

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J.-L. SOULÉ

G. THOUZEAU

La détermination d'une caractéristique des détonateurs électriques

Revue de statistique appliquée, tome 1, n° 3-4 (1953), p. 75-82

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_3-4_75_0

© Société française de statistique, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA DÉTERMINATION D'UNE CARACTÉRISTIQUE DES DÉTONATEURS ÉLECTRIQUES

par

J.-L. SOULÉ

Ingénieur Divisionnaire, Chef du Service "Mathématiques"

et

G. THOUZEAU

*Ingénieur au Groupe de Recherches sur les explosifs
au Centre d'Études et de Recherches des Charbonnages de France*

Le Centre d'Études et Recherches des Charbonnages de France consacre une grande partie de son activité à des problèmes de sécurité minière (inflammation du grisou, des poussières de charbon). Le groupe d'études « Explosifs », auquel incombe une grande part des contrôles, doit constamment recourir aux méthodes statistiques pour obtenir la meilleure efficacité des séries d'essais entreprises. C'est l'un de ces problèmes que traitent ici Messieurs Soulé et Thouzeau.

Le tir par « volées » utilise plusieurs détonateurs en série dans une même ligne de tir. Dans ces conditions, il est connu qu'une intensité assez élevée est nécessaire pour éviter les ratés. Le mécanisme de ces ratés est rappelé ; sa connaissance permet d'utiliser des procédés économiques pour déterminer l'intensité minima nécessaire avec un lot de détonateurs donné. Dans l'article ci-après, est exposée la méthode à base statistique qui est utilisée actuellement de façon systématique au CERCHAR, et qui consiste à rechercher l'intensité pour laquelle le risque de raté possède une valeur donnée très faible.

INTRODUCTION.

L'utilisation des explosifs — en particulier dans les travaux souterrains pour le creusement des galeries — oblige très souvent à monter en série, dans un circuit de tir, plusieurs détonateurs électriques qui, par une seule opération d'allumage, feront exploser autant de files de cartouches, soit simultanément (tirs en volée avec détonateurs instantanés) soit en plusieurs fois (tirs en volée avec détonateurs à retard). L'expérience montre que pour assurer la mise de feu de tous les détonateurs, sans qu'il se produise aucun raté, on doit faire passer dans la ligne de tir (donc dans tous les détonateurs) une intensité minimum souvent double (parfois triple) de celle qui est suffisante pour provoquer à coup sûr la détonation d'un détonateur tiré isolément.

Cette constatation pose un problème d'une réelle importance car il conditionne la sécurité et l'efficacité du tir.

Notons, en particulier, que la nécessité d'une intensité assez élevée pour éviter les ratés va en sens inverse de la limitation de la puissance des explosifs, imposée par des raisons d'encombrement et d'utilisation du matériel existant.

Ce problème prend plusieurs aspects :

a) Expliquer le mécanisme des ratés et définir ce qui conditionne la « sensibilité des détonateurs électriques » ;

b) Mesurer sur un lot de détonateurs la valeur de I_n (intensité au-dessus de laquelle on est pratiquement certain de ne pas avoir de raté dans une volée de n détonateurs).

Ces deux aspects relatifs au contrôle se complèteraient évidemment d'un problème de fabrication que nous n'envisagerons pas ici :

c) Diminuer la valeur de I_n pour un type de détonateur donné.

C'est J. Taffanel qui a fait (vers 1911) l'analyse fondamentale de ce problème [1] et en a suggéré une première solution satisfaisante.

FONCTIONNEMENT D'UN DÉTONATEUR ISOLÉ.

Pour saisir le mécanisme des ratés en volée, il est d'abord nécessaire de savoir comment fonctionne un détonateur.

Le principe de tous les détonateurs d'usage courant est le même : un filament métallique fin et court, relié par deux conducteurs à la source de courant, produit par échauffement l'inflammation d'une petite masse de poudre très combustible (inflammateur) ; à son tour, cette poudre provoque l'inflammation et l'explosion d'une charge d'explosif sensible, située à l'autre extrémité du détonateur. (Et cette explosion entraînera celle des cartouches.)

