CAVÉ

L'efficacité des méthodes classiques de contrôle statistique

Revue de statistique appliquée, tome 1, nº 3-4 (1953), p. 25-43
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_3-4_25_0>

L'EFFICACITÉ DES MÉTHODES CLASSIQUES DE CONTROLE STATISTIQUE

par

M. CAVÉ

Ingénieur Militaire Principal de l'Armement

Dès 1947, la Direction des Etudes et Fabrications d'Armement, soucieuse de la nécessité de donner à ses ingénieurs, non seulement l'esprit statistique, mais aussi la technique statistique de plus en plus nécessaires dans le domaine industriel, a créé un cours de Contrôle et d'Analyse statistique dans ses Ecoles : Ecole Nationale Supérieure de l'Armement et Ecole Technique Supérieure de l'Armement.

M. CAVÉ, qui professe ce cours, a eu l'occasion d'appliquer ces méthodes à des cas concrets de contrôle en cours de fabrication, de contrôle de réception et à diverses études : il a pu ainsi apporter sa contribution personnelle à certaines de ces applications.

L'article ci-après donne les moyens de préciser les conditions d'un contrôle classique en utilisant, en particulier, la notion de courbe d'efficacité.

Dans certains articles traitant des procédés de contrôle de fabrication dits « QUALITY CONTROL », on se contente de définir les principes du contrôle, d'indiquer la façon de calculer les limites de la moyenne et de l'écart-type (ou du range) de l'échantillon et ensuite de donner un ou deux exemples. Mais on ne précise pas la façon de déterminer le nombre n de pièces à prélever et la fréquence des prélèvements et on ne dit rien sur l'efficacité du contrôle qui doit forcément varier avec n. Or, dans les tableaux, n varie de 2 à 30, ce qui, pour une même fréquence de prélèvements, fait varier le coût du contrôle dans un rapport de 1 à 15. On trouve même quelquefois des indications tout à fait vagues, variées, souvent erronées telles que les suivantes, données ici de façon anonyme :

— On « **peut** » choisir comme effectif de l'échantillon n 4, mais n 5 (ou 10) est préférable à cause de la division plus facile, ce qui fait dépendre l'effectif du système de numération et conduirait dans un système duodécimal à n 6 (!). Or, il suffit (paragraphe I-I) de contrôler la somme des termes et non la moyenne pour ne pas avoir à effectuer de division ! Un effectif de n 10 ou 20 est très sensible, mais si le contrôle est coûteux, on peut se contenter de n 2 ou 3 ; un prélèvement de 6 pièces à l'heure est équivalent à un prélèvement de 4 pièces toutes les 40 minutes, ce qui est une erreur de principe fondamentale ; il est préférable de réduire l'effectif n pour effectuer des prélèvements plus fréquents, etc... !

— Les prélèvements « **doivent** » porter sur 5 à 10 % de la fabrication, très exceptionnellement sur une proportion plus faible lorsque des méthodes sont appliquées depuis longtemps : cette affirmation conduit, pour des machines automatiques à cadence rapide, à effectuer des prélèvements excessivement fréquents et à contrôler un nombre de pièces beaucoup plus grand que le nombre utilisé par les méthodes antérieures, méthodes qui n'étaient peut-être pas scientifiques, mais donnaient souvent satisfaction. D'autre part, elle semble supposer que la théorie est approchée, ce qui est une erreur ; en effet, la théorie est rigoureusement correcte si on prélève une proportion de 1 pour mille, 1 pour un million, etc..., elle est correcte sous réserve de l'exhaustivité, si on prélève une proportion de pièces égale à 30, 40 %, etc... Il tombe sous le sens que ces extrêmes ne peuvent avoir d'application pratique intéressante, mais pourquoi se limiter à 5 ou 10 % ? Il est préférable de choisir une fréquence optima variable avec les fabrications.

— Par contre, les coefficients utilisés $A_{0,001}$, etc... sont donnés avec trois décimales et nous montrerons que la première décimale est suffisante pour les cas pratiques.

— On ne contrôle que la constance de fabrication de la machine, mais, sauf cas particuliers, on ne relie pas ce contrôle aux tolérances, ce qui, tout de même, est anormal.

Un contrôle par prélèvement est un **test statistique** et, comme tout test, il possède une courbe caractéristique d'efficacité qui donne la probabilité P d'accepter une fabrication produisant une proportion p de pièces mauvaises. Nous nous proposons **de calculer les courbes d'efficacité des cartes de contrôle** pour différentes valeurs de l'effectif n des échantillons en fonction des tolérances et d'en **déduire des abaques permettant de choisir le nombre n de pièces à prélever** en fonction du risque β d'accepter une proportion p_2 de pièces mauvaises.

Tous les calculs seront orientés vers l'utilisation et on effectuera, si nécessaire, des approximations permettant de simplifier la détermination de ces nombres.

I. THÉORIE DES CARTES DE CONTRÔLE PAR MESURE

Il est utile, après un rappel rapide des opérations pratiques effectuées, d'indiquer la théorie des méthodes classiques de contrôle statistique.

I. — MÉTHODE DE L'ÉCART-TYPE.

On prélève des échantillons de n pièces à des intervalles réguliers, toutes les N pièces fabriquées. La mesure de ces pièces donne les valeurs :

$$x_{i1} \quad x_{i2} \cdots\cdots x_{ij} \cdots\cdots x_{in}$$

pour le ième prélèvement ; on en déduit la moyenne et l'écart-type de cet échantillon. Si les points représentant la moyenne et l'écart-type sont à l'intérieur de droites de contrôle que l'on calcule, on accepte le réglage, sinon on le refuse. Ces droites sont tracées à partir d'estimations suffisamment précises de la moyenne et de l'écart-type (par exemple, à partir d'une quinzaine, une vingtaine de prélèvements) au moyen de coefficients donnés dans des tableaux. Les paragraphes ci-après indiquent la méthode qui a permis d'établir ces coefficients.

I. I. — Diagramme de contrôle de la moyenne.

On sait que la moyenne d'un échantillon de n pièces suit, si la population est normale (I), une loi de Gauss ayant comme moyenne la moyenne m de la population et pour écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. σ étant l'écart-type de la population.

On a donc :

— 95 % des valeurs dans l'intervalle $m \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

— 998 % des valeurs dans l'intervalle $m \pm 3{,}09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Si l'on connaît, après r prélèvements, des estimations absolument correctes

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{r} \Sigma \bar{x}$$

$$\sigma'' = \frac{1}{b_n} \bar{\sigma}$$

(I) Pour une population quelconque, la distribution des moyennes tend, lorsque n augmente, vers la loi normale, et ce d'autant plus rapidement que la distribution de la population est elle-même plus voisine d'une loi normale.

formules dans lesquelles $\Sigma\ \bar{x}$ est la somme des moyennes, $\bar{\sigma}$ la moyenne des écarts-types des échantillons, on pourra remplacer m et σ par ces estimations. On tracera donc sur les diagrammes de la moyenne (fig. 1) :

