

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. DUVAL

Application des notions de statistiques mathématiques en matière de laverie

Revue de statistique appliquée, tome 2, n° 2 (1954), p. 33-47

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1954__2_2_33_0

© Société française de statistique, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATION DES NOTIONS DE STATISTIQUES MATHÉMATIQUES EN MATIÈRE DE LAVERIE

par

R. DUVAL

*Ancien élève de l'Ecole Polytechnique, Ingénieur Civil des Mines,
ancien Directeur à la Société M. M. de Penarroya*

Raisons pour lesquelles la préparation des minerais semble être un domaine d'élection pour la statistique mathématique et pour lesquelles cette science peut rendre en cette matière des services signalés.

Etude de la précision d'une analyse chimique, d'un échantillonnage et des déterminations de rendement pondéral et de rendement métallique. Raisons pour lesquelles la publication de chiffres de rendement à plusieurs décimales ne peut que faire sourire.

Application des principes du « quality control » aux laveries métalliques. Conceptions américaines à ce sujet. Application à des laveries d'échelle européenne.

Considération sur la méthode « factorielle » destinée à diriger et interpréter les essais entrepris pour déceler l'influence respective des divers paramètres sur lesquelles il est possible d'agir pour régler une laverie et celle de leurs interactions. Grand intérêt qu'est susceptible de présenter cette méthode pour rendre les essais de laboratoire plus cohérents avec ce qu'on constate dans la marche industrielle.

Conclusion : Intérêt pour les ingénieurs de laverie d'acquiescer, s'ils ne les ont déjà, des notions de statistique mathématique.

INTRODUCTION

Nous ne nous dissimulons pas que cette expression de « statistique mathématique » est susceptible d'éloigner certains lecteurs. Pour essayer de les rassurer, nous tenons à dire tout de suite que nous nous efforcerons, au cours de cet exposé, d'éviter les développements mathématiques.

Les laveries sont cependant des installations où l'application des notions de statistique est susceptible de donner des résultats très fructueux, en raison de la nature même du traitement effectué et de sa complexité. Le traitement de concentration s'applique, en effet, à une matière variant continuellement ; les conditions du traitement lui-même sont soumises à des paramètres qui varient aussi à chaque instant, et dont un certain nombre sont inconnus du reste, et les mesures, d'autre part, qu'on doit effectuer pour obtenir les données nécessaires à un réglage sont elles-mêmes exposées à de nombreuses causes variables d'erreur. Il y a là tous les éléments voulus pour qu'il soit extrêmement difficile et même impossible de déterminer d'une manière certaine l'effet à attendre d'une modi-

(1) Cet article est extrait d'une communication présentée par M. Duval au Congrès des Laverses (Paris 29-30 Septembre et 1^{er} Octobre 1954).

Le texte intégral de cette communication a été publié dans la Revue de l'Industrie Minérale - Avril 1954.

fication des conditions et qu'on en soit réduit à l'observation de tendances et à leur interprétation. C'est ce qui fait d'ailleurs la valeur de l'expérience du personnel laveur en matière de concentration de minerai. Mais c'est alors aussi que la statistique devrait toujours intervenir pour démêler ces tendances et donner une base quantitative plus solide à ce qu'à toujours d'un peu vague et flou une expérience simplement humaine.

Nous nous proposons au cours de cet exposé d'indiquer un certain nombre de domaines où des méthodes de statistique mathématique, qui ont fait leurs preuves dans de nombreuses autres techniques industrielles, pourraient être appliquées avec fruit et l'ont d'ailleurs déjà été.

I. DÉTERMINATION DES RENDEMENTS — ÉCHANTILLONNAGES — ANALYSES

Il est courant que pour suivre la marche d'une laverie et maintenir son réglage, on s'attache à suivre journallement le rendement métallique et la teneur du concentré ; il est fréquent de rencontrer des bulletins journaliers sur lesquels figurent les rendements en pourcentages suivis d'un certain nombre d'autres chiffres décimaux, ce qui donne l'illusion d'une grande précision. Lorsqu'on a étudié d'un peu près les causes d'erreurs qui interviennent dans une pareille détermination, on ne peut que sourire, mais il est assez rare cependant qu'on ait dans les laveries l'idée de se poser une question à ce sujet.

ANALYSE CHIMIQUE.

Examinons d'ailleurs d'abord pour nous rendre un peu compte des incertitudes qui peuvent régner à ce sujet, la simple question de la précision à attendre d'une analyse chimique du minerai, abstraction faite pour le moment de toute erreur sur l'échantillonnage qui a servi à prélever l'échantillon analysé. Pour notre compte nous n'avons jamais pu obtenir d'un laboratoire une réponse pertinente à cette question si simple : quelle est la précision de vos analyses du plomb par exemple d'un concentré ? Nous avons tenté à diverses reprises d'obtenir une réponse et chaque fois le résultat a été le même. Au bout d'un temps d'ailleurs long, ce qui prouve que la question a pris ledit laboratoire au dépourvu, il arrive un rapport copieux analysant par le menu toutes les causes d'erreur qui peuvent intervenir, faisant état d'analyses de contrôle fort soignées faites sur des échantillons synthétiques, mais sans conclusion nette, très probablement parce que l'auteur du rapport a crû d'abord pouvoir candidement additionner les erreurs attribuables aux différentes causes et est arrivé à un total tellement surprenant qu'il a eu vaguement conscience de dire une sottise et s'est abstenu. On ne peut d'ailleurs le lui reprocher, car les chances qu'ont en effet les erreurs d'être toutes du même sens et d'atteindre leur maximum en même temps sont tellement minimes qu'on peut considérer l'éventualité comme pratiquement invraisemblable. Quelle était donc l'erreur « vraisemblable » ? C'est justement le rôle de la statistique de la déterminer et de chiffrer le degré de vraisemblance. Qu'aurait dû donc faire un laboratoire pour répondre à la question posée, ou plutôt qu'aurait-il dû avoir fait depuis longtemps ?

Cet exemple que nous allons étudier d'un peu près, car il est l'un des plus simples, est destiné à faire comprendre, du moins nous l'espérons, le principe de toutes ces études statistiques. Admettons que ce laboratoire ait plusieurs chimistes susceptibles d'opérer ; il s'agit de déterminer l'erreur, disons pour l'instant « vraisemblable », qu'est susceptible de faire le laboratoire lorsque l'un ou l'autre chimiste opère en appliquant la méthode type du laboratoire.

Ce laboratoire aurait dû se procurer un échantillon copieux bien homogène d'un concentré de qualité normale et le conserver soigneusement en boîte close pour éviter les actions extérieures ; il aurait procédé sur le même échantillon, en échelonnant ses essais sur la période de temps correspondant à la durée normale de renouvellement des réactifs et en tirant au sort les chimistes chargés d'opérer, à une centaine environ d'analyses. Ces analyses, naturellement, auraient toutes donné des résultats différents se dispersant autour de leur valeur moyenne. Il aurait dû alors déterminer l'écart-type de ces résultats, index caractérisant l'ordre de grandeur des écarts que peuvent présenter les résultats par rapport à leur moyenne arithmétique. C'est un index de la **dispersion** que peuvent présenter ces résultats. Une fois cet écart-type déterminé, le laboratoire est susceptible de répondre à la question posée, en disant qu'il a **95 %** de chances de donner un résultat différent en plus ou en moins du résultat exact de moins de deux écarts-types et **99,7 %** de chances de donner un résultat

différant en plus ou en moins de trois écarts-types (1). C'est la seule réponse qui soit intéressante, car elle concrétise d'une manière précise le résultat de l'expérience pratique. C'est d'ailleurs cette même expérience qui, par un processus tout à fait empirique a fini par fixer dans les contrats de vente de concentré de plomb, par exemple, à 0,5 % l'écart admissible entre résultats trouvés par les deux parties sur un même échantillon et au delà duquel on doit faire appel à un troisième chimiste pour arbitrer le désaccord. Il est probable, bien que nous n'ayons connaissance d'aucune étude précise entreprise à ce sujet, que ces 0,5 % doivent correspondre à un écart-type d'analyse faite par un laboratoire sérieux, de 0,12 % à 0,18 % suivant le seuil de probabilité admis (2).

