REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. CAVÉ

Nouvelle méthode de contrôle statistique par mesures

Revue de statistique appliquée, tome 2, nº 1 (1954), p. 43-50
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1954__2_1_43_0>

NOUVELLE MÉTHODE DE CONTROLE STATISTIQUE PAR MESURES

par

R. CAVÉ

Ingénieur Militaire Principal de l'Armement

Dans un précédent article (1) *Monsieur CAVÉ a étudié l'efficacité de la méthode classique de contrôle statistique par mesures ; après avoir souligné que cette efficacité était très variable et fourni des abaques permettant de choisir l'effectif n en fonction de ce que l'on désire.*

Dans le présent article, Monsieur CAVÉ propose une méthode plus affinée, généralisation du cas particulier dit des limites modifiées. Le contrôle pratique en atelier est effectué de façon identique au contrôle classique mais la détermination de l'effectif n des prélèvements et de la position des limites de contrôle est basée sur un point de vue différent, basé sur la notion de courbe d'efficacité.

Le contrôle par prélèvements est un test statistique et, comme tout test statistique, il présente une courbe d'efficacité (fig. 1) donnant la probabilité P d'accepter un réglage donnant une proportion p de pièces mauvaises. Cette courbe montre que l'on court le risque α de première espèce de refuser un réglage donnant une proportion p_1 de pièces mauvaises, proportion que l'on voudrait accepter, et le risque β de deuxième espèce d'accepter un réglage donnant une proportion p_2 que l'on voudrait refuser. Ces courbes d'efficacité sont utilisées pour les réceptions finales des lots et,

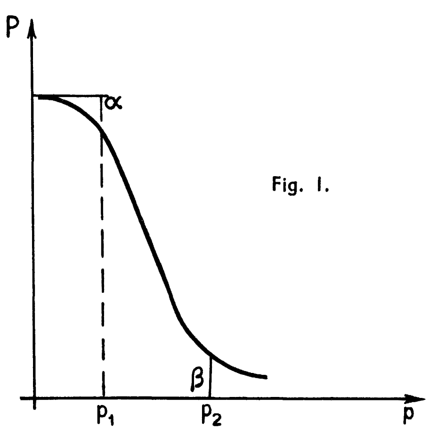


Fig. 1.

dans l'article déjà signalé, nous avons étendu leur utilisation au contrôle des fabrications et montré que ces risques α, p_1- β, p_2 étaient très variables. Les utilisateurs appliquant ces méthodes ne connaissent pas ces risques, puisqu'ils n'ont pas calculé ces courbes et il s'ensuit que le coût du contrôle pourrait être diminué si l'intervalle de tolérance est trop grand. D'autre part, il leur est difficile d'expliquer un insuccès car la qualité de la fabrication est très variable.

(1) Voir « L'efficacité des Méthodes classiques de Contrôle Statistique » par Monsieur CAVÉ. Revue de Statistique Appliquée, 1953. Volume I. 3-4.

EXPOSÉ DU NOUVEAU MODE DE CONTROLE.

Dans la méthode de contrôle statistique classique, l'on « met sous contrôle » la machine sans tenir compte des tolérances, ou en les faisant intervenir de façon arbitraire (limites modifiées) par utilisation d'un coefficient appelé suivant les auteurs, K, F ou G, ce **coefficient étant fixé une fois pour toutes pour chaque effectif n.** On contrôle que la **machine ne se dérègle pas.**

La présente note part au contraire du fait que la machine peut se dérégler, c'est-à-dire que la fabrication peut ne plus être homogène, tout en restant à l'intérieur des limites de tolérances : or, ce qui intéresse le producteur, c'est le pourcentage de pièces mauvaises fabriquées.

Par suite, au lieu de déterminer des coefficients A (fig. 2) donnant la position des limites de contrôle de la moyenne à partir de la cote équidistante des tolérances ou à partir de la moyenne estimée de la fabrication, il semble logique de déterminer un **coefficient τ donnant les limites de contrôle à partir de tolérances par un déplacement égal à $\tau\sigma$** (fig. 2). Il est évident que ce coefficient τ sera indépendant de l'intervalle de tolérance $T_s - T_i = 2\mu\sigma$