— les limites de contrôle, à l'extérieur desquelles on doit avoir 2 $^{0}/_{00}$ des points s'il n'y a pas déréglage :

$$(1)\begin{cases} L_{ci} = \bar{\bar{x}} - A_{0,001}\ \sigma'' \\ L_{cs} = \bar{\bar{x}} + A_{0,001}\ \sigma'' \end{cases}$$

$$\text{avec } A_{0,001} = \frac{3,09}{\sqrt{n}}$$

— les limites de surveillance, à l'extérieur desquelles on doit avoir 5 % des points s'il n'y a pas déréglage :

$$(2)\begin{cases} L_{si} = \bar{\bar{x}} - A_{0,025}\ \sigma'' \\ L_{ss} = \bar{\bar{x}} + A_{0,025}\ \sigma'' \end{cases}$$

$$\text{avec } A_{0,025} = \frac{1,96}{\sqrt{n}}$$

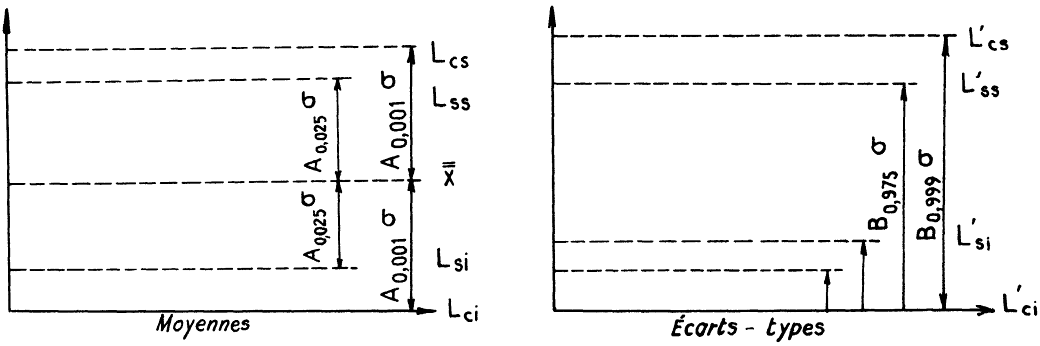

Fig. 1.

Pour ne pas avoir à diviser par n, on peut contrôler la somme $\Sigma\ x_i$ des valeurs obtenues les limites de contrôle et de surveillance étant distantes de la moyenne des sommes $\Sigma\, x_i$ des quantités

$$3,09\ \sqrt{n}\ \sigma$$
$$1,96\ \sqrt{n}\ \sigma$$

ces nouveaux coefficients de σ n'étant autres que les coefficients $A_{0,001}$ et $A_{,0025}$ multipliés par n.

I. 2. — Diagramme de l'écart-type.

L'écart-type de la population étant σ'_x la quantité

$$\chi^2_{n-1} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}$$

suit une loi de χ^2 à $\nu =$ n-1 degrés de liberté, si l'on suppose la loi initiale normale. On peut trouver dans les tables de χ^2 la valeur χ^2_{n-1} telle que

$$\Pr\left\{\chi^2 > \chi^2_{n-1,\,\alpha}\right\} = \alpha$$

c'est-à-dire :

$$\Pr\left\{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n} > \frac{\chi^2 n-1,\ \alpha}{n}\sigma_x^2\right\} = \alpha$$

Or, l'écart-type de l'échantillon a pour valeur :

$$\sigma'_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

c'est une estimation simplement correcte de l'écart-type de la population et non une estimation absolument correcte, mais on a adopté cet écart-type pour une commodité d'utilisation.

On a donc

$$\Pr\left\{ \sigma'_x > \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha}}{n}} \cdot \sigma_x \right\} = \alpha \qquad (3)$$

Si on connaît, après r échantillons, une estimation suffisamment précise de σ_x on pourra tracer sur le diagramme des écarts-types (fig. I) :

— les limites de contrôle de σ'_x à l'extérieur desquelles nous avons 2 ‰ des points représentant σ'_x

$$(4) \quad \begin{cases} L_{ci} = B_{n\,;0{,}001}\ \sigma_x \\ L_{cs} = B_{n\,;0{,}999}\ \sigma_x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} B_{n\,;\,0{,}001} &= \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1\,;\,0{,}999}}{n}} \\ B_{n\,;\,0{,}999} &= \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1\,;\,0{,}001}}{n}} \end{aligned}$$

$\nu = n-1$ degrés de liberté.

— les limites de surveillance de σ'_x à l'extérieur desquelles nous avons 5 % des points représentant σ'_x

$$(5) \quad \begin{cases} L_{si} = B_{n\,;\,0{,}025}\sigma_x \\ L_{ss} = B_{n;\,0{,}975}\sigma_x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} B_{n\,;\,0{,}025} &= \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1\,;\,0{,}975}\ (\nu=n-1)}{n}} \\ B_{n\,;\,0{,}975} &= \sqrt{\frac{\chi_{n-1\,;\,0{,}025}\ (\nu=n-1)}{n}} \end{aligned}$$

2. — MÉTHODE DU RANGE (OU ÉTENDUE).

On a cherché, moyennant une non-utilisation d'une partie de l'information, à rendre les calculs du contrôle plus simples et plus rapides : on a donc utilisé le range W (ou étendue), différence entre les valeurs maximum et minimum de l'échantillon. On a étudié et calculé la loi de probabilité du range ou plus précisément la loi de probabilité de la variable aléatoire $\frac{W}{\sigma}$

On a l'habitude de désigner par d_n l'espérance mathématique de $\frac{W}{\sigma}$: $E\left[\frac{W}{\sigma}\right] = d_n$.

Les limites de contrôle et de surveillance se calculent comme précédemment en remplaçant :

— $\bar{\sigma}$ par $\overline{W}$;

— la loi de χ^2 par la loi de probabilité de l'étendue ;

— les coefficients A_n par les coefficients $A'_n = \frac{A_n}{d_n}$;

— les coefficients B_n par les coefficients D'_n calculés à partir de la loi de probabilité de $\frac{W}{\sigma}$ de la même façon que l'on a calculé les coefficients B_n à partir de la loi de χ^2. Les différentes limites sont les suivantes :

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{Moyennes} & \text{Etendue (ou range)} \\ \begin{cases} L_{ci} = \bar{\bar{x}} - A'_{0{,}001}\ \overline{W} \\ L_{cs} = \bar{\bar{x}} + A'_{0{,}001}\ \overline{W} \end{cases} & \begin{cases} L'_{ci} = D'_{n\ ;\ 0{,}001}\ \overline{W} \\ L'_{cs} = D'_{n\ ;\ 0{,}999}\ \overline{W} \end{cases} \\ \begin{cases} L_{si} = \bar{\bar{x}} - A'_{0{,}025}\ \overline{W} \\ L_{ss} = \bar{\bar{x}} + A'_{0{,}025}\ \overline{W} \end{cases} & \begin{cases} L'_{si} = D'_{n\ ;\ 0{,}025}\ \overline{W} \\ L'_{ss} = D'_{n\ ;\ 0{,}975}\ \overline{W} \end{cases} \end{array}$$

De même que pour l'utilisation de l'écart-type, on court le risque, pour un réglage qui ne varie pas, de trouver 2 ‰ des moyennes (ou des étendues) à l'extérieur des limites de contrôle des moyennes (ou des étendues), et le risque de trouver 5 % des moyennes (ou des étendues) à l'extérieur des limites de surveillance des moyennes (ou des étendues).

II. COURBES D'EFFICACITÉ. CHOIX DU NOMBRE DE PIÈCES A PRÉLEVER

3. 1. — GÉNÉRALITÉS.

La courbe d'efficacité de la méthode de contrôle utilisée est la courbe donnant, pour un prélèvement de n pièces, la probabilité d'accepter le réglage comme correct par un seul prélèvement, en fonction de la proportion p de pièces défectueuses fabriquées, en supposant que l'on considère un réglage comme incorrect si l'on trouve un des deux points représentatifs de l'échantillon à l'extérieur des limites de contrôle.