Un laboratoire de laverie ne devrait pas d'ailleurs se contenter de cette étude mais la poursuivre sur les matières de différentes teneurs qu'il est appelé à analyser, tout venant, stériles mixtes, etc..., et il trouverait dans chaque cas des écarts types variant en fonction de la teneur de la matière analysée. Nous ne connaissons aucun laboratoire de laverie où une pareille étude ait été entreprise et cependant c'est l'une des premières données indispensables pour qu'on puisse essayer de répondre à cette question d'apparence élémentaire : quelle est la précision du rendement métallique calculé d'après les analyses du concentré, du tout venant et du stérile, qu'il est courant de prendre comme critérium de la bonne marche d'une laverie ?

ÉCHANTILLONNAGE.

Cette précision d'analyse est loin d'être d'ailleurs le seul renseignement dont on ait besoin pour pouvoir répondre à cette question. En effet, nous avons jusqu'à présent laissé de côté l'erreur, qui est loin d'être négligeable, qu'introduit l'échantillonnage absolument nécessaire pour prélever l'échantillon soumis finalement à l'analyse. Cette erreur est fonction du procédé employé pour exécuter les prélèvements sur la matière et réduire l'échantillon brut ainsi obtenu au poids de l'échantillon finalement soumis à l'analyse ; elle s'étudie d'après les mêmes principes que ceux esquissés ci-dessus pour l'analyse chimique proprement dite. On trouvera une excellente étude de cette question fort importante, sur laquelle nous ne pouvons nous étendre, car elle suffirait à elle seule à constituer la matière d'une communication, dans un article de M. H. Jahns paru dans le « Glückauf » de mars 1952, intitulé : « Précision de la prise d'échantillons sur les expéditions de charbon et de minerai » (3) qui a été complété par un autre article du même auteur paru dans le « Glückauf » du 5 juillet 1952 et intitulé : « Influence du très gros morceau dans la division en quatre des échantillons et influence des résidus restant dans les appareils sur la précision de l'échantillonnage ». Une autre communication doit d'ailleurs être consacrée à la question.

Les principes de l'étude de M. Jahns qui, dans l'article en question, s'applique à des échantillonnages de minerai de fer et de charbon, s'étendent sans difficulté à d'autres minerais. Il s'agit d'ailleurs là d'une technique d'essais échelonnés, menés d'après des principes de statistique déjà plus évolués que les notions succinctes exposées ci-dessus à propos de l'analyse chimique, mais ils sont mis dans cet article à la portée de tout ingénieur digne de ce nom. Retenons cependant que dans cette étude fort soignée et faite d'après des résultats expérimentaux, on trouvait sur des minerais de fer d'une teneur de l'ordre de 31 % un écart type d'échantillonnage proprement dit, abstraction faite de l'analyse, de l'ordre de 0,85 % sans emploi d'échantillonneur automatique.

Nous n'avons pas connaissance d'étude systématique de ce genre entreprise sur les échantillonnages pratiqués dans une laverie ; l'utilisation des échantillonneurs automatiques dans les laveries et l'homogénéité de certains produits échantillonnés (concentré, stériles) doivent permettre, semble-t-il, d'espérer des précisions supérieures à celle mentionnée ci-dessus, mais encore faudrait-il avoir des statistiques étudiées suivant les règles de l'art pour pouvoir dire quelque chose de plus précis.

Une fois d'ailleurs tous ces renseignements indispensables déterminés, il n'est pas encore possible de répondre à la question posée. En effet, si l'on prend le cas le plus simple du rendement poids d'un minerai monométallique déterminé par le calcul à partir des teneurs, comme c'est le plus souvent le cas, on sait qu'il est donné lorsqu'on appelle R ce rendement poids, C la teneur du concentré, a la teneur du tout venant alimentant la laverie, s la teneur du stérile, par la formule :

$$R = \frac{a - s}{C - s} \quad (1)$$

(1) Dans l'hypothèse d'une distribution normale.

(2) Pour le zinc, où l'écart prévu aux contrats est de 1 ‰, au lieu de 0,5 ‰, on trouverait dans les mêmes conditions 0,24 ‰ et 0,36 ‰.

(3) On peut trouver la traduction de ces deux articles en s'adressant à la Fédération des Chambres Syndicales des Minerais et Métaux bruts.

RENDEMENT POIDS.

Il s'agit alors de déterminer quelle est l'erreur commise sur R, calculé d'après la formule (1), lorsqu'on connaît les écarts types des erreurs commises respectivement sur a, s et C par suite des échantillonnages et analyses. C'est un problème de calcul de probabilité et d'analyse assez compliqué qu'on trouvera résolu dans l'Annexe avec application à un cas particulier de minerai de plomb, et qui, avec les hypothèses, relativement peu sévères, adoptées pour les erreurs commises sur a, s et C, aboutit cependant à la conclusion que pour un rendement poids R de l'ordre de 7 % l'erreur médiane sur R, c'est-à-dire l'erreur qu'on aurait une chance sur deux de ne pas atteindre ou de dépasser (l'écart probable des artilleurs) serait de + 0,15 % environ, et l'erreur qu'on aurait un peu plus de 99 % de chances de ne pas dépasser, c'est-à-dire pratiquement la certitude, serait de 0,6 % ; ce qui veut dire qu'après avoir déterminé par le calcul un rendement poids de 7 %, on aurait une chance sur deux d'avoir la vraie valeur du rendement poids comprise entre 7,15 % et 6,85 % et pratiquement la certitude de l'avoir comprise entre 7,6 et 6,4 %. On se rend compte que, dans ces conditions, il est tout à fait ridicule de donner des chiffres de rendement poids avec deux décimales et que ces chiffres devraient être simplement arrondis au 1/2 point de rendement, c'est-à-dire ne jamais comporter comme décimale que 5 ou 0. Et nous répétons que l'exemple traité a bien des chances de faire la part très belle à la précision du rendement.

RENDEMENT MÉTAL.

Que dire alors du rendement métal qui est toujours, comme on le sait, donné d'après sa définition même par la formule :

$$p = \frac{C}{a} R$$

Là encore, pour être rigoureux, il faudrait se livrer à un calcul analytique compliqué — beaucoup plus compliqué que celui relatif à R — pour trouver la loi de probabilité de p, connaissant celle de c, a et s. Nous avouons avoir reculé, jusqu'à présent, devant cette tâche. Une étude approximative de la question paraît indiquer que la loi de probabilité de p doit être nettement dissymétrique avec possibilité assez fréquente d'erreurs par excès d'amplitude nettement supérieure à celles commises sur R et des erreurs par défaut, dans l'ensemble, du même ordre de grandeur que sur R. On sera donc prudent, en tout cas, en ne faisant pas apparaître pour le rendement métal d'autres chiffres significatifs que ceux indiqués ci-dessus pour le rendement poids.

Une autre conclusion à tirer de cette étude rapide est que le réglage d'une laverie sur le seul renseignement d'un rendement métal calculé est une chose délicate et, qu'en tout cas, se précipiter pour faire une correction de réglage sur une seule manifestation de baisse du rendement métal, c'est faire la faute d'un artilleur novice qui commande une augmentation de hausse sur l'observation d'un seul coup court. Nous voyons toujours reparaître la nécessité de cette observation des tendances, c'est-à-dire de l'étude statistique.

