 0.0014 | 0.0005 | |
| 2.6870 | 1.9 | 0.06562 | 0.0053 | 0.0022 | 0.0008 | | |
| 2.8284 | 2.0 | 0.05399 | 0.0035 | 0.0014 | 0.0005 | | |
| 2.9698 | 2.1 | 0.04398 | 0.0022 | 0.0007 | 0.0003 | | |
| 3.1113 | 2.2 | 0.03547 | 0.0014 | 0.0005 | 0.0001 | | |
| 3.2527 | 2.3 | 0.02833 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0001 | | |
| 3.3941 | 2.4 | 0.02239 | 0.0005 | 0.0002 | | | |
| 3.5355 | 2.5 | 0.01753 | 0.0003 | 0.0001 | | | |
| 3.6769 | 2.6 | 0.01358 | 0.0002 | | | | |
| 3.8184 | 2.7 | 0.01042 | 0.0001 | | | | |
| $\mu_2 = \sigma_e^2$ | | | 0.7268 | 0.5369 | 0.3984 | 0.2994 | 0.22 |
| $\sqrt{\mu_2} = \sigma_e$ | | | 0.853 | 0.733 | 0.631 | 0.547 | 0.48 |
| μ_4 | | | 1.81 | 1.08 | 0.63 | 0.38 | 0.23 |
| β_2 | | | 3.4 | 3.7 | 4.0 | 4.3 | 4.6 |

N. B. — s_e est exprimé avec une unité égale à l'écart-type de la distribution normale ayant engendré la distribution $\varphi_e(s_e)$.

ANNEXE IV

Table de la variable S_i
(Densité $\varphi_i (s_i)$ pour $s_i > 0$)

| s_i | $\frac{s_i}{\sqrt{2}}$ | $f\left(\frac{s_i}{\sqrt{2}}\right)$ (loi de gauss) | $\varphi_i (s_i)$ | | | | |
|---------------------------|------------------------|--|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | | $\lambda = 0$ | $\lambda = 0,5$ | $\lambda = 1,0$ | $\lambda = 1,5$ | $\lambda = 2,0$ |
| 0.0000 | 0.0 | 0.39894 | — | 2.0023 | 1.0201 | 0.7261 | 0.6164 |
| 0.1414 | 0.1 | 0.39695 | — | 1.4418 | 0.8812 | 0.6560 | 0.5632 |
| 0.2828 | 0.2 | 0.39104 | — | 0.8720 | 0.7376 | 0.5841 | 0.5095 |
| 0.4243 | 0.3 | 0.38139 | — | 0.2954 | 0.5775 | 0.4999 | 0.4456 |
| 0.5657 | 0.4 | 0.36827 | — | — | 0.4237 | 0.4192 | 0.3853 |
| 0.7071 | 0.5 | 0.35207 | — | — | 0.2742 | 0.3398 | 0.3264 |
| 0.8485 | 0.6 | 0.33322 | — | — | 0.1344 | 0.2639 | 0.2703 |
| 0.9899 | 0.7 | 0.31225 | — | — | 0.0083 | 0.1934 | 0.2184 |
| 1.1314 | 0.8 | 0.28969 | — | — | — | 0.1295 | 0.1714 |
| 1.2728 | 0.9 | 0.26609 | — | — | — | 0.0733 | 0.1298 |
| 1.4142 | 1.0 | 0.24197 | — | — | — | 0.0251 | 0.0938 |
| 1.5556 | 1.1 | 0.21785 | — | — | — | — | 0.0634 |
| 1.6971 | 1.2 | 0.19419 | — | — | — | — | 0.0382 |
| 1.8385 | 1.3 | 0.17137 | — | — | — | — | 0.0179 |
| 1.9799 | 1.4 | 0.14973 | — | — | — | — | 0.0020 |
| 2.1213 | 1.5 | 0.12952 | — | — | — | — | — |
| $\mu_2 = \sigma_i^2$ | | | — | 0.0416 | 0.1598 | 0.3298 | 0.5031 |
| $\sqrt{\mu_2} = \sigma_i$ | | | — | 0.204 | 0.400 | 0.574 | 0.709 |

N.-B. — s_i est exprimé avec une unité égale à l'écart-type de la distribution normale ayant engendré la distribution $\varphi_i (s_i)$.