Le passage du courant n'est nécessaire que jusqu'au moment où se produit le début de l'inflammation de la poudre d'allumage. Même si par la suite la combustion de cette poudre entraîne la fusion du filament et la rupture du circuit, le phénomène mis en jeu continuera à se dérouler normalement, jusqu'à détonation de la charge. Une conséquence de ce mécanisme est que si le courant se trouve arrêté artificiellement après le début de l'inflammation ou « amorçage », le détonateur fonctionnera cependant parfaitement.

Ainsi un détonateur est caractérisé par deux délais, ayant pour origine l'instant de la mise sous tension :

— le délai d'amorçage ou d'excitation t_1 : temps minimum pendant lequel le courant doit passer pour que le détonateur fonctionne ;

— le délai de rupture t_2 : temps au bout duquel le filament se rompt, soit par échauffement, soit par suite de la détonation.

Sauf anomalie, t_1 est toujours inférieur à t_2 .

Ces deux délais sont des fonctions de l'intensité d'alimentation (nous ne considérerons que des intensités constantes). Pour fixer les idées, disons qu'ils sont, en général, de l'ordre de quelques millisecondes.

RATÉS DANS LES VOLÉES.

Il est établi que la cause des ratés dans une volée de détonateurs en série est l'hétérogénéité de leurs délais t_1 et t_2 . Il est inévitable que certains détonateurs s'amorcent et détonent plus vite que les autres, bien qu'ils proviennent d'une même fabrication : lorsqu'une rupture se produit dans une volée avant que tous les détonateurs soient amorcés, il y aura des ratés.

Les facteurs d'hétérogénéité sont nombreux ; citons parmi ceux-ci : adhérence de la poudre, longueur et section du filament, et surtout irrégularité des soudures (opération manuelle très délicate), etc... Dans un lot, il existe ainsi pour une intensité donnée une certaine répartition des valeurs du délai t_1 , une autre répartition pour t_2 . Si aucune valeur de t_1 ne chevauche avec une valeur de t_2 , on pourra tirer sur cette intensité une volée aussi nombreuse que l'on voudra, sans risque de raté. Dans le cas contraire, il existera un risque plus ou moins grand. En fait, les deux répartitions sont de plus en plus écartées à mesure que l'intensité augmente : c'est pourquoi le risque est fonction décroissante de l'intensité.

DIFFÉRENTES DÉTERMINATIONS DE I_n .

Ainsi, pour un lot donné, il existe théoriquement une intensité pour laquelle le risque s'annule : c'est celle où le délai d'amorçage le plus long est égal au délai de rupture le plus court. Mais cette

intensité est inaccessible à la connaissance, parce que les mesures sont nécessairement destructrices. On est donc obligé de s'en tenir à une estimation statistique. Ceci peut se faire selon divers plans d'essais :

1^o Méthode directe (employée en Amérique et chez certains fabricants).

Elle consiste à tirer un certain nombre d'échantillons en volées de n , sur des intensités convenablement échelonnées, et à constater les ratés qui se produisent. On a ainsi une estimation directe du risque en fonction de l'intensité. Sans pouvoir être sûr qu'il soit nul pour aucune intensité, on peut obtenir la quasi-certitude qu'il est très faible à partir d'une certaine intensité. Cependant, cette méthode oblige à consommer un grand nombre de détonateurs, et à refaire les essais pour chaque valeur de n .

2^o Méthode Taffanel.

Taffanel a mis au point une méthode moins coûteuse qui consiste à mesurer pour diverses intensités les délais d'amorçage et les délais de rupture d'un certain nombre de détonateurs tirés isolément.

Il considère la courbe enveloppe du plus petit délai de rupture en fonction de I et la courbe enveloppe du plus grand délai d'amorçage en fonction de I : leur intersection fournit une estimation de I_n .