Nous n'avons parlé dans tout cela que du cas simple d'un minerai monométallique ; il suffit de se rappeler les formules compliquées qui donnent les rendements poids des minerais bi ou trimétalliques avec les multiples échantillonnages, analyses qu'elles nécessitent si l'on veut les appliquer, pour avoir la notion de l'importance des erreurs auxquelles elles peuvent donner lieu. Aussi, comme les déterminations de rendement métal exigent toujours qu'on connaisse auparavant la valeur du rendement poids, peut-on se demander si, dans l'espoir d'obtenir des renseignements plus dignes de foi, semble-t-il, il ne faudrait pas s'outiller résolument pour déterminer les rendements poids dans les laveries par pesée directe des entrées et sorties. Il existe des balances intégratrices sur courroies transporteuses qui doivent fonctionner convenablement puisqu'on les rencontre toujours dans toutes les descriptions de laveries américaines ; il n'est pas interdit de penser qu'il pourrait y avoir là un moyen pratique de faire des déterminations par pesée des rendements poids, qui seraient plus dignes de confiance, à condition bien entendu qu'on se livre à une étude, statistique également, des pesées.

Il y a un point que nous avons laissé de côté jusqu'à présent, c'est la nécessité de s'assurer que le produit analysé à la sortie de la laverie provient bien de celui qui a été analysé à l'entrée ; avec une alimentation de laverie variable, ce n'est pas si facile que cela, mais est-ce que dans les échantillonnages et analyses servant de base à la détermination du rendement par le calcul on se préoccupe toujours de la question ? Il ne faudrait peut être pas trop en jurer.

II. CONTROLE DE QUALITÉ

Le contrôle de qualité, ou « quality control » comme disent les Anglo-Saxons, est cet ensemble maintenant considérable de procédés, reposant tous sur la statistique mathématique, qui sont employés couramment dans l'industrie mécanique, notamment l'industrie automobile, et d'autres industries aussi (ampoules électriques, textiles notamment), pour y assurer la régularité de la qualité des fabrications. Ce sont ces procédés qui permettent la fabrication en grande série de pièces interchangeables ; leur développement actuel a eu d'ailleurs comme origine la nécessité pour les fabrications de guerre d'assurer cette interchangeabilité. C'est surtout en Amérique et en Angleterre que toutes ces théories et ces procédés pratiques ont été mis sur pied, principalement pendant les guerres mondiales, et nous avons sur le Continent européen énormément à apprendre à ce sujet. Signalons, d'ailleurs, qu'un ouvrage fort bien fait traitant de l'ensemble de ces questions a paru il y a un an environ en France (1) et qu'il est maintenant possible, en dehors du monde des statisticiens professionnels, d'en acquérir des notions sans avoir à dépouiller des séries dispersées d'ouvrages en langue étrangère. Nous ne croyons pas d'ailleurs, en nous référant à cet ouvrage, nous éloigner de notre sujet, car sa lecture par nos ingénieurs leur ouvrirait certainement beaucoup d'aperçus nouveaux sur la manière d'aborder de nombreuses questions minières, à commencer par les laveries.

Matériellement, ces procédés se concrétisent généralement, pour le préposé à une machine-outil fabriquant des pièces qui doivent avoir une dimension déterminée, par exemple, par une fiche de carton sur laquelle sont tracées quatre droites parallèles. Il aura reçu l'instruction de prélever, à certaines heures indiquées, un certain nombre de pièces sur la fabrication en cours, de mesurer leurs dimensions, d'en prendre la moyenne et de pointer cette moyenne sur la fiche graduée en conséquence. Il obtiendra, au fur et à mesure que le temps s'écoule, une série de points marqués sur sa fiche en fonction de ce temps. Si la machine ne se dérègle pas, tous les points doivent rester entre les deux droites parallèles les plus rapprochées ; si les points commencent à franchir l'une des deux droites centrales pour parvenir dans l'intervalle les séparant des droites extrêmes, il faut ouvrir l'œil, c'est qu'un dérèglement devient possible, et s'ils franchissent l'une des droites extrêmes, il faut arrêter immédiatement et reprendre le réglage sous peine de risquer d'avoir la production rebutée. Tel est le schéma réduit à sa plus simple expression de la « carte de contrôle ».

Les droites figurant sur cette fiche sont obtenues, en gros, de la manière suivante. On commence par observer le fonctionnement de la machine pendant un certain temps où elle paraît marcher normalement, en relevant les dimensions des pièces qu'elle produit, dimensions toutes légèrement différentes, puisque rien ne peut jamais être parfait, et par des méthodes statistiques on déterminera comme plus haut pour nos analyses, l'écart type de la dispersion de ces dimensions (2). Ceci fait, on prendra la fiche de carton sur laquelle on tracera un axe de référence correspondant à la dimension théorique que doit avoir la pièce puis, à une distance de deux écarts types de chaque côté, on tracera le couple des droites parallèles intérieures de notre fiche et, à une distance de trois écarts types, le couple des droites parallèles extérieures. On sait alors, d'après les tables de la loi de probabilité normale, que tant que la machine continuera à fonctionner dans les conditions normales correspondant à celles de l'étude statistique, on a 95 % de chances pour que le point relevé se tienne à l'intérieur des deux droites intérieures et un peu plus de 99 % de chances pour qu'il se tienne à l'intérieur des deux droites extérieures. Si le point franchit les droites intérieures, c'est donc que très probablement un dérèglement s'amorce, et si les points suivants ne rentrent pas à l'intérieur des deux droites centrales, c'est que la tendance au dérèglement s'affirme ; s'il franchit les droites extérieures, il est pratiquement sûr que le dérèglement s'est produit. Ce simple carton permet donc de suivre à la vue la « tendance » de la machine ; il évite de faire des corrections inopportunes, qui risqueraient d'être simplement des dérèglages, sur l'observation d'une seule dimension anormale par exemple, et indique lorsqu'il est opportun de les effectuer.

Les Américains ont eu l'idée d'appliquer exactement le même système aux laveries pour maintenir par exemple la teneur ou le rendement du concentré dans des limites données. Un article de M. Dorenfeld, paru dans l'« Engineering and Mining Journal » de juillet 1951 et intitulé « Comment

(1) J. Mothes : Techniques modernes de contrôle des fabrications. Dunod.

(2) Si les relevés portent sur des moyennes, il s'agit alors de l'écart-type des moyennes

utiliser le « quality control » pour améliorer la production d'une laverie », donne des indications détaillées à ce sujet (1).

L'application suit de très près la marche que nous avons décrite ci-dessus pour la machine-outil.

Cette « mise sous contrôle », comme on dit, a pour un directeur de laverie un autre avantage, c'est de pouvoir se rendre compte d'une manière visuelle et quantitative de l'amélioration que peut produire dans la teneur du concentré par exemple un changement de réactif ou de dosage. En raison des fluctuations continuelles des résultats obtenus dans une laverie, il est assez difficile de se rendre compte, en consultant simplement des relevés de résultats, que la teneur d'un concentré tend à augmenter d'une unité par exemple lorsqu'on modifie tel dosage et cependant cette unité de plus peut avoir des répercussions économiques intéressantes. La carte de contrôle qui est faite pour déceler les tendances le fera voir très facilement : l'article de M. Dorenfeld traite aussi de cette question.