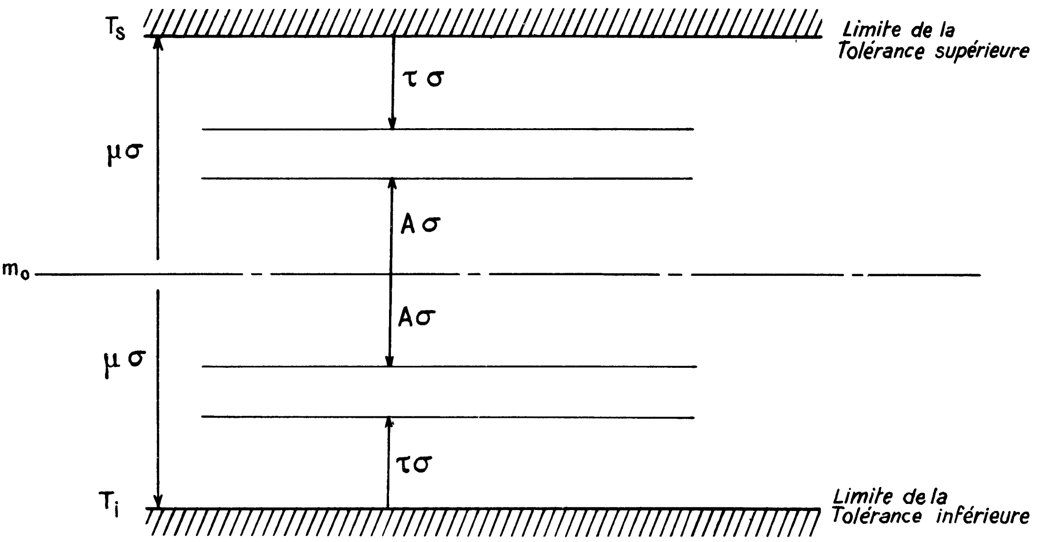


Fig. 2. — Définition des limites du contrôle
A : Théorie classique.
τ : Théorie proposée.

Une fois le coefficient τ déterminé, le mode de contrôle consistera à prélever un échantillon de n pièces à des intervalles à peu près réguliers, et à voir si la moyenne de chaque échantillon reste entre les limites de contrôle décalées de $\tau\sigma$ des tolérances. Il sera nécessaire de connaître une bonne estimation de l'écart-type, que l'on pourra d'ailleurs contrôler par la méthode classique.

THÉORIE DU CONTROLE (Variabilité normale).

Considérons une fabrication dont la variabilité instantanée est déterminée par une loi normale d'écart-type σ.

Lorsque la moyenne instantanée est (fig. 3) à une distance $\lambda\sigma$ de la limite de tolérance, la proportion de pièces mauvaises fabriquées est évidemment égale à :

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\lambda\sigma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\, dx \qquad (1)$$

en prenant pour origine la moyenne et en considérant comme négligeable la proportion de pièces mauvaises situées à l'extérieur de l'autre limite de tolérance, ce qui est en général acceptable, sauf pour λ voisin de μ.

En coordonnées réduites, cette formule devient :

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

Si on prélève n pièces et si on accepte le réglage, lorsque la moyenne est intérieure à une limite de contrôle L_c décalée de $\tau\sigma$ à partir de la tolérance, la probabilité d'accepter le réglage dans ce mode de contrôle est, en utilisant la propriété connue que la population des moyennes (fig. 3) suit une loi de Gauss de même moyenne que la population d'origine et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \int_{-\infty}^{(\lambda-\tau)\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2 n}{\sigma^2}} dx$$

soit en coordonnées réduites

$$(2) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\lambda-\tau)\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

En toute rigueur, il faudrait écrire

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-2\mu+\tau+\lambda)\sqrt{n}}^{(\lambda-\tau)\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

pour tenir compte de la deuxième tolérance, mais la partie de l'intégrale comprise entre $-\infty$ et $(-2\mu+\tau+\lambda)\sqrt{n}$ est infime comparée à la partie essentielle, sauf lorsque λ tend vers μ.