Notons que si la mesure du délai de rupture d'un détonateur est parfaitement possible, il n'en est pas de même pour le délai d'amorçage : tout ce qu'on peut faire, c'est constater si une durée de passage du courant est suffisante ou non pour l'amorcer, autrement dit, si t_1 est supérieur ou inférieur à une valeur donnée (c'est un essai du type « passe » ou « ne passe pas », comme l'essai au calibre pour les fabrications en série). La courbe enveloppe des délais d'amorçage correspondra aux durées de passage les plus courtes ayant toujours donné lieu à des détonations.

Cette méthode, longtemps utilisée, a l'inconvénient de ne pas tenir compte du hasard d'échantillonnage. Elle ne permet pas d'estimer le risque réel de raté ni la précision et oblige à prendre une marge de sécurité arbitraire. Ce défaut apparaît bien si l'on pense que plus on essaiera de détonateurs, plus I sera vraisemblablement élevé, alors que pourtant on sera mieux renseigné sur le risque. D'ailleurs, cette méthode ne fait pas apparaître l'influence de n sur le risque de raté.

3^o Méthode statistique.

Sur le même type d'essai que celui de Taffanel (1), l'application des principes de la statistique permet une définition et une détermination plus logiques de la valeur de I_n . La méthode consiste à rechercher une connaissance aussi grande que possible de l'ensemble des lois de répartition des délais t_1 et t_2 dans le lot. La probabilité de raté pour une valeur de n (sur une intensité fixée) résulte de ces lois : la connaissance des lois entraîne donc la connaissance du risque et si l'on se fixe un risque maximum, on fixe I_n . La marge d'incertitude résulte des erreurs d'estimation : on peut donc aussi l'évaluer.

L'idée d'appliquer les principes de la statistique à la détermination de I_n s'est développée à peu près simultanément en France, au Cerchar (Loison et Ulmo, travaux non publiés) et en Angleterre, au S. M. R. E. (Allsop [2]). Nous allons maintenant exposer la méthode statistique, sous la forme que nous lui avons donnée.

EXPOSÉ DU PLAN D'ESSAIS ET DE SON INTERPRÉTATION.

a) Les lois de répartition.

L'hypothèse fondamentale concerne la forme des lois de répartition : on les suppose normales (lois de Laplace-Gauss). Ainsi l'estimation porte uniquement sur des moyennes et des écarts-

(1) Taffanel avait déjà parfaitement aperçu le caractère aléatoire du phénomène, l'aspect statistique du problème de détermination de I_n et l'imprécision du mode de détermination qu'il avait proposé :

« La détermination expérimentale de la limite I_n à partir de laquelle il ne se produit plus de ratés soulève une objection bien connue, puisqu'il s'agit d'un phénomène soumis aux lois de probabilité. L'expérience ne peut pas donner, à moins de faire un nombre considérable d'essais, l'intensité à partir de laquelle la probabilité de ratés est rigoureusement nulle ; elle donne seulement une valeur de l'intensité à partir de laquelle cette probabilité est très faible et par suite négligeable... La variation de I_n avec n s'explique aisément par le calcul des probabilités ». Note sur le tir électrique, p. 51 [1].

types. (En fait, il s'est avéré préférable de supposer les lois logarithmico-normales, ce qui revient à prendre pour variable le logarithme du temps au lieu du temps lui-même). Cette hypothèse est contrôlable : on l'a trouvée satisfaisante pour des lots homogènes.

L'estimation des paramètres est immédiate pour le délai de rupture. Pour le délai d'amorçage, on détermine des fréquences de détonation pour différents temps de passage, et on ajuste la loi par la méthode du maximum de vraisemblance (voir par exemple [3]).

b) La probabilité de raté sur une intensité.

Supposons donc connues pour une intensité donnée les 4 paramètres $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ (μ_1 : moyenne du logarithme du délai d'amorçage ; σ_1 : écart-type de ce logarithme ; μ_2 et σ_2 : paramètres correspondants pour le délai de rupture).