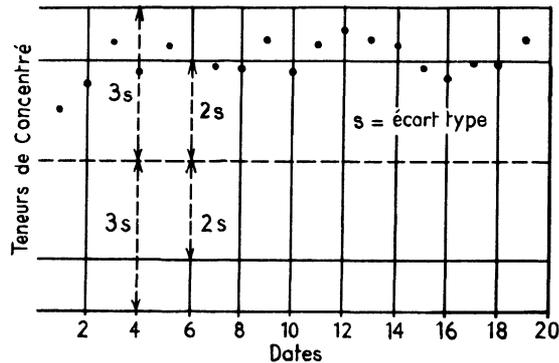


Fig. 1

Mais cette technique américaine ne peut s'appliquer que lorsque, comme c'est d'ailleurs le cas pour les grandes mines américaines, l'exploitation minière est apte à livrer un tout-venant à teneur sensiblement régulière et dont les écarts autour d'une moyenne constante se tiennent dans la limite d'une dispersion accidentelle ; c'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles les grandes laveries américaines attachent tant d'importance à la constance du « Head Assay ».

Pour nos laveries, qui correspondent le plus souvent à des mines de beaucoup moins grande envergure, pour lesquelles il est souvent difficile de maintenir une teneur sensiblement constante de tout-venant, la teneur d'entrée à la laverie subira des oscillations de longueur d'onde telles qu'il deviendra impossible de les traiter comme des écarts accidentels et qu'on devra les considérer comme des écarts systématiques ; dans ces conditions, les conditions d'emploi de la carte de contrôle ne sont plus remplies et on ne peut plus utiliser cette technique.

C'est pour cela qu'il y a quelques années nous avons eu l'idée, à la suite d'un incident qu'il sera peut-être utile de rappeler, car il montre l'enchaînement des faits, d'un système de contrôle de qualité applicable au cas de teneurs d'entrée variables dans de grandes limites et qui a fait l'objet d'un article dans la « Revue de l'Industrie Minérale » de novembre 1949 ; il est intitulé : « Contrôle graphique des ateliers de concentration des minerais. Diagramme de surveillance ».

Cet incident était le suivant : le rapport d'une certaine laverie indiquait que l'adoption d'un nouveau réactif augmentait son rendement d'une manière appréciable et il justifiait cette conclusion par une comparaison avec des résultats obtenus précédemment. Mais un point laissait perplexe, c'est que la teneur du tout-venant sur lequel avait été essayé l'effet du nouveau réactif était sensiblement plus élevée que celle des minerais de comparaison. Il était donc permis de se demander si cette circonstance, qui n'avait nullement retenu l'attention de l'auteur du rapport, n'était pas la vraie

(1) On peut se procurer une traduction de cet article en s'adressant à la Fédération des Chambres Syndicales des Minerais et Métaux bruts.

On trouvera également à la Fédération la traduction d'un article de M. J. Visman, paru dans le « Canadian Mining and Metallurgical Bulletin », d'octobre 1952 et intitulé « Principes du « Quality control » en matière de préparation de charbon » et qui constitue un excellent recueil bien présenté sur un exemple et fort clair des notions essentielles de statistiques applicables à la concentration.

cause de l'amélioration constatée. C'est pour tirer au clair cette question que de fil en aiguille nous avons élaboré le système en question qui sépare en fait la variable, teneur du tout-venant. Nous ne le décrivons pas en détail, il suffit de se reporter à l'article pour avoir toutes les indications voulues ; en résumé, il se borne simplement à faire une statistique, pendant une période où la laverie peut être considérée avoir fonctionné normalement, de tous les **rendements poids** (1), teneurs de concentré et de tout-venant correspondantes et de classer ces résultats par échelons de teneurs de tout-venant d'une amplitude de 1 % ou de 0,5 % par exemple. En portant les teneurs et les rendements en poids en ordonnées et abscisses sur un graphique, on constate que les points correspondants s'ordonnent en nuages distincts autour d'une ligne moyenne pour chaque classe d'échelon de teneur de tout-venant. Ces nuages s'éloignent vers la direction des rendements poids croissants lorsque la teneur de l'échelon considéré croît et que, comme c'est le cas dans la pratique des laveries, on s'efforce de régler en maintenant la teneur constante dans les tailings. Il est d'ailleurs très facile, comme l'indique l'article, de réduire la largeur de ces nuages en corrigeant la position du point marqué pour lui restituer la position qu'il aurait dû avoir si la teneur du tout-venant auquel il correspond avait été exactement la teneur moyenne de l'échelon de teneur auquel il appartient.

On obtient ainsi un graphique qui se présente pour un minerai monométallique sous l'aspect de la figure ci-jointe (Fig. 2).

Lorsqu'on a préparé un graphique de ce genre, il est facile, dès que la laverie fait connaître le rendement poids obtenu, la teneur du concentré et celle du tout-venant, de pointer le point correspondant sur le graphique, de corriger ensuite la position de ce point de l'écart existant entre la teneur effective du tout-venant et la teneur moyenne de l'échelon de teneurs auquel elle appartient et de voir si le point corrigé rentre oui ou non à l'intérieur du nuage correspondant ; si oui, la marche est normale, sinon il y a quelque chose de détraqué dont il faut rechercher la cause. La conclusion de l'incident, dont nous avons parlé plus haut, fut qu'après traitement, comme il vient d'être indiqué, du point correspondant à la modification de réactif, ce point se plaçait exactement sur la ligne moyenne du nuage de l'échelon auquel il devait appartenir en raison de la teneur du tout-venant, que, par conséquent, le réactif n'était pour rien dans l'amélioration de rendement et que c'était uniquement la modification de teneur de tout-venant qui avait eu une influence.

Ce graphique, tout en étant moins rigoureux que la carte de contrôle, rend à peu près les mêmes services ; on pourrait d'ailleurs, avec une analyse statistique plus poussée, tracer les frontières limitant les nuages d'une manière telle qu'elles correspondent d'une manière précise à telle probabilité qu'on voudrait d'être franchies. Ce graphique permet à un directeur de mine de voir d'un seul coup d'œil si la laverie marche correctement et ne lui raconte pas d'histoires.

Nous pouvons même ajouter que l'impossibilité de l'établir, parce que les points expérimentaux ne veulent pas obéir et se ranger correctement, est un indice que quelque chose d'anormal s'est passé. C'est ainsi que l'impossibilité d'établir un tel graphique pour une certaine laverie, parce que les points se promenaient sur toute la feuille, sauf à l'endroit où ils auraient dû être, nous a amené à vérifier les données numériques fournies par les rapports journaliers de ladite laverie et à constater que des séries de rendements étaient fausses. Personne jusque-là ne s'en était aperçu.

On peut donc, nous semble-t-il, constater que ces méthodes statistiques donnent des résultats pratiques intéressants, au prix d'un travail initial qui n'est d'ailleurs pas accablant, car l'établissement du fond d'un graphique de surveillance à partir des rapports de laverie d'un trimestre ne prend guère qu'une journée et peut être entièrement effectué par un employé à qui on a donné les instructions voulues.

III. MÉTHODE FACTORIELLE

Cette méthode factorielle, qui n'est qu'une façon spéciale de diriger les essais qu'on se propose de faire dans les laveries de flottation ou les laboratoires pour étudier les résultats donnés par des modifications de réactifs (nature ou dosage), de pH, de mailles de broyage, etc..., c'est-à-dire de quelques-uns des nombreux paramètres dont dépend le réglage, et de traiter ces résultats pour en tirer des conclusions, n'est pas une chose nouvelle en elle-même. C'est une application de principes de statistique mathématique employés depuis déjà longtemps dans les expériences d'agronomie et dans l'industrie chimique américaine, et qui y a gagné ses galons ; l'idée d'appliquer cette méthode aux laveries paraît être due à M. Dorenfeld qui a fait paraître à ce sujet deux articles fort intéressants

(1) Pour des raisons analytiques qu'on trouvera exposées dans l'article en question, la méthode ne peut réussir sur les rendements métal.