Nous déterminerons n et τ au moyen des risques α, p_1 β, p_2 (fig. 1). On a les quatre équations à quatre inconnues $n\,\tau\,\lambda_1\,\lambda_2$:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\lambda_1-\tau)\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \\ 1-\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\lambda_2-\tau)\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \\ p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \end{cases}$$

exprimant que la courbe d'efficacité passe par les points définis par les risques courus. Si nous désignons par z_a la valeur de la variable réduite telle que

$$(4) \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_a}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

le système des équations précédentes se réduit à

$$(5) \quad \begin{cases} z_\alpha = (\lambda_1 - \tau)\sqrt{n}\,; \quad z_{p_1} = \lambda_1 \\ -z_\beta = z_{1-\beta} = (\lambda_2 - \tau)\sqrt{n}\,; \quad z_{p_2} = \lambda_2 \end{cases}$$

D'où

$$(6) \quad n = \left(\frac{z_\alpha - z_{1-\beta}}{z_{p_1} - z_{p_2}}\right)^2 = \left(\frac{z_\alpha + z_\beta}{z_{p_1} - z_{p_2}}\right)^2$$

$$(7) \quad \tau = \frac{z_\alpha z_{p_2} + z_\beta z_{p_1}}{z_\alpha + z_\beta}$$

Ces deux formules d'une grande simplicité permettent de déterminer n et τ. Il est évident que pour pouvoir appliquer cette méthode il faut avoir

$$\mu > \tau$$

Mais cette condition n'est pas suffisante : la moyenne de l'échantillon n'étant qu'une estimation de la moyenne réelle est une variable aléatoire, il est donc nécessaire d'obtenir un intervalle 2 $(\mu - \tau)\sigma$ suffisant dans lequel on peut trouver la moyenne de l'échantillon sans pour cela qu'il y ait eu déréglage. On pourra prendre un demi-intervalle égal à 3,09 fois l'écart-type (de la moyenne) soit $\frac{3,09}{\sqrt{n}}\sigma$, ce qui n'est autre que le coefficient $A_{0,001}$ de la méthode classique :

$$(8) \qquad \mu - \tau > \frac{3,09}{\sqrt{n}} = A_{0,001} \; ; \; n$$

Si cette condition est respectée, moins de deux fois sur mille, on refusera un réglage parfait.

Avec la condition moins restrictive

$$\mu - \tau > \frac{2}{\sqrt{n}}$$

moins de cinq fois sur cent, on refusera un réglage parfait.

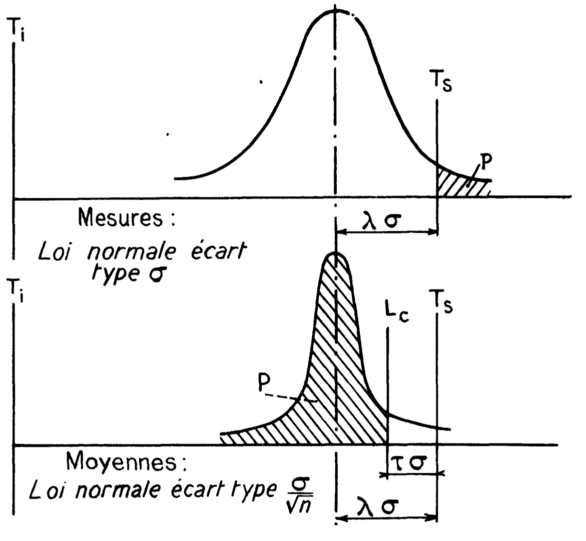


Fig. 3.

Remarque : Avec les notations précédemment utilisées, une fois n et τ fixés, il est facile de voir que la courbe d'efficacité a pour équation, en utilisant la transformation (4) :

$$(9) \qquad z_{1-p} = (z_p - \tau)\sqrt{n}$$

Exemple : Supposons que l'on veuille courir les risques suivants

$$\alpha = 0,05 \qquad p_1 = 0,001$$
$$\beta = 0,10 \qquad p_2 = 0,05$$

On trouve

$$n = \left(\frac{1,645 + 1,282}{3,090 - 1,645}\right)^2 = 4,1$$

$$\tau = \frac{(1,645 \times 1,645) + (1,282 \times 3,09)}{1,645 + 1,282} = 2,28$$