Or, une proportion p de pièces mauvaises peut être obtenue d'une infinité de façons différentes :

— la moyenne peut se dérégler seule : si elle était m_o initialement, elle peut s'être décalée de λ fois l'écart-type

$$m = m_o + \lambda\,\sigma_o$$

— l'écart-type peut se dérégler seul : s'il était σ_o, il devient

$$\sigma = K\,\sigma_o$$

— la moyenne et l'écart-type peuvent se dérégler simultanément : on pourra avoir la même proportion de pièces mauvaises pour toutes les valeurs conjuguées de m et σ, telles que $m + \lambda\sigma = C^{te}$.

Nous n'étudierons que les deux premiers cas, seuls intéressants en pratique. D'autre part, nous tracerons les courbes d'efficacité en supposant que l'intervalle de tolérance est égal à $6{,}18\,\sigma_o$, ce qui signifie qu'une fabrication bien réglée donne une proportion de pièces mauvaises

$$p_1 = 0{,}002$$

Cette condition n'est pas restrictive : on pourra déduire les courbes d'efficacité pour d'autres limites de tolérances.

3. 2. — VARIATION DE LA PROPORTION DE PIÈCES MAUVAISES FABRIQUÉES EN FONCTION DE L'INTERVALLE DE TOLÉRANCE.

3. 2. 1. — Déréglage de la moyenne.

Appelons $p_{\mu,\lambda}$ la proportion de pièces mauvaises correspondant à un déréglage $\lambda\,\sigma_o$ de la moyenne et à des limites de tolérances : $T_S - T_i \quad 2\,\mu\,\sigma_o$, on a :

$$p_{\mu,\lambda} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_o} \int_{m_o + \lambda\sigma_o - \mu\sigma_o}^{m_o + \lambda\sigma_o + \mu\sigma_o} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_o}{\sigma_o}\right)^2} dx$$

soit, la variable

$$z = \frac{x - m_o}{\sigma_o}$$

étant une variable de GAUSS réduite :

$$p_{\mu,\lambda} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mu+\lambda}^{\mu+\lambda} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz \qquad (7)$$

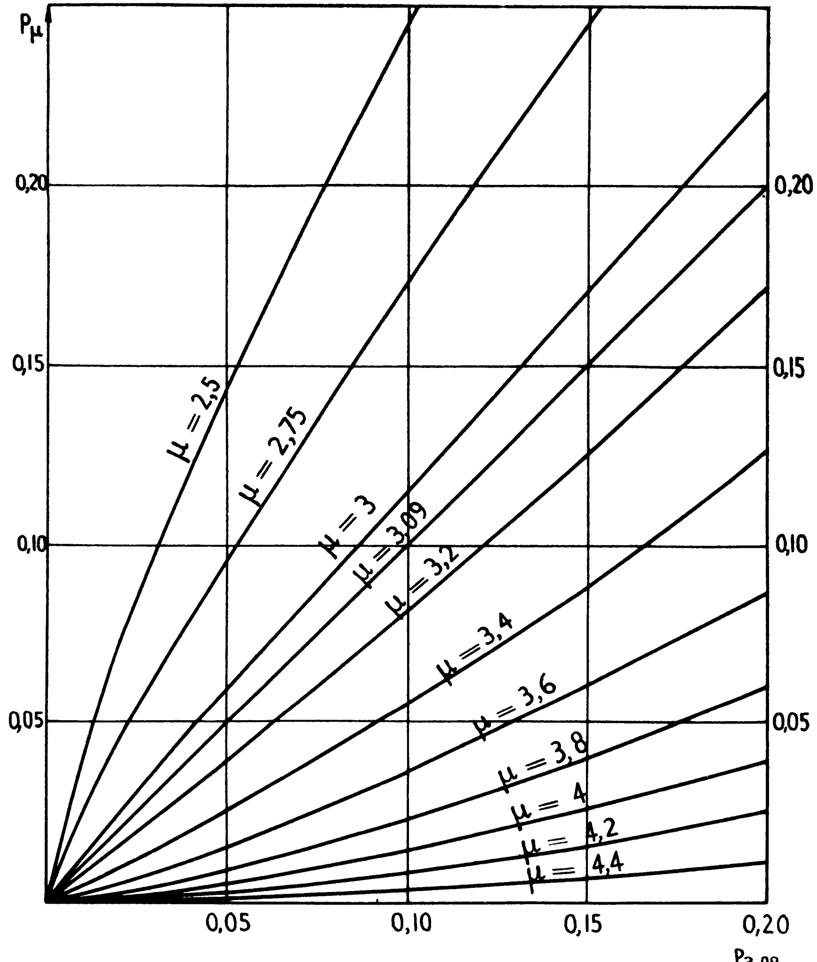

Fig. 2. — Relation entre $p_{3,09}$ et p_μ pour différentes valeurs de μ (demi-intervalle de tolérance exprimé en écarts-type).

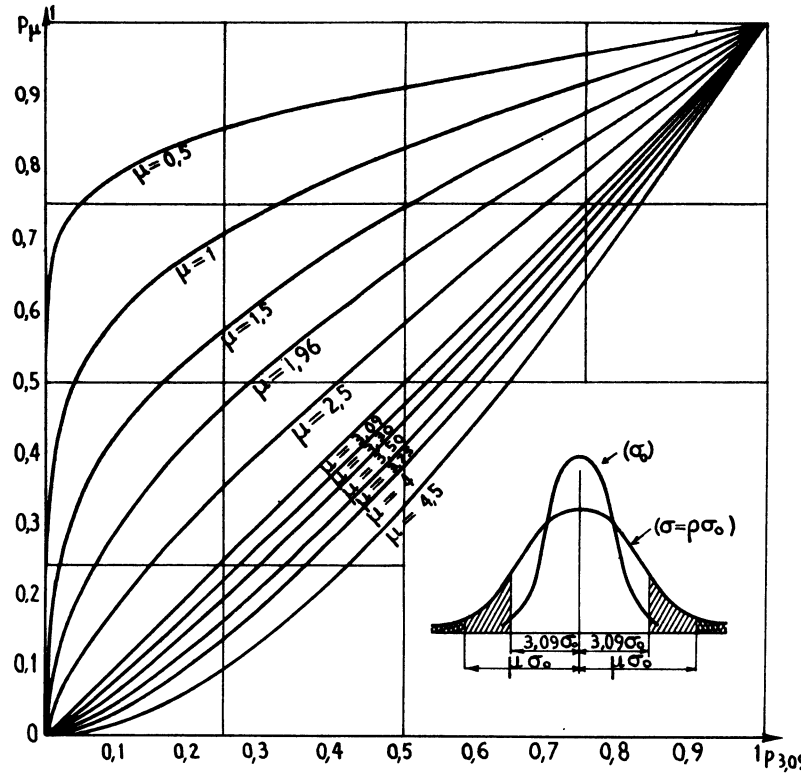

Fig. 3. — Proportion p'_μ extérieure à l'entervalle $m-\mu\sigma_0$, $m+\mu\sigma_0$ lorsque l'écart-type est $\sigma=\rho\sigma_0$ en fonction de la proportion p extérieure à l'intervalle $m \pm 3,09$.