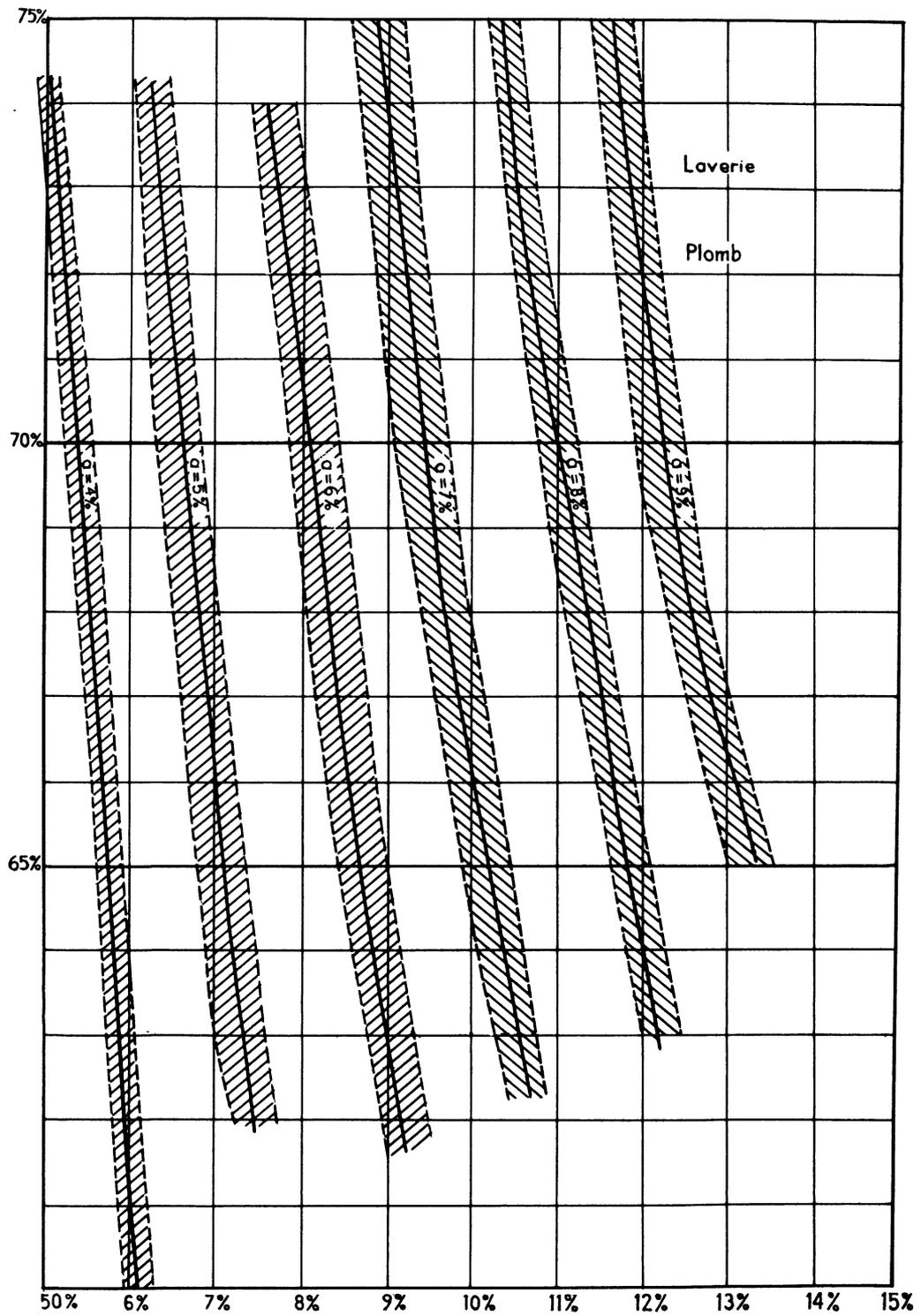


Fig. 2

mais qui exigent de l'attention, dans le « Mining Engineering » de décembre 1951, et l'« Engineering and Mining Journal » d'octobre 1952, le second d'ailleurs plus simple et plus facile à suivre que le premier (1). Ils sont intitulés respectivement : « Essais de flottation à cinq variables par le système factoriel » et « Une nouvelle manière d'obtenir de meilleurs résultats, d'économiser de l'argent dans les essais d'ateliers de concentration ».

Pour comprendre le gros intérêt que présente, à notre avis, cette méthode, il faut examiner un peu dans le détail comment habituellement on procède jusqu'ici à ces essais dans les laveries ou les laboratoires spécialisés.

On applique la méthode classique dans les sciences expérimentales de la séparation des variables, c'est-à-dire qu'on s'efforce de fixer tous les paramètres, sauf celui qu'on veut étudier, et on examine ce qui se passe en faisant varier celui-ci. Mais cette fixation de tous les paramètres, sauf un, est, en matière de flottation, en réalité impossible, car il y a beaucoup de ces paramètres en fait inconnus, en raison du nombre extrêmement grand de conditions qui réagissent sur le résultat, et, en admettant même qu'au laboratoire ou pendant des essais spéciaux en laverie on puisse les fixer en grand nombre, dans la marche industrielle ce ne sera pas le cas et on ne retrouvera plus dans la pratique les résultats annoncés par les essais. C'est un fait bien connu de tous ceux qui se sont occupés d'études de concentration de minerais et l'on sait que, lorsqu'on a une grosse décision à prendre, on prend soin généralement d'envoyer un lot important du minerai étudié se faire traiter dans une laverie en fonctionnement pour vérifier dans quelle mesure les résultats des expériences se confirment dans la marche courante.

Afin de saisir les différences qui existent dans la manière dont la méthode factorielle et la méthode classique traitent le problème, examinons un cas simple d'application de la méthode classique.

Supposons qu'on veuille étudier les effets de deux dosages de réactifs collecteurs X_1, X_2 , de deux pH P_1 et P_2 , et de deux mailles de broyage G_1 et G_2 (nous reprenons à dessein les notations du second article de M. Dorenfeld pour faciliter la comparaison).

Pour étudier l'effet du paramètre X, on fera un essai dans les conditions X_1, P_1, G_1 , un autre dans les conditions X_2, P_1, G_1 en fixant P et G et tout le reste, si on le peut, et on examinera les résultats sur le caractère étudié : teneur du concentré ou rendement métallique par exemple. Si l'effet était complètement nul, on ne trouverait cependant pas les mêmes résultats, même si tous les autres paramètres étaient fixés, en raison de l'erreur expérimentale (échantillonnage, analyse notamment) qui, nous l'avons vu plus haut, est loin d'être négligeable. Comme d'ailleurs les autres paramètres ne peuvent être effectivement fixés et ont varié d'une manière accidentelle entre temps, l'écart type de la dispersion des résultats, ou son carré la variance, en est encore augmenté. On sera donc amené forcément à se demander, dans le cas où l'écart des résultats n'est pas excessivement important, si la différence ne provient pas simplement de cette dispersion, d'amplitude en réalité inconnue, et on vérifiera si le résultat est reproductible, c'est-à-dire qu'on recommencera l'expérience un certain nombre de fois n pour dégager la tendance.

Si, effectivement, on constate des écarts persistants dans le même sens, on en fera généralement une moyenne qui sera considérée comme attribuable à la variation de X_1 à X_2 . Puis, on opérera de même pour les paramètres P et G en faisant les couples d'expériences P_1, X_1, G_1 et P_2, X_1, G_1 d'une part, et G_1, P_1, X_1 et G_2, P_1, X_1 d'autre part, et en les répétant n fois.