avec

$$\mu > 3,82$$

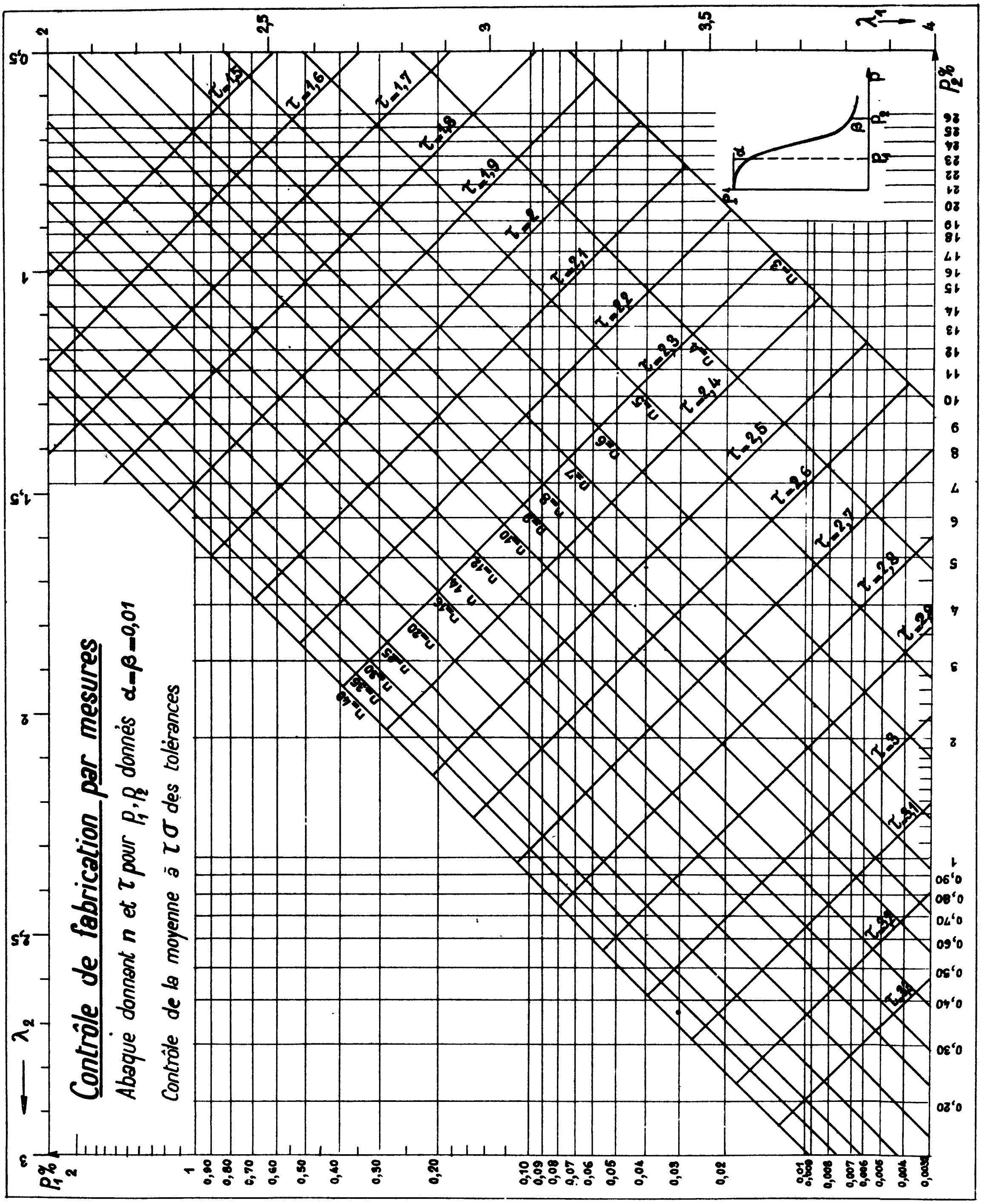
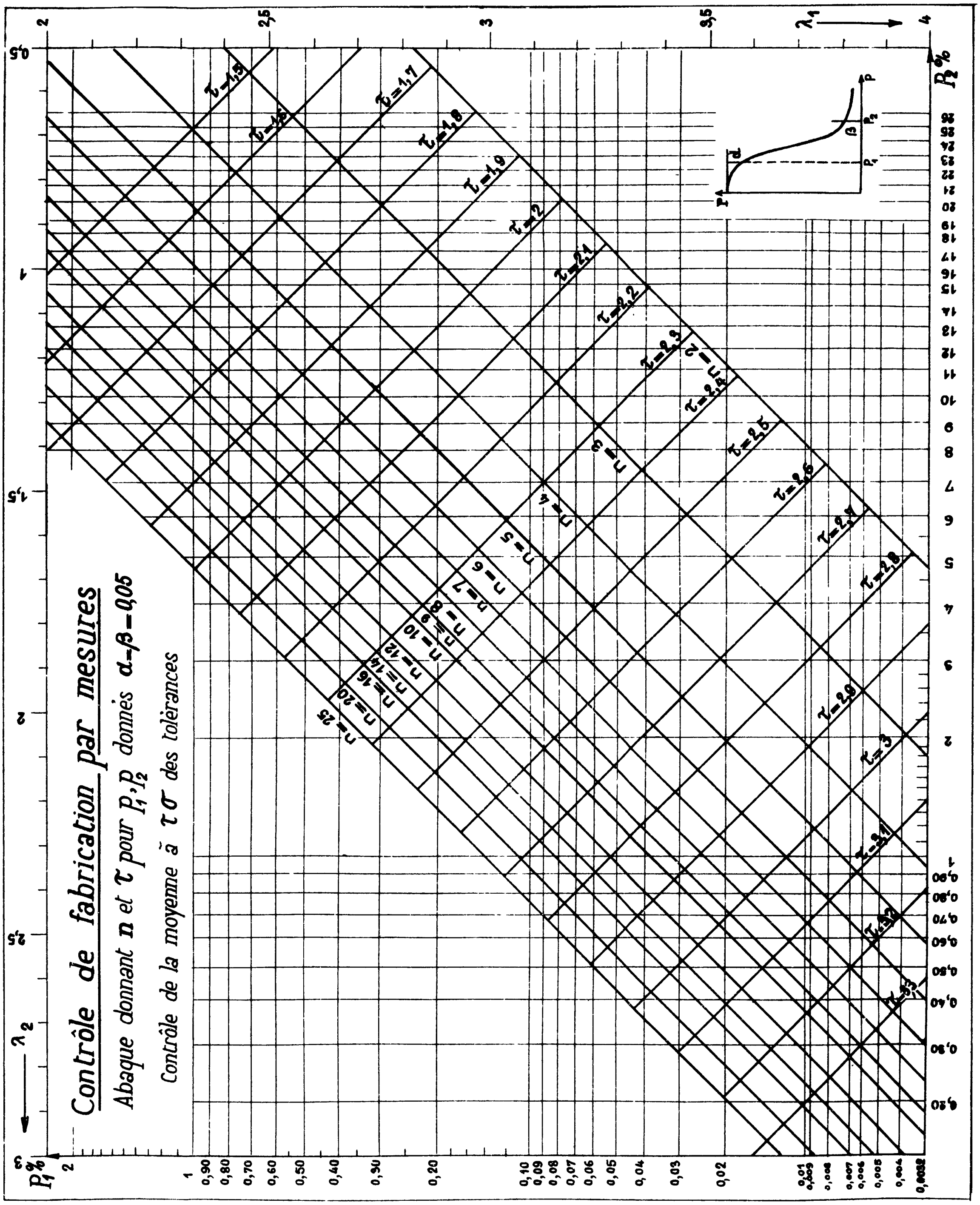