Si l'intervalle de tolérance est

(8) $$T_s - T_i = 2 \times 309\ \sigma_0 = 6{,}18\, \sigma_0$$

la proportion des pièces mauvaises est évidemment, en remplaçant dans la formule (6) μ par 3,09 :

(9) $$p_{3,09,\lambda} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3,09+\lambda}^{3,09+\lambda} e^{\frac{1}{2}z^2} dz$$

Les équations (6) et (8) donnent la représentation, en fonction du paramètre λ, des courbes $C\mu$ donnant la proportion $p_{\mu,\lambda}$ des pièces à l'extérieur de l'intervalle $m_0 \pm \mu\sigma_0$ en fonction de la proportion $p_{3,09,\lambda}$ de pièces extérieures à l'intervalle $m_0 \pm 3{,}09\,\sigma_0$.

(10) $$p_\mu = f_\mu\ (p_{3,09})$$

La figure 2 donne la représentation de ces courbes pour diverses valeurs pratiques de μ.

3. 2. 2. — Déréglage de l'écart-type.

Appelons $p_{\mu,\rho}$ la proportion de pièces mauvaises correspondant à une valeur de l'écart-type égale à $\sigma = \rho\sigma_0$ et à des limites de contrôle $T_s - T_i = 2\mu\sigma_0$.
on a :

$$p_{\mu,\rho} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\rho\sigma_0} \int_{m_0-\mu\sigma_0}^{m_0+\mu\sigma_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_0}{\rho\sigma_0}\right)^2} dx$$

soit, la variable

$$z = \frac{x-m_0}{\rho\sigma_0}$$

étant une variable réduite :

(11) $$p_{\mu,\rho} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\mu}{\rho}}^{+\frac{\mu}{\rho}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \ .$$

Si l'intervalle de tolérance est

(8) $$T_s - T_i = 2.3{,}09\ \sigma_0 = 6{,}18\ \sigma_0$$

La proportion de pièces mauvaises est évidemment, en remplaçant dans la formule (11) μ par 3,09 :

(12) $$p_{3,09} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{3,09}{\rho}}^{\frac{3,09}{\rho}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

ce qui donne la représentation en fonction du paramètre ρ des courbes $C'\mu$.

(13) $$p'_\mu = g_\mu\ (p_{3,09})$$

La figure 3 donne la représentation de ces courbes pour diverses valeurs de μ.

Nous calculerons donc les courbes d'efficacité pour $\mu = 3{,}09$. Si, pour une certaine valeur p, la probabilité d'obtenir la moyenne d'un échantillon à l'intérieur des limites de contrôle est P_1 et la probabilité d'obtenir l'écart-type (ou l'étendue) à l'intérieur des limites de contrôle est P_2, la probabilité d'accepter le réglage, c'est-à-dire l'ordonnée de la courbe d'efficacité, sera évidemment, en vertu du principe des probabilités composées :

(14) $$P = P_1 \; P_2$$

On a en effet le droit d'utiliser le principe des probabilités composées, si les variables aléatoires auxquelles se rapportent les probabilités P_1 et P_2 sont indépendantes. On sait que la moyenne x et l'écart-type σ' d'un échantillon sont indépendants, la moyenne suivant une loi normale, l'écart-type une loi de χ sous réserve que la population origine soit elle-même normale ; ce que l'on sait moins c'est que, dans les mêmes conditions, la moyenne et l'étendue sont aussi indépendantes ainsi que l'a montré J. Daly (1).

4. — MÉTHODE DE L'ÉCART-TYPE.

4. 1. — Déréglage de la moyenne.

Nous calculerons la courbe d'efficacité en fonction du paramètre λ de déréglage de la moyenne

(15) $$m = m_0 + \lambda \sigma$$

pour lequel la formule (8) donne la proportion de pièces mauvaises, en supposant que l'intervalle de tolérance est égal à $6{,}18\sigma$.

D'après la définition des limites de contrôle de l'écart-type, nous voyons que, l'écart-type ne variant pas, on a deux chances sur mille d'obtenir une valeur de σ extérieure à ces limites. Pratiquement, seule la valeur supérieure sera utilisée, on a donc :

$$P_2 = 0{,}999$$

La loi de probabilité de la moyenne $\bar{x}$ de n termes étant une loi de GAUSS dont la moyenne est la moyenne m de la population et l'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ le calcul de la probabilité P_1 d'obtenir une moyenne entre les limites de contrôle est analogue au calcul de la proportion p de pièces mauvaises.

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \int_{m_0 + \lambda\sigma - \frac{3{,}09}{\sqrt{n}}\sigma}^{m_0 + \lambda\sigma + \frac{3{,}09}{\sqrt{n}}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x \;\; m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)} dz$$

soit, en posant $z = \frac{x - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(16) $$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3{,}09 + \lambda\sqrt{n}}^{3{,}09 + \lambda\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-A+\lambda)\sqrt{n}}^{(A+\lambda)\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

avec

(9) $$p = 1 \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3{,}09+\lambda}^{3{,}09+\lambda} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Dans les formules (9) et (16), on peut pratiquement remplacer les limites supérieures par l'infini avec une erreur relative inférieure à 1 % lorsque $P < 0{,}95$.

(Nous écrirons A au lieu de $A_{0.001}$ pour la simplification de l'écriture. Cf. formule 2.)

---

(1) J. DALY. — « On the use of the sample range in an analogue of Student's t Test », Annals of Mathematical Statistics, Vol. XVII, N° 1, Mars 1946.

Considérons l'influence de la précision du coefficient $A = \frac{3,09}{\sqrt{n}}$ sur les valeurs de p et P associées par les formules (6) et (16). Si l'on fait une erreur dA sur le coefficient A, la deuxième façon d'écrire la formule (16) montre que pour garder la même valeur de P on doit avoir, avec l'approximation indiquée

$$(-A+\lambda)\sqrt{n} = C^{te}$$

c'est-à-dire

$$d\lambda = dA \tag{17}$$

si l'on prend A avec la première décimale on a

$$d\lambda = dA = 0{,}05 \text{ au maximum}$$

c'est-à-dire que le décalage de la moyenne est égal à 0,05 σ valeur en général négligeable.

D'une autre façon, si l'on cherche pour une valeur p constante (donc de λ) la variation de P pour une approximation dA, on trouve en différentiant (16) :

$$d\,P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(-A+\lambda)^2 n}{2}} \sqrt{n}\, dA \tag{18}$$

quantité qui pour $\lambda = A$ c'est-à-dire $P_1 = 0{,}50$ atteint sa valeur maximum (1) :

$$(d\,P_1)_{max} = 0{,}3989\sqrt{n}\,dA$$

Pour A défini à la première décimale près dA = 0,05
d'où

$$(d\,P_1)_{max} \sim 0{,}02\sqrt{n} \tag{19}$$

Donc pour n faible, on pourra se contenter de la première décimale.

Une probabilité P fixée pour les diverses valeurs de n correspond à des proportions de pièces mauvaises définies par

$$(-A+\lambda)\sqrt{n} = \text{constante quand n varie}$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs de la variation dP de P, pour dA = 0,05 :

P	n = 1	n = 4	n = 9	n = 16
0,10 0,90	0,00875	0,01750	0,02625	0,03600
0,025 0,975	0,00292	0,00584	0,00876	0,01168
0,002 0,998	0,00017	0,00034	0,00051	0,00068

On en déduit, qu'en général, la première décimale sera suffisante, et exceptionnellement pour n grand ($n \geqslant 16$) on pourra pousser jusqu'à la deuxième pour laquelle les valeurs précédentes du tableau sont à diviser par 10 puisqu'alors dA = 0,005. Mais, en aucun cas, il n'est nécessaire d'utiliser la troisième.