Quelle est sous cette intensité le risque de raté avec n détonateurs, autrement dit quelle est la probabilité pour qu'une volée de n détonateurs présente au moins une interversion d'un délai d'amorçage et d'un délai de rupture ? Ceci est un problème purement mathématique, en principe parfaitement soluble. Il conduit cependant à une expression sous forme d'intégrale, impraticable pour le calcul numérique. Nous avons établi une expression asymptotique pour les risques très faibles, et calculé une majoration de l'erreur qui montre qu'elle est satisfaisante. Cette expression est :

$$P = n(n-1) G \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right]$$

où G est l'intégrale de la loi de Laplace-Gauss réduite :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Nous donnons en annexe quelques précisions sur cette question. (Le facteur $n(n-1)$ vient de ce que chaque délai d'amorçage ne peut chevaucher qu'avec les délais de rupture des $n-1$ autres détonateurs.)

c) Définition de I_n .

Fixer P détermine I_n . Nous avons choisi $P = 0,001$. Il suffit de calculer une fois pour toutes ρ_n par la formule :

$$0,001 = n(n-1) G(-\rho_n).$$

et au moyen des tables de la loi de Laplace-Gauss. On obtient :

$$\rho_2 = 3,29 \quad \rho_5 = 3,90 \quad \rho_{10} = 4,24 \quad \rho_{100} = 5,20$$

D'autre part, les mesures fournissent une estimation de la loi $\rho(l)$, où $\rho = \mu_2 - \mu_1 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. On a donc ainsi une estimation des différentes valeurs de I_n .

d) Précision et plan d'essais.

La précision sur ρ résulte de la précision sur les 4 paramètres. Ce sont surtout les écarts-types qui seront imprécis. La mesure des délais d'amorçage exige plus d'essais que celle des délais de rupture. On peut calculer la répartition la plus efficace entre les deux sortes de mesure ; on trouve qu'il faut faire 5 déterminations d'amorçage, pour 2 de rupture.

Comme les essais effectués jusqu'à présent ont montré que les diverses caractéristiques pouvaient être interpolées linéairement en fonction de l (sauf le délai moyen de rupture), on a été conduit pour un échantillon de 320 détonateurs au plan suivant :

	Amorçage	Rupture
I_α	100	40
I_β		40
I_γ	100	40

Quelques essais de cadrage permettent de situer I_α et I_γ aussi près que possible de I_2 et I_{100} .

On interpole ensuite μ_1 et $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ sur I_α et I_γ , μ_2 sur les 3 intensités.

En général, la précision obtenue sur l est caractérisée par une erreur-type de l'ordre de 5 à 7 %. Cette précision peut être considérée comme suffisante si l'on tient compte des écarts qu'on

observe d'un lot à l'autre pour des détonateurs du même type. Sa connaissance permet un choix logique de la marge de sécurité.

INDICATIONS COMPLÉMENTAIRES FOURNIES PAR LES ESSAIS.

Outre une détermination économique et satisfaisante de I_n , les essais de ce type permettent de recueillir des renseignements intéressants sur les lots de détonateurs :

a) Valeur de t_n .

Pour des raisons de sécurité antigrisouteuse, les exploseurs de mine qui fournissent le courant dans la ligne de tir ont, en général, un dispositif de limitation de la durée de passage du courant. La connaissance de la répartition des délais d'amorçage permet de connaître le risque de raté de ce fait et, par suite, de déterminer l'intensité à prévoir pour limiter ce risque à une valeur fixée.

b) Mélange de lots.

Pour un même type de détonateurs, les caractéristiques varient nettement d'une période à l'autre de la fabrication. Le mélange de lots est donc susceptible d'entraîner une augmentation importante de I_n . La connaissance des caractéristiques respectives des lots permet de calculer cette nouvelle valeur de I_n .

c) Hétérogénéité d'un lot.

Inversement, l'allure des lois de répartition permet parfois de suspecter l'homogénéité d'un lot. Elle pourrait aussi guider le fabricant dans la constitution de ses lots.

CRITIQUE ET CONCLUSIONS.

1) On aurait tort d'accorder à la probabilité de raté 0,001 une réalité physique absolue ; elle a plutôt une signification logique. En effet, toute méthode de détermination de I_n ne peut être fondée que sur une extrapolation des données fournies par les mesures, qui sont en nombre restreint : la méthode statistique apparaît ici comme une logique de l'extrapolation. De l'hypothèse de « normalité » résulte une assurance contre les ratés dus aux détonateurs dans la fabrication desquels n'a joué aucun facteur d'anomalie.