Contrôle de fabrication par mesures
Abaque donnant n et τ pour P1, P2 donnés α=β=0,01
Contrôle de la moyenne à τσ des tolérances

Fig. 4.



Contrôle de fabrication par mesures
Abaque donnant n et τ pour p1, p2 donnés α=β=0,05
Contrôle de la moyenne à τσ des tolérances

Fig. 5.

On prélèvera donc des échantillons de $n = 4$ pièces, et on acceptera le réglage si la moyenne des cotes de ces 4 pièces est au moins distante de $2,28\,\sigma$ des tolérances.

ABAQUES PRATIQUES D'UTILISATION A PARTIR DES RISQUES.

Bien que les formules précédentes soient très simples, il est préférable d'utiliser des abaques permettant de déterminer rapidement les valeurs de n et de τ sans avoir à effectuer de calculs. Les abaques des figures 4 et 5 sont tracés pour des valeurs de α et β fixées et égales et représentant les relations entre p_1 et p_2 pour des valeurs constantes de n et τ : on a en effet, d'après les formules 6 et 7 :

$$z_{p_1} = z_{p_2} + \frac{z_\alpha + z_\beta}{\sqrt{n}} \quad (n = ct)$$

$$z_\alpha z_{p_2} + z_\beta z_{p_1} = (z_\alpha + z_\beta)\tau \ (\tau = ct)$$

Si on prend comme coordonnées z_{p_1} et z_{p_2}, les courbes à n constant sont des droites parallèles à la première bissectrice, les courbes à τ constant sont des droites de pente $-\frac{z_\beta}{z_\alpha}$ et parallèles à la deuxième bissectrice si $\alpha = \beta$, car l'équation des droites n = cte se réduit à :

$$z_{p_1} + z_{p_2} = 2\,\tau$$

formule indépendante de α et β.