D'après la formule (14) la probabilité d'accepter le réglage s'écrit :

(20) $P = 0{,}999\, P_1$.

(1) Le calcul exact, sans négliger la limite supérieure de l'intégrale, donne la condition rigoureuse $\lambda = A$ th $A\lambda n$; la solution $\lambda = 0$, est un minimum relatif, la solution $\lambda = A = \frac{3{,}09}{\sqrt{n}}$ peut être considérée comme la solution donnant le maximum, puisque th $3{,}09^2 \sim 1$ à 10^{-10} près ($e^{9,5} \sim 14.10^4$).

Ces courbes d'efficacité, pour diverses valeurs de n, sont données par la figure 4. Nous voyons, évidemment, d'après la définition des coefficients $A_{0{,}001}$, que toutes les courbes passent par le point correspondant à $\lambda = 0$.

$$p = 0{,}002$$

$$P = 0{,}999 \cdot 0{,}998 = 0{,}997.$$

c'est-à-dire que le risque de première espèce est, quel que soit le nombre n de pièces prélevées $\alpha = 0{,}003$ de refuser un réglage parfait donnant une proportion de pièces $p_1 = 0{,}002$ extérieures à l'intervalle $m_o \pm 3{,}09\,\sigma_o$.

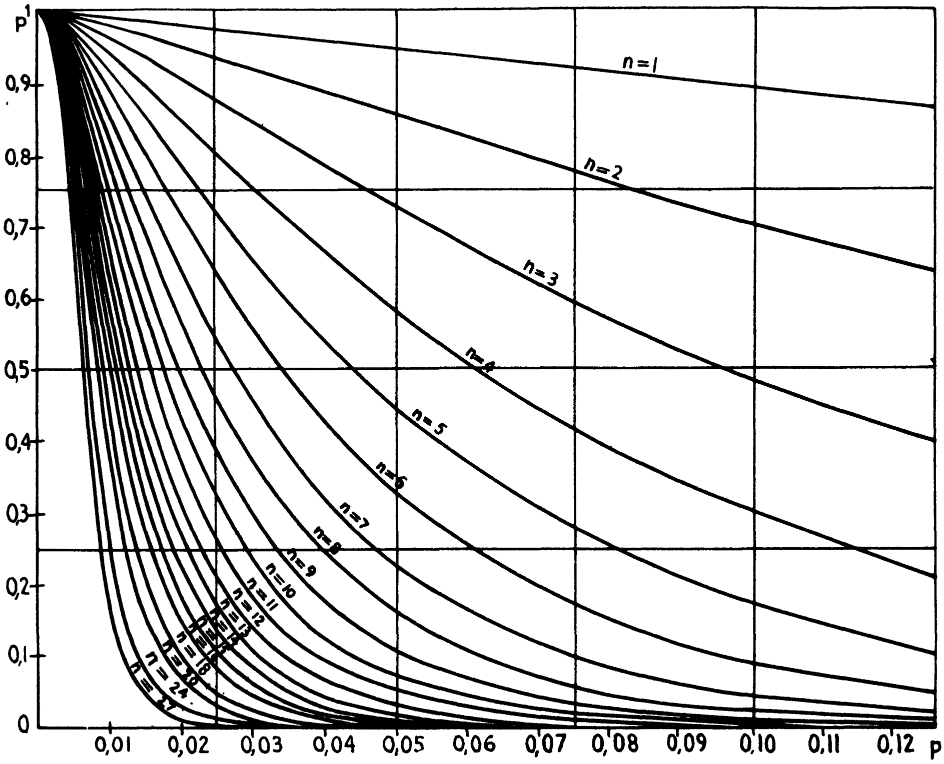

Fig. 4. — Cartes de contrôle. - Courbes caractéristiques d'efficacité.
Hypothèse : la moyenne seule se dérègle.

Lorsque les limites de tolérances sont

$$T_s = m_o + \mu\,\sigma_o$$

$$T_i = m_o - \mu\,\sigma_o$$

ce risque varie : pour obtenir la valeur de p_1 correspondant à $\alpha = 0{,}003$ en fonction du demi-intervalle de tolérance exprimé en écart-type :

$$\mu = \frac{T_s - T_i}{2\,\sigma_o} \tag{8}$$

il suffit de faire $\lambda = 0$ dans la formule (7) :

$$p_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mu}^{\mu} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz \tag{21}$$

Cette proportion varie énormément avec la valeur de μ . On a par exemple les valeurs suivantes :

μ	1,26	2,57	3,09	3,29	3,89	4,4
p_1%	5	1	0,2	0,1	0,01	0,001

Ces valeurs sont évidemment purement théoriques ; mais elles permettent de voir qu'un réglage parfait ($\lambda = 0$), que l'on a deux chances sur mille de refuser, peut correspondre à des qualités de fabrication n'ayant pas de commune mesure.

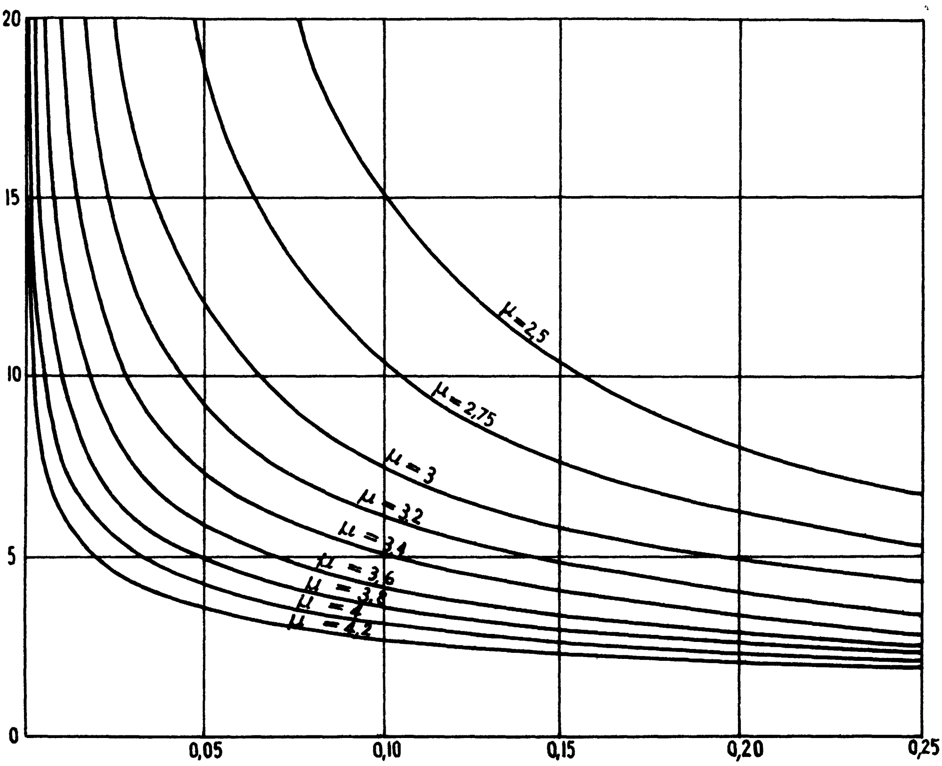

Fig. 5. — Cartes de contrôle. - Nombre n de pièces à prélever en fonction de la proportion p_2 de pièces mauvaises fabriquées, que l'on veut faire courir le risque $\beta = 0,05$ d'accepter pour diverses valeurs de $\mu = \frac{T_s - T_i}{2\sigma}$

Mais ce qui semble le plus intéressant en pratique, c'est le risque de deuxième espèce β d'accepter un déréglage donnant une proportion de pièces mauvaises p_2 que l'on ne voudrait pas accepter. Il suffit pour cela de tracer, d'après les calculs ci-dessus, les courbes $n = f(p_2)$ données par les équations paramétriques (16) et (8), où P prend la valeur fixe β.