D'ailleurs, la loi de répartition continue et illimitée, utilisée dans les calculs, remplace la distribution réelle, nécessairement limitée, d'un lot fini. D'où il résulte en particulier, que le risque calculé est censé ne jamais s'annuler, alors qu'en pratique pour ce lot fini, il existe une intensité à partir de laquelle tout délai de rupture sera supérieur à tout délai d'amorçage.

2) La statistique fournit des résultats qui sont toujours provisoires dans une certaine mesure, et que des connaissances nouvelles sont susceptibles d'améliorer.

Ainsi, dans le cas présent, un contrôle complémentaire peut être envisagé. Le suivant paraît assez bien adapté : tirer des volées importantes ($n = 50$ ou 100) sur une intensité assez basse (I_2 ou I_5) en mesurant chaque fois l'instant de la rupture (et le nombre de ratés). On pourrait vérifier ainsi simultanément la loi de répartition du plus petit délai de rupture de n détonateurs, et la probabilité de raté d'amorçage dans la zone critique.

3) La méthode que nous venons d'exposer concernant la mesure de la sensibilité électrique ne constitue qu'un aspect du problème général des détonateurs, pour lequel, on le voit par cet exemple, la statistique apporte une contribution précieuse.

ANNEXE SUR LA PROBABILITÉ DE RATÉ

Nous supposons qu'une volée est constituée de n détonateurs extraits au hasard et indépendamment d'un lot bien défini. Pour une intensité de tir donnée, ce lot possède une certaine loi de répartition des délais d'amorçage et une loi des délais de rupture. Etant donné ces lois, quelle est la probabilité de raté, c'est-à-dire quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une intervention d'un délai d'amorçage et d'un délai de rupture dans un échantillon de n détonateurs ?

Tout d'abord, constatons qu'il nous manque un renseignement pour la solution mathématique rigoureuse de ce problème : à savoir le lien qui existe entre le délai d'amorçage et le délai de rupture d'un même détonateur. Autrement dit, il faudrait connaître la loi complète de répartition à deux variables (délai d'amorçage, délai de rupture), au lieu d'avoir seulement les « lois marginales » de ces variables prises séparément. Ceci est physiquement impossible, parce que la mesure simultanée n'est pas réalisable. Nous verrons que cette ignorance a peu de répercussion sur le problème pratique.

EXPRESSION RIGoureuse DE LA PROBABILITÉ DE RATÉ.

Nous supposons des répartitions continues (ce qui exige évidemment de considérer une population infinie).

L'expression rigoureuse cherchée s'obtiendra en considérant l'espace à $2n$ dimensions des délais de l'échantillon. Soit $f(t_1, t_2)$ la densité de probabilité de la loi à 2 variables. La probabilité de raté est égale à l'intégrale suivante prise dans un certain domaine Ω :

$$P = \int_{\Omega} f(t_{11}, t_{21}) \cdot f(t_{12}, t_{22}) \dots f(t_{1n}, t_{2n}) dt_{11} dt_{12} \dots dt_{1n} dt_{2n}$$

Ω est le domaine de raté ; il est constitué par l'ensemble des points où est satisfaite l'une au moins des n^2 inégalités du type suivant : $t_{2i} < t_{1j}$.

Des intégrations successives permettent de réduire le nombre de variables. La façon la plus judicieuse de procéder s'obtient aisément à partir de la remarque suivante :

La probabilité de raté est la somme de n^2 probabilités disjointes, correspondant chacune au cas où c'est le délai d'amorçage de tel détonateur qui est le plus grand, et le délai de rupture de tel détonateur qui est le plus petit, et où, de plus, ces 2 valeurs sont interverties.

Ces n^2 probabilités se décomposent en 2 types :

- a) dans $n(n-1)$ cas, les deux détonateurs particularisés sont distincts ;
- b) dans n cas, il s'agit du même détonateur.