Il suffit ensuite de graduer les axes z_{p_1} et z_{p_2} en valeurs de p_1 et p_2 pour obtenir une abaque d'exploitation immédiate.

Les abaques des figures 4 et 5 correspondant à α égal à β et prenant successivement les valeurs 0,01 et 0,05.

En pratique, on se servira de la valeur 0,05. Une fois n et τ fixés, on peut tracer la courbe d'efficacité en se servant de la formule 9. Un point remarquable, d'ordonnée $P = 0,50$ est obtenu, d'après la formule (2) lorsque

$$(\lambda - \tau)\sqrt{n} = 0$$

c'est-à-dire

$$z_p = \tau$$

On retrouve la même valeur en utilisant la formule (9) car $z_{0,50} = 0$.

Pour trouver la valeur de p vérifiant cette équation, il suffit de considérer la correspondance entre $\lambda_1 = z_{p_1}$ et p où $\lambda_2 = z_{p_2}$ et p_2 sur l'un quelconque des abaques.

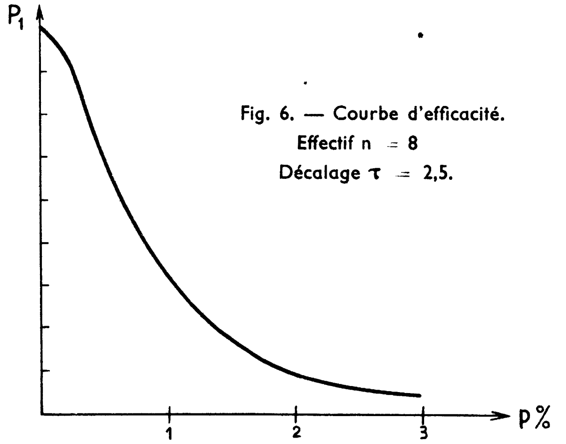


Fig. 6. — Courbe d'efficacité.
Effectif n = 8
Décalage τ = 2,5.

Les courbes à τ constant ont été tracées de 0,1 en 0,1, cette approximation est suffisante car d'après la formule (2) une erreur de $d\tau$ pour une valeur n constante se traduit évidemment, pour une ordonnée constante de la courbe d'efficacité, par une variation de la proportion de pièces mauvaises correspondant à un décalage $d\lambda = d\tau$ de la moyenne : on peut d'ailleurs le vérifier sur les abaques, au moyen des échelles λ_1 et λ_2. Par suite τ variant de 0,1 en 0,1, on commet une erreur maximum de 0,05 sur le déplacement de la moyenne qui sera en général acceptable. On pourra d'ailleurs, si on le désire, interpoler facilement entre deux valeurs de τ, puisque sur une courbe à n constante, la graduation en τ est linéaire.

Si on utilise la condition (8), l'approximation dans le calcul de p est tout à fait justifiée dans tous les cas.

Exemple : On veut courir le risque $\alpha = 0{,}05$ de refuser un réglage donnant $p_1 = 0{,}1\ \%$ de pièces mauvaises et le risque $\beta = 0{,}05$ d'accepter un réglage donnant $p_2 = 3\ \%$ de pièces mauvaises. L'abaque de la figure 5 montre que si on prend des échantillons de 8 pièces avec un décalage égal à $2{,}5\sigma$, on a $p_1 = 0{,}1\ \%$ et $p_2 = 2{,}8\ \%$, approximation largement suffisante. Pour pouvoir fabriquer avec de tels risques, il faut que l'on ait

$$\mu > 2{,}5 + \frac{3{,}09}{\sqrt{8}} = 3{,}6$$

La figure 6 montre la courbe d'efficacité.

LIMITES DE SURVEILLANCE.

De même que dans la méthode classique, on peut utiliser des limites de surveillance, qui signaleront le début possible d'un déréglage. On pourra prendre comme décalage τ' pour la détermination de ces limites :

$$(12) \qquad \tau' = \tau + \frac{0{,}7}{\sqrt{n}}$$

Ce décalage revient à changer un risque $\alpha = 0{,}01$ et p_1 en risque $\alpha = 0{,}05$ et p_1, ou un risque $\alpha = 0{,}05$ et p_1 en risque $\alpha' = 0{,}17$ et p_1.