La figure 5 donne les courbes $n = f_\mu\ (p_2)$ correspondant à $\beta = 0,05$ pour diverses valeurs pratiques de μ.

Ces courbes $n = f_\mu(p_2)$ n'ont de sens pratique que pour les valeurs entières de n, mais, au point de vue purement mathématique ce sont des courbes continues : il est donc licite de les tracer.

En fonction des risques que l'on veut bien courir, c'est-à-dire en faisant intervenir **à la fois la précision de la machine et les tolérances par le rapport μ**, on pourra, au moyen de ces courbes, déterminer le nombre n de pièces à prélever par échantillon.

En examinant les courbes $n = f_\mu(p_2)$ on voit que, lorsque l'on fait croître n à partir de 2, unité par unité, sur une courbe à μ constant (intervalle de tolérance donné), le risque p_2 diminue très rapidement au début, très lentement ensuite : on gagne peu, en accroissant n d'une unité lorsque $n \geqslant 5$ pour $\mu = 4,2$, lorsque $n \geqslant 10$ pour $\mu = 3$; par contre, lorsque $n = 4$ et $\mu = 3,2$, **on accepte une fois sur 20 un réglage donnant 20 % de pièces mauvaises** ! Il en résulte que si l'on suit les indications de certains articles indiquant de prélever deux ou trois pièces lorsque le contrôle est coûteux, on peut aboutir, dans certains cas, à un échec total des méthodes de contrôle statistique, **cet échec étant dû, non à l'impuissance de ces méthodes, mais à leur application incorrecte parce qu'on n'a pas donné aux utilisateurs le moyen de les appliquer correctement.**

4. 2. — Déréglage de l'écart-type.

On peut déceler un déréglage de l'écart-type, non seulement sur le diagramme de l'écart-type, **mais aussi sur celui de la moyenne.**

Nous calculerons la courbe d'efficacité en fonction du paramètre ρ de déréglage de l'écart-type

$$\sigma = \rho\, \sigma_0$$

pour lequel la formule (11) donne la proportion de pièces mauvaises.

D'après ce qui précède (paragraphe 1-2), la probabilité d'obtenir la moyenne entre les limites de contrôle est évidemment

$$(22) \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\rho\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \int_{m_0 - \frac{3{,}09\,\sigma_0}{\sqrt{n}}}^{m_0 + \frac{3{,}09\sigma_0}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_0}{\frac{\rho\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right)^2} dx$$

soit en posant

$$z = \frac{x - m_0}{\frac{\rho\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

$$(23) \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\frac{3{,}09}{\rho}}^{-\frac{3{,}09}{\rho}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Remarquons que $P_1 = 1\text{-}p$ lorsque $\mu = 3{,}09$. Quel que soit μ, cette probabilité d'accepter, sur le diagramme des moyennes, un déréglage de **l'écart-type est indépendante de l'effectif n de l'échantillon.**

Pour le diagramme de l'écart-type, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
P_2 &= \Pr\left\{ \sigma'_x < \sqrt{\frac{\chi^2\, n-1}{n}} \cdot \sigma_0 \;\middle|\; \sigma = \rho\,\sigma_0 \right\} \\
&= \Pr\left\{ n\,\sigma'^2_x < \chi^2_{n-1} \quad \sigma_0^2 \;\middle|\; \sigma = \rho\sigma_0 \right\} \\
&= \Pr\left\{ n\left(\frac{\sigma^2 x}{\sigma^2}\right)^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\, \chi^2_{n-1} \;\middle|\; \sigma = \rho\,\sigma_0 \right\} \\
&= \Pr\left\{ \frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{n-1}}{\rho^2} \right\} \quad \text{pour } \nu = n-1
\end{aligned}$$

Or, la variable aléatoire

$$\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}$$

suit une loi de χ^2 à n-1 degrés de liberté, par suite

$$(24) \qquad P_2 = \Pr\left\{ \chi^2 > \frac{\chi^2_{n-1}}{\rho^2} \right\}$$

On peut donc trouver les valeurs correspondantes de χ^2 dans les tables de χ^2.

En portant les formules 23 et 24 dans la formule 14, on obtient une représentation paramétrique avec la formule (12) des courbes d'efficacité.

$$P = P_1\ P_2 = g\ (p) \tag{14}$$

$$p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{3,09}{P}}^{\frac{3,09}{P}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \tag{12}$$

avec

$$P_1 = 1 - p \quad \text{si} \quad \mu = 3,09$$

La figure 6 représente les courbes d'efficacité correspondant à diverses valeurs de n. On voit que l'efficacité du contrôle est beaucoup plus faible lorsque l'écart-type varie que lorsque la moyenne varie.

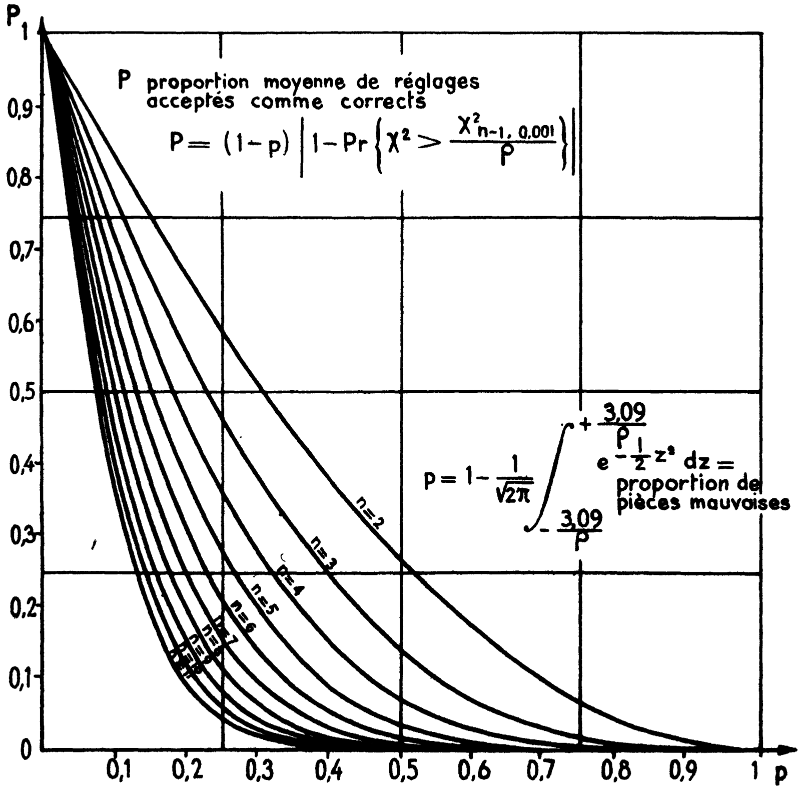

Fig. 6. — Quality control. - Courbes caractéristiques d'efficacité (contrôle de la moyenne et de l'écart-type). Hypothèse : l'écart-type seul se dérègle $\sigma_1^2 = p\sigma_0$

On en conclut qu'au point de vue pratique, quand on constate un déréglage, au lieu de contrôler à cent pour cent ce qui a été fabriqué depuis le dernier contrôle, comme on le fait pour la moyenne, il sera préférable de contrôler à cent pour cent ce qui a été fabriqué depuis l'avant-dernier réglage, si l'intervalle de tolérance est faible.