Précisons, dès maintenant, que la loi f est supposée telle que les probabilités du type b sont nulles (par nature t_1 et t_2 ne peuvent être interverties dans un détonateur ; en tout cas, c'est un fait constatable).

Les probabilités du type a sont évidemment toutes égales. Nous allons en évaluer une. Soit t_{11} et t_{22} les délais extrêmes considérés. Le domaine d'intégration est défini par :

$$\begin{aligned} t_{1i} &< t_{11} \text{ pour } i \neq 1 \\ t_{2j} &> t_{22} \text{ pour } j \neq 2 \\ t_{11} &> t_{22} \end{aligned}$$

On peut intégrer immédiatement par rapport aux $2n - 4$ variables non relatives aux 2 premiers détonateurs. On met en jeu la fonction $F(t_{11}, t_{22})$ définie par $\iint f(t_{1i}, t_{2j}) dt_{1i} dt_{2j}$ dans le domaine $t_{1i} < t_{11}$ et $t_{2j} > t_{22}$. C'est d'ailleurs la fonction de répartition des variables t_{11} et t_{22} .

On obtient ainsi l'intégrale quadruple :

$$\int f(t_{11}, t_{21}) \cdot f(t_{12}, t_{22}) \cdot F^{(n-2)}(t_{11}, t_{22}) dt_{11} dt_{12} dt_{21} dt_{22}$$

à prendre dans le domaine :

$$\begin{aligned} t_{12} &< t_{11} \\ t_{21} &> t_{22} \\ t_{11} &> t_{22} \end{aligned}$$

Mais d'après la remarque faite plus haut, la 3^e condition entraîne nécessairement les 2 autres (en probabilité). De sorte qu'il revient au même d'intégrer dans le domaine :

$$t_{11} > t_{22}$$

On arrive ainsi à l'intégrale double :

$$\iint_{t_{11} > t_{22}} p_1(t_{11}) \cdot p_2(t_{22}) \cdot F^{(n-2)}(t_{11}, t_{22}) dt_{11} dt_{22}$$

où p_1 et p_2 sont les densités des lois marginales de t_1 et t_2 (les lois connues). Finalement, la probabilité de raté s'écrit :

$$P = n(n-1) \iint_{t_1 > t_2} p_1(t_1) \cdot p_2(t_2) \cdot F^{(n-2)}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

FORMULE ASYMPTOTIQUE POUR LES PROBABILITÉS FAIBLES (ET DES LOIS NORMALES).

La formule précédente rigoureuse est inutilisable pour la double raison qu'on ne connaît pas complètement F et que pour une répartition normale on ne peut pas aboutir à une expression explicite.

Mais ce qui nous intéresse essentiellement pour la définition de I_n , c'est une expression valable pour les faibles valeurs de P . C'est pourquoi nous avons cherché une formule asymptotique.

Il suffit, pour l'obtenir de remarquer que si P est petit, c'est que les lois p_1 et p_2 ont une zone commune faible, et dans cette zone F est alors voisin de 1. La formule asymptotique s'obtiendra donc en négligeant le facteur $F^{(n-2)}$.

$$P' = n(n-1) \iint_{t_1 > t_2} p_1(t_1) p_2(t_2) dt_1 dt_2$$

On peut remarquer qu'on remplace ainsi P par la valeur du nombre « attendu » d'interversions. Ces deux quantités sont asymptotiquement égales parce que les cas de ratés avec interversions multiples sont relativement de plus en plus rares quand la probabilité de raté diminue.

Le calcul de P' est immédiat et classique pour des lois normales. On obtient :

$$P' = n(n-1) G \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right]$$

où $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$, sont les paramètres des 2 lois, et où G représente la fonction de répartition de la loi normale réduite.

(Notons, pour le raccordement avec le texte, qu'un changement d'échelle logarithmique a été effectué sur le temps).

MAJORATION DE LA DIFFÉRENCE ENTRE P ET P' .

Il y a évidemment lieu de connaître dans quelle mesure on peut remplacer P par P' . Nous allons pour cela calculer une majoration de l'erreur, ce qui justifiera en même temps de façon rigoureuse les affirmations précédentes.