Très souvent on en restera là, ou du moins nous avons vu pas mal de rapports d'essais en rester là, et on arrêtera les conclusions.

Agir ainsi, c'est admettre que les paramètres X, P, G, sont rigoureusement indépendants et que leurs effets sont additifs, ce qui n'est nullement prouvé surtout pour un pH par exemple qui n'a guère d'action par lui-même, mais par la modification qu'il produit dans l'activité d'un autre réactif, en un mot, c'est négliger l'interaction des paramètres entre eux.

Si on veut donc tenir compte de cet élément, il faudra en toute rigueur, en ne considérant d'abord que le paramètre X par exemple, refaire les couples d'essais, répétés chacun n fois, dans les conditions suivantes :

$$X_1, P_1, G_2 - X_2, P_1, G_2 ; \quad X_1, P_2, G_1 - X_2, P_2, G_1 ; \quad X_1, P_2, G_2 - X_2, P_2, G_2$$

ce qui représente en tout, avec le premier couple précédemment envisagé, $2 \times 4 \times n$ essais.

(1) On peut trouver des traductions de ces articles en s'adressant à la Fédération des Chambres Syndicales des Minerais et Métaux bruts.

Il faut faire ensuite de même pour les autres paramètres P et G, ce qui représenterait en tout $3 \times 8 \times n$ essais, avec étude pour chaque série de répétitions des variances obtenues.

Combien de fois opère-t-on de cette manière ? Nous nous contentons de poser la question.

Mais on peut alors remarquer en examinant par exemple la série des essais portant sur P qui, outre le premier couple $P_1 X_1 G_1 - P_2 X_1 G_1$, devra comporter les trois autres couples :

$$P_1 X_2 G_1 - P_2 X_2 G_1 ; \quad P_1 X_1 G_2 - P_2 X_1 G_2 ; \quad P_1 X_2 G_2 - P_2 X_2 G_2,$$

que tous ces essais figurent déjà, accouplés d'une manière différente, il est vrai, dans la série relative au paramètre X.

On ferait la même remarque pour le paramètre G. Le nombre d'essais différents comme groupement n'est en effet, dans le cas actuel, que de $2^3 = 8$, car pour avoir tous les groupements possibles, il faut considérer les deux valeurs possibles d'un des paramètres, associer à chacune de ces deux valeurs les deux valeurs d'un deuxième paramètre, ce qui donne $2 \times 2 = 2^2$ groupes, puis associer à chacun de ces 2 groupes, chacune des deux valeurs du troisième paramètre, ce qui donne $2 \times 2 = 2^3$ groupes. S'il y avait m paramètres, cela donnerait 2^m groupes.

On peut donc utiliser les essais à plusieurs fins en les associant différemment, sans avoir à les refaire dans chaque série ; à partir de ce moment, on commence à s'engager dans la méthode factorielle qui appartient, en effet, à ce chapitre spécial déjà considérable de la statistique mathématique qui s'appelle en anglais « design of experiment », ce qu'on pourrait traduire par « planification des expériences ».

Mais le nombre d'expériences à faire serait encore, avec le système classique de répétition, $2^m \times n$ avec, pour chaque série de répétitions, étude de la variance. On obtiendrait alors, en menant bien cette dernière étude d'après les principes de statistique mathématique, les résultats qu'est susceptible de donner la méthode factorielle, mais cependant sans autant de concordance avec les conditions industrielles, car nous avons vu que dans la méthode classique on se serait efforcé de fixer aussi tous les paramètres autres que ceux étudiés, tandis que la méthode factorielle n'exige pas cette fixation. Au contraire, elle laisse agir la dispersion naturelle, comme elle se produit en marche industrielle, de ces paramètres divers connus (teneur du tout-venant notamment, à condition que cette dispersion conserve un caractère accidentel et ne prenne pas une allure systématique), ou inconnus.

La méthode factorielle opère, elle, seulement sur les 2^m essais que nous avons dénombrés ci-dessus et cela lui suffit, grâce au traitement qu'elle leur fait subir, pour démêler ceux des paramètres qui ont une influence directe, réelle, significative comme l'habitude est de le dire, quelle est cette influence, ceux des paramètres qui ont une influence par leur association à deux (interaction du premier ordre), à trois (interaction du deuxième ordre), etc..., et quelle est l'influence de cette interaction. Ce sont justement ces interactions qui sont souvent la cause des divergences qu'on constate entre les essais de laboratoire et les résultats de marche industrielle et que la méthode classique telle qu'elle est appliquée habituellement, laisse échapper. C'est évidemment un résultat intéressant et susceptible, à notre avis, d'éclaircir beaucoup de problèmes de flottation et de permettre aux essais de flottation en laboratoire d'un nouveau minerai d'être beaucoup plus reproductibles en marche industrielle. On reconnaîtra que tout au moins cette méthode justifie une mise à l'épreuve dans les laveries et les laboratoires et, pour cela, il faut d'abord l'étudier. Son application matérielle, tant comme analyses que comme calculs (qui ne dépassent pas le cadre de la simple arithmétique) peut être confiée au personnel courant ; il n'y a que le chef d'orchestre qui ait besoin de savoir comment opérer, quelles instructions il faut donner et qui doit posséder les tables à utiliser, dont des extraits substantiels existent dans l'ouvrage de M. Mothes signalé plus haut. Une autre communication à ce Congrès doit d'ailleurs faire connaître quels résultats intéressants et nouveaux a donnés son application dans une laverie.

Nous ne nous proposons pas de décrire, ici, cette méthode, car cela nous entraînerait à faire un cours de statistique mathématique et nous ne pouvons que conseiller de consulter les articles originaux cités ci-dessus, qui en donnent l'essentiel pratique par des applications sur des exemples.

Lorsque le traitement des résultats obtenus aux essais est terminé, il reste un tableau des paramètres ou interactions ayant des effets significatifs avec en regard les effets significatifs en question qui correspondent donc, étant donné les conditions dans lesquelles ils ont été déterminés, aux conditions de variabilité normale si on a opéré en laverie. Si on opère en laboratoire, on voit qu'il n'y a pas lieu, si on veut se rapprocher des conditions industrielles et contrairement à ce qu'on fait habituellement dans les essais par la méthode classique, de s'efforcer d'homogénéiser le plus possible l'échantillon sur lequel on opère ; au contraire, il faudrait opérer sur des séries d'échantillons pré-

sentant la dispersion de qualité et de teneur qu'on rencontrerait en marche normale et tirer au sort celui qui fera l'objet de chaque essai.

Comme le dit M. Dorenfeld dans l'un de ses articles, il faut toujours se souvenir qu'en matière de laverie il n'y a qu'une chose qui reste constante, c'est la variabilité, et la méthode factorielle n'est qu'une manière d'ordonner ce désordre pour en tirer parti.

CONCLUSION

Nous ne pousserons pas plus loin cet exposé des emplois que peut ou plutôt que doit trouver la statistique mathématique en matière de préparation de minerai, bien que d'autres parties de la préparation, comme par exemple tout ce qui est relatif au concassage et au broyage, en soit aussi tributaire. D'ailleurs, en ce qui concerne cette phase du traitement de préparation, la statistique a déjà gagné son droit de cité dans les études de granulométrie, et il n'y a qu'à rappeler à ce sujet l'utilisation du réseau de coordonnées Rosin-Ramler, d'emploi classique maintenant en Allemagne, aux Etats-Unis et en Angleterre (nous ne jurons pas qu'il soit aussi courant en France).