Il est intéressant de noter que les calculs montrent (1) que, lorsque l'on prélève seulement deux pièces, on décèle, en moyenne, un déréglage de l'écart-type plus souvent sur le diagramme de la

(1) La formule (23) montre que P_1 est égal à la proportion de termes d'une loi normale compris dans l'intervalle $\pm \frac{3,09}{P}$. Pour n = 2 la loi de χ à $\nu = 2 - 1 = 1$ degré de liberté peut se ramener à la loi normale et P_2 est égal à la proportion de termes compris dans l'intervalle $\pm \frac{3,29}{P}$ (3,29 pour environ 0,0 5 % de chaque côté de l'intervalle en loi normale, c'est-à-dire 0,1 % supérieur à la limite de contrôle supérieure de l'écart-type). On a donc $P_2 > P_1$.

moyenne que sur le diagramme de l'écart-type : lorsque la dispersion variera souvent, il sera donc utile de prélever plus de deux pièces, sinon la conclusion.

La figure 7 représente le nombre de pièces à prélever en fonction de la proportion de pièces mauvaises pour des risques β que l'on se fixe.

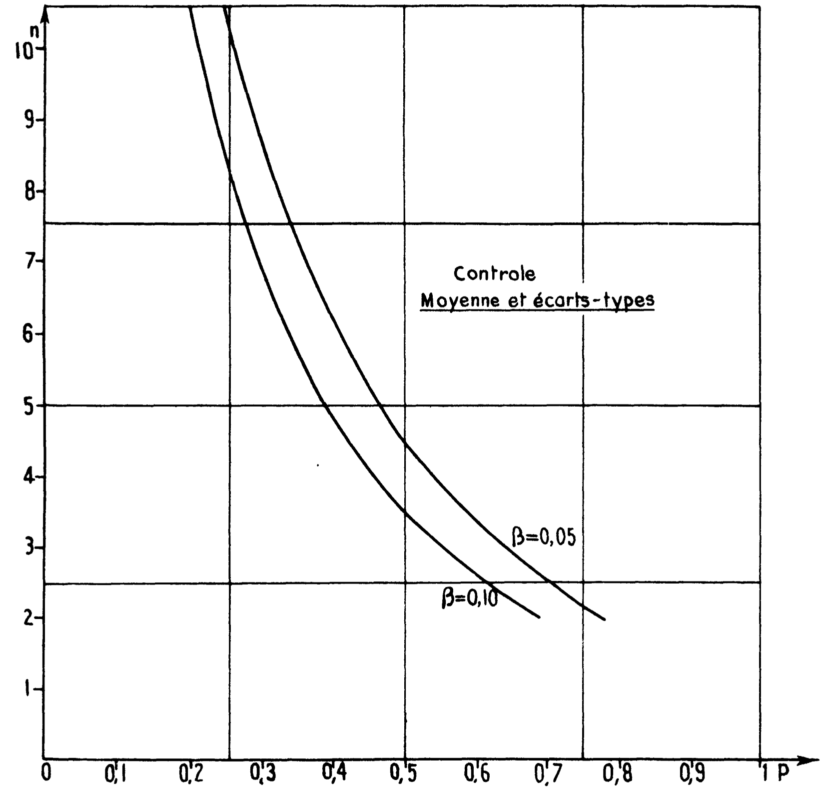

Fig. 7. — Quality control. - Nombre n de pièces à prélever en fonction de la proportion de pièces mauvaises fabriquées, pour les risques de 2e espèce $\beta = 0{,}05$; $\beta = 0{,}10$. Hypothèse : l'écart-type seul se dérègle, $\mu = 3{,}09$.

5. — MÉTHODE DE L'ÉTENDUE (OU RANGE).

5. 1. — La moyenne se dérègle :

Les courbes d'efficacité sont identiques à celles de la méthode précédente.

5. 2. — L'écart-type varie :

Le calcul est analogue à celui effectué pour l'écart-type : P à la même valeur.

Pour le diagramme de range, appelons $F_n\left(\frac{W}{\sigma}\right)$la loi de probabilité totale du range d'un échantillon de n pièces. On a :

$$P_2 = \Pr\left\{ W < D'_{0{,}999}\,\overline{W} \,\middle|\, \sigma = \rho\,\sigma_0 \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{W}{\sigma} < \frac{D'_{0{,}999}\,d_n\,\sigma_0}{\sigma} \,\middle|\, \sigma \quad \rho\,\sigma_0 \right\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{W}{\sigma} < \frac{D'_{0{,}999}\;d_n}{\rho} \right\}$$

$$P_2 = F_n\left(\frac{D'_{0{,}999}\,d_n}{\rho}\right) \tag{25}$$

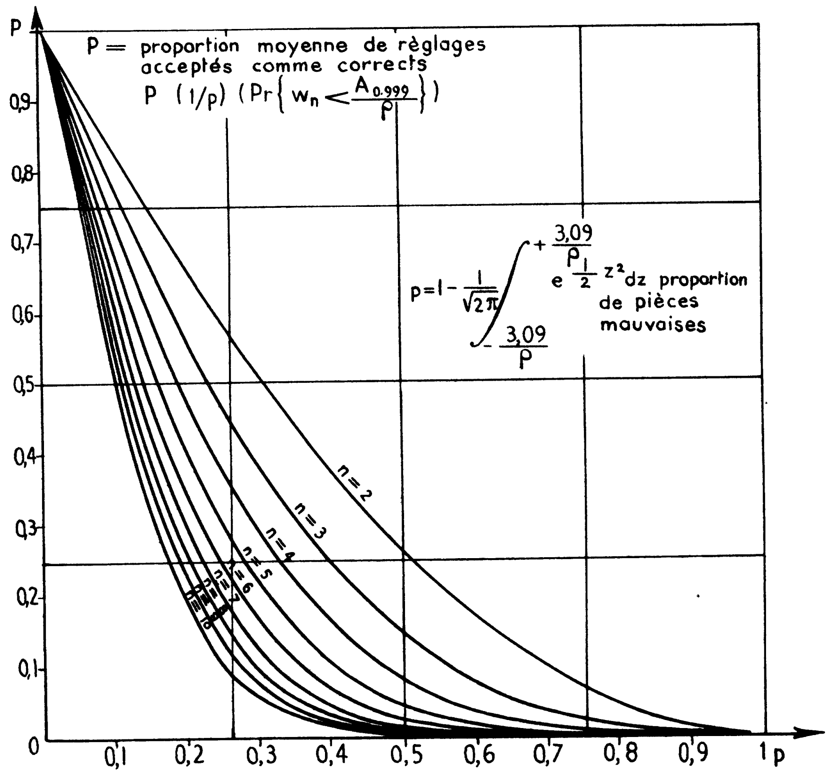

Fig. 8. — Quality control. - Courbes caractéristiques d'efficacité (contrôle de la moyenne et du range).
Hypothèse : l'écart-type seul se dérègle; $\mu = 3,09$.