D'abord, comme $F < 1$, on a $P' > P$.

Il nous faut, d'autre part, une majoration de $1 - F$. En se reportant à la définition de F , on voit qu'on obtient cette majoration par la somme de deux termes :

$P_1(t_1)$, probabilité pour que $t_{1i} > t_1$,

$P_2(t_2)$, probabilité pour que $t_{2j} < t_2$.

Ce sont les fonctions de répartition marginales (connues) de $-t_1$ et t_2 .

$1 - F^{(n-2)}$ sera majoré par $n - 2$ fois la somme précédente.

De sorte que finalement :

$$P - P' < n(n-1)(n-2) \iint_{t_1 > t_2} p_1(t_1) p_2(t_2) P_1(t_1) dt_1 dt_2 \\ + n(n-1)(n-2) \iint_{t_1 > t_2} p_1(t_1) p_2(t_2) P_2(t_2) dt_1 dt_2$$

Il est bon de noter que la majoration consiste à additionner les probabilités (non disjointes cette fois) d'interversions de 3 détonateurs donnés (2 amorçages avec une rupture et l'inverse). C'est donc bien une majoration de la différence.

D'autre part, cette remarque suggère la suite du calcul pour des lois normales : d'abord revenir à l'espace à 3 dimensions (3 variables normales indépendantes) où le domaine d'intégration est un dièdre, puis changer les échelles pour « réduire » les lois, enfin, faire une rotation des axes pour amener l'un d'eux sur l'arête du dièdre. On est ainsi ramené à évaluer l'intégrale d'une loi normale à deux variables dans un domaine angulaire. A ce stade, nous avons dû opérer une nouvelle majoration en intégrant dans un angle droit.

Nous ne donnerons pas la formule (assez compliquée) obtenue. Elle permet, par exemple, de calculer (pour σ_1 voisin de σ_2 , ce qui est le cas pratique) que si $P' = 0,001$, on a

$$\text{pour } n = 8 : 0,0009 < P < 0,001,$$

$$\text{pour } n = 64 : 0,0008 < P < 0,001.$$

(Évidemment, pour $n = 2$, on a toujours $P' = P$).

L'expression approchée est donc tout à fait satisfaisante.

AUTRE MÉTHODE D'APPROXIMATION.

On peut songer à une autre méthode d'approximation. Elle consiste à remarquer que, au moins pour les échantillons importants, le plus petit des « n » délais de rupture et le plus grand des « n » délais d'amorçage ont des lois de probabilité pratiquement indépendantes. Les fonctions de répartition sont P_1^n et P_2^n . On en déduit que la probabilité de raté est sensiblement

$$P^n = - \int_{-\infty}^{+\infty} P_2^n(t) \cdot d[P_1^n(t)]$$

D'autre part, pour des lois normales et « n » grand, on connaît une expression asymptotique pour P_1^n (et P_2^n). On pourrait ainsi arriver à faire aboutir le calcul.

Malheureusement, les expressions asymptotiques sont encore insuffisamment exactes pour $n = 100$, nombre qui est le plus grand que nous ayons à considérer. Mais l'intégrale ainsi écrite est commode pour les calculs numériques particuliers.

BIBLIOGRAPHIE

1. — TAFFANEL (J.), DAUTRICHE (H.), DURR (A.) et PERRIN (R.). — Note sur le tir électrique. Annales des Mines, VII, (1919), 6-124 et 127-261.
2. — ALLSOP (G.). — Statistics applied to testing of fuseheads for electric detonators, with an application to the rating of multi-shot exploders (statistique appliquée à l'essai des têtes d'amorce de détonateurs électriques, avec application au classement des explosifs multiples) (communication à la 5^e Conférence Internationale des Directeurs de Stations d'Essais sur la Sécurité dans les Mines) Bureau of Mines, Bulletin 489, 135-8.
3. — ULMO (J.). — Détermination expérimentale de la courbe représentant les variations en fonction d'un paramètre de la probabilité d'un phénomène se traduisant par une alternative quand celle-ci est une courbe en S de Galton. Annales des Mines (1952), n° 111-IV, 93-130.