Nous espérons avoir tout au moins attiré l'attention sur les services fort importants que pouvaient rendre les méthodes de la statistique mathématique pour sortir la préparation des minerais de l'empirisme où elle se débat encore. Mais, pour que les techniques dérivant de cette science puissent être appliquées avec fruit et pour que des applications puissent en être faites aux problèmes nouveaux qui se posent tous les jours, il faut que les ingénieurs spécialistes des questions de préparation de minerai aient l'esprit formé à son emploi. C'est une manière de voir les choses différente et l'on doit avouer que jusqu'à ces tout derniers temps la formation habituelle des ingénieurs ne les y préparait guère. Un effort paraît maintenant être fait dans les écoles supérieures pour remédier, en partie, au retard que nous avons à ce sujet sur beaucoup de pays étrangers, mais il y a en fonctions beaucoup d'ingénieurs à qui cette façon d'aborder les problèmes est complètement étrangère.

Nous sommes convaincus que lorsque de nombreux ingénieurs seront dressés à cette nouvelle manière d'aborder les problèmes divers qui se présentent, ils disposeront personnellement d'un outil puissant pour en résoudre beaucoup, mais qu'aussi la conjonction de ces efforts, coordonnés maintenant par une méthode, pourra faire progresser la technique encore très empirique de la préparation des minerais.

ANNEXE

PROBLÈME THÉORIQUE.

Il s'agit de déterminer la densité de probabilité $p(\epsilon)$ de l'erreur ϵ commise sur $R = \frac{n}{m}$ lorsqu'on connaît celle de ν , erreur commise sur n , et celle de μ , erreur commise sur m .

Les valeurs exactes de n et m étant n_0 et m_0 , la valeur exacte de R est $R_0 = \frac{n_0}{m_0}$.

On a donc :

$$\epsilon = R - R_0 = \frac{n_0 + \nu}{m_0 + \mu} - \frac{n_0}{m_0} = \frac{\nu - R_0 \mu}{m_0 + \mu} \quad (1)$$

Si on appelle $p(\epsilon)$ de ϵ la probabilité élémentaire de ϵ

$$\begin{array}{l} \text{de } \nu \quad p_1(\nu) d\nu \quad \gg \quad \gg \\ \text{de } \mu \quad p_2(\mu) d\mu \quad \gg \quad \gg \end{array}$$

et si on suppose les erreurs ν et μ indépendantes on a, d'après le théorème des probabilités composées,

$$p(\epsilon) d\epsilon = p_1(\nu) p_2(\mu) \cdot d\nu \cdot d\mu \quad (2)$$

Si on admet provisoirement que μ garde une valeur fixe, comme on a d'après (1)

$$\epsilon = \frac{\nu - R_0 \mu}{m_0 + \mu} \quad (3)$$

pour une augmentation $d\epsilon$ de ϵ on a :

$$\epsilon + d\epsilon = \frac{\nu + d\nu - R_0 \mu}{m_0 + \mu}$$

d'où

$$\nu = \epsilon(m_0 + \mu) + R_0 \mu \quad \text{et} \quad d\nu = d\epsilon(m_0 + \mu) \quad (4)$$

L'expression (2) s'écrit alors en portant dans (2) les valeurs ν et $d\nu$ tirées de (3) et (4) :

$$p(\epsilon) d\epsilon = p_1[\epsilon(m_0 + \mu) + R_0 \mu] \cdot p_2(\mu) \cdot (m_0 + \mu) d\epsilon d\mu \quad (5)$$

Mais dans tout ce qui précède, nous avons admis que μ était fixe ; en réalité ce n'est pas le cas et μ peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, par conséquent l'expression finale de $p(\epsilon)$ de ϵ est donnée par :

$$p(\epsilon) d(\epsilon) = d\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} p_1[\epsilon(m_0 + \mu) + R_0 \mu] \cdot p_2(\mu) \cdot (m_0 + \mu) d\mu \quad (6)$$

L'intégration donnera une fonction de ϵ soit $\Phi(\epsilon)$ et l'expression finale de $p(\epsilon)$ deviendra :

$$p(\epsilon) d\epsilon = \Phi(\epsilon) d\epsilon \quad \text{d'où} \quad p(\epsilon) = \Phi(\epsilon).$$

Cas du rendement poids défini par $R = \frac{a-s}{c-s}$

Les variates a , c , s , obéissent chacune à des lois de probabilité qu'on admettra, sans grandes chances de commettre une erreur, être des lois normales dont les écarts types respectifs sont α , γ , σ . Dans ces conditions, on sait que le numérateur $(a-s)$ et le dénominateur $(c-s)$ obéissent aussi, chacun aussi, à des lois normales d'écart type respectif.

$$u = \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2} \quad w = \sqrt{\gamma^2 + \sigma^2}$$

L'équation (2) ci-dessus s'écrit donc d'après l'expression donnant la fonction de la loi normale :

$$p(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\nu^2}{2u^2}} \cdot \frac{1}{w\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2w^2}} d\nu d\mu$$

Remarquons tout de suite que, comme il a été dit plus haut, l'équation (7) admet que les erreurs v et μ sont indépendantes, or, ce n'est pas rigoureusement exact puisque le numérateur et le dénominateur de R contiennent tous deux le terme s , dont l'erreur interviendra donc, à la fois dans les erreurs respectives du numérateur et du dénominateur. On ne peut donc pas dire que ces erreurs soient absolument indépendantes, mais comme s est faible son erreur sera très faible et jouera peu de rôle vis-à-vis des erreurs commises sur c et a , qui, elles, sont réellement indépendantes ; par conséquent, nous admettrons néanmoins pour les calculs ci-dessous l'indépendance de v et de μ . Le calcul deviendrait d'ailleurs autrement extrêmement compliqué pour aboutir en fin de compte à des corrections négligeables. Finalement, on aura donc, en se reportant à l'équation (6), à écrire :

$$p(\epsilon) d\epsilon = d\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\epsilon(m_0+\mu)+R_0\mu]^2}{2u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2w\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2w^2}} \cdot (m_0+\mu) d\mu$$

Cette intégration ne présente pas de difficulté analytique sérieuse, mais exige seulement de la patience et, toutes réductions faites, on aboutit à l'expression :

$$p(\epsilon) d\epsilon = \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{u^2 + R_0(\epsilon + R_0)w^2}{[u^2 + (\epsilon + R_0)^2 w^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{\epsilon^2 m_0^2}{2[u^2 + (\epsilon + R_0)^2 w^2]}} \cdot d\epsilon \quad (8)$$

qui donne la probabilité élémentaire ; on a donc :

$$p(\epsilon) = \Phi(\epsilon) = \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{u^2 + R_0(\epsilon + R_0)w^2}{[u^2 + (\epsilon + R_0)^2 w^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{\epsilon^2 m_0^2}{2[u^2 + (\epsilon + R_0)^2 w^2]}} \quad (9)$$

APPLICATION NUMÉRIQUE.

Nous allons considérer le cas d'un minerai de plomb, par exemple, à 5 % dans le tout-venant, concentré à 65 % plomb avec un tailing contenant 0,5 % plomb.

$$\text{On a dans ces conditions } R = \frac{5-0,5}{65-0,5} = 0,06976,$$

soit 6,976 % d'après le calcul.