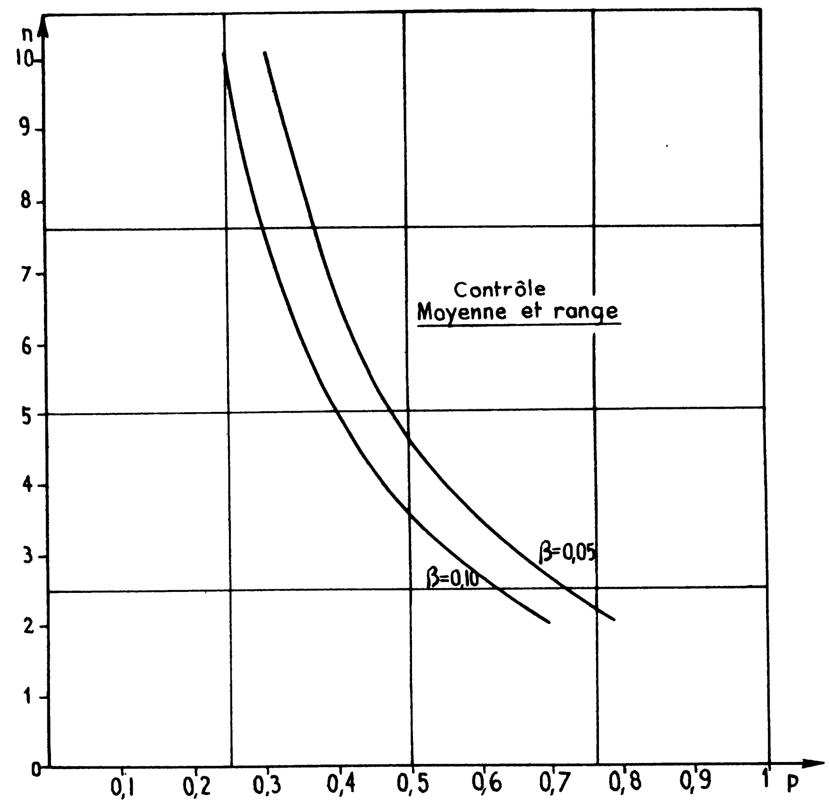

Fig. 9. — Quality control. - Nombre n de pièces à prélever en fonction de la proportion de pièces mauvaises fabriquées, pour des risques de 2e espèce $\beta = 0,05$ $\beta = 0,10$. Hypothèse : l'écart-type seul se dérègle, $\mu = 3,09$.

La figure 8 donne les courbes d'efficacité pour diverses valeurs de n. On voit que l'utilisation du range est moins efficace que celle de l'écart-type comme il fallait s'y attendre puisque l'on n'utilise pas la totalité de la quantité d'information. En gros, elle est équivalente à un prélèvement utilisant l'écart-type, mais comportant de deux à quatre pièces de moins.

La figure 9 représente les courbes donnant le nombre de pièces à prélever en fonction de la proportion de pièces mauvaises pour des risques de deuxième espèce β fixés.

III. DÉTERMINATION DE LA PROPORTION DE PIÈCES A PRÉLEVER (1)

Considérons un contrôle statistique de fabrication utilisant les cartes de contrôle. On a déterminé le nombre de pièces à prélever n en se fixant le risque d'accepter par un seul prélèvement de n pièces un réglage donnant une proportion p de pièces défectueuses.

Nous nous proposons de choisir la fréquence des prélèvements de telle façon que le coût du contrôle soit minimum. Cela revient à déterminer la proportion

$$(1) \quad q = \frac{n}{N}$$

de pièces prélevées, N étant le nombre de pièces fabriquées entre deux prélèvements, de façon que la proportion k de pièces contrôlées en moyenne soit minimum, en supposant que l'on contrôle à cent pour cent les pièces fabriquées entre le dernier prélèvement et celui qui signale un déréglage.

Dans ces conditions, le nombre de pièces à contrôler au bout du r ième prélèvement ayant décelé le déréglage est (fig. 10)

$$n_r = n\,r + N - n$$

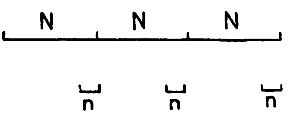

Fig. 10

le nombre total de pièces fabriquées étant

$$x = N r = \frac{n\,r}{q}$$

la proportion de pièces contrôlées est donc

$$k = \frac{n\,(r-1)\ n\ N}{N r} = q\ \frac{r-1}{r} + \frac{1}{r} = q + \frac{1}{r}\,(1-q)$$

que l'on peut écrire

$$k = q + \frac{n}{x}\left(\frac{1}{q} - 1\right)$$

On voit (fig. 11) que, pour une proportion q fixée, la proportion k de pièces à contrôler croît depuis un minimum égal à q si l'on ne décèle jamais de déréglage de la machine ($x = \infty$) à la totalité ($k = 1$) si on décèle un déréglage dès le premier prélèvement ($r = 1$), ce qui est une éventualité théorique jamais rencontrée en pratique.

Une formule donnant le minimum de la proportion k de pièces contrôlées en moyenne ne peut être trouvée que si l'on connaît la loi de probabilité élémentaire de la détection des déréglages, en fonction du nombre x de pièces fabriquées (fig. 3).

Soit

$$f(x)\,;\ (1 \leqslant x \leqslant \infty)$$

cette loi de probabilité élémentaire.

On a évidemment

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} f(x) = 1$$

(1) Cette méthode peut s'appliquer quel que soit le mode de contrôle par carte utilisé, sous réserve de la validité de l'hypothèse faite ci-après sur la loi de probabilité élémentaire de la détection des déréglages.

La variable aléatoire x étant liée fonctionnellement à la variable k, proportion de pièces contrôlées, par la relation (36), la variable k est elle-même une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

Valeur de la variable : k
Probabilité élémentaire f (x) avec $x = \frac{n(1-q)}{(k-q)\cdot q}$
Soit g (k) pour la variable k.

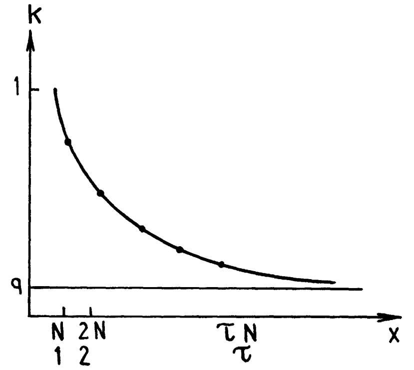

Fig. 11

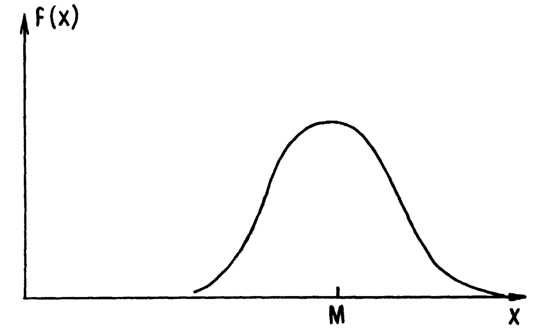

Fig. 12

On choisira pour la proportion q de pièces à prélever la valeur qui rendra minimum l'espérance mathématique de cette variable.

$$E\left[q + \frac{n}{x}\left(\frac{1}{q} - 1\right)\right] = q + n\left(\frac{1}{q} - 1\right) E\left[\frac{1}{x}\right]$$

puisque l'espérance mathématique d'une somme est égale à la somme des espérances mathématiques de chaque terme,

Cette quantité est minimum pour

$$q = \sqrt{n\,E\left[\frac{1}{x}\right]}$$

La valeur du minimum de la proportion de pièces prélevées a alors pour valeur :