D'autre part, d'après l'article sur l'échantillonnage de Jahns cité dans la note, l'erreur, représentant l'écart type de la dispersion, sur l'échantillonnage et l'analyse d'un minerai de fer à 31 % Fe, représentait 0,87 % soit une valeur relative de $\frac{0,87}{31} = 0,028$. Si nous admettons la même erreur relative pour le tout-venant du minerai de plomb qui doit offrir des difficultés d'échantillonnage et d'analyse du même genre, on trouverait pour l'écart type de la dispersion de l'erreur commise sur la détermination de la teneur du tout-venant :

$$5 \times 0,028 = 0,14 \%$$

Pour le concentré dont l'homogénéité facilite l'échantillonnage, nous admettrons une erreur relative de seulement 0,005, hypothèse probablement optimiste d'ailleurs, ce qui donnerait pour l'écart type de la dispersion de l'erreur commise sur la teneur du concentré :

$$65 \times 0,005 = 0,325 \%$$

Quant au tailing, l'échantillonnage est facile mais l'analyse est plus délicate pour cette faible teneur. Nous admettrons une erreur relative de 0,02, soit pour l'écart type de la dispersion de l'erreur commise sur sa teneur du tailing de :

$$0,5 \times 0,02 = 0,01 \%$$

ce qui semble aussi optimiste.

Dans ces conditions, on a en se reportant aux notations adoptées plus haut :

$$\alpha = 0,14$$

$$\gamma = 0,325$$

$$\sigma = 0,01$$

On a donc, d'après ce qui a été dit ci-dessus :

$$u^2 = \alpha^2 + \sigma^2 = \frac{0,14^2}{1} - \frac{0,01^2}{1} = 0,0197$$

$$v^2 = \gamma^2 + \sigma^2 = \frac{0,325^2}{1} - \frac{0,01^2}{1} = 0,1057$$

Portons donc ces valeurs dans l'équation (9) où l'on fera également $m_0 = 65 - 0,5 \cdot 64,5$ et $R_0 = 0,06976$; on trouve tous calculs effectués :

$$p(\epsilon) = \Phi(\epsilon) = \frac{1,470 + 0,535 \epsilon}{(0,0404 + 0,0294 \epsilon + 0,2114 \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{4160,25 \epsilon^2}{(0,0404 + 0,0294 \epsilon + 0,2114 \epsilon^2)}} \quad (10)$$

Cette équation (10) qui donne la densité de probabilité $p(\epsilon)$ de l'erreur commise ϵ sur R montre que cette dispersion n'est pas symétrique puisqu'elle contient des termes du premier degré en ϵ : la probabilité des erreurs positives et négatives n'est pas la même.

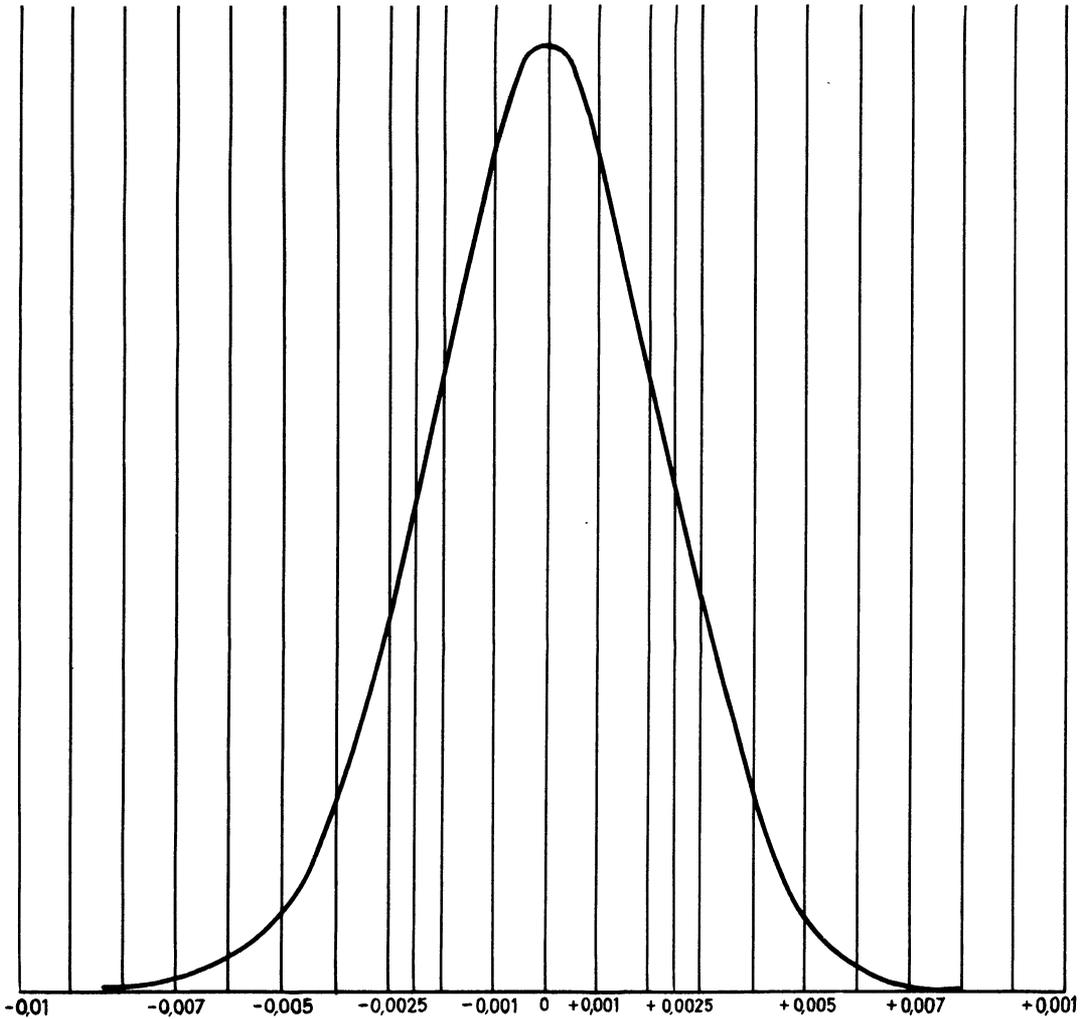


Fig. 3

Mais on constatera dans le calcul ci-dessous des différents points de la courbe $y = \Phi(\epsilon)$ que les différences sont dans ce cas excessivement minimales et la loi se rapproche en fait beaucoup d'une loi normale.

Nous allons construire cette courbe $y = \Phi(\epsilon)$ par points en donnant à ϵ une série de valeurs successives dans l'équation (10) et en calculant la valeur de y correspondante. On obtient le tableau suivant des valeurs de y quand on fait les calculs numériques.

TABLEAU I

Valeurs de ε	Valeurs de y
0	181,03
+ 0,001	161,21
- 0,001	163,42
+ 0,0025	95,06
- 0,0025	95,18
+ 0,005	13,88
- 0,005	13,72
+ 0,007	1,1904
- 0,007	1,1424
+ 0,01	0,0065
- 0,01	0,0064

On peut alors tracer la courbe $y = \Phi(\varepsilon)$ par points sur un papier millimétré (figure 6).

Ce millimétrage permet de faire facilement et avec une précision largement suffisante les intégrations par voie graphique en évaluant les surfaces par le nombre des carrés qu'elles contiennent et on trouve ainsi les résultats figurant au tableau II.

En regard des résultats figurent les probabilités qu'on trouverait pour une loi normale d'écart type 0,00225 ; on voit que les différences sont très faibles.

TABLEAU II

Probabilité d'avoir une erreur comprise entre	"	Loi normale
0 et :		
0,001	17,6	17
- 0,001	17,9	17
0,0015	25,2	23,89
- 0,0015	25,8	23,89
0,002	31,4	31,30
- 0,002	32	31,30
0,003	40,8	40,66
- 0,003	42	40,66
0,004	46,6	46,16
- 0,004	47,5	46,16
0,006	49,3	49,54
- 0,006	49,8	49,54

C'est de ce tableau que sont extraits les renseignements figurant dans le corps même de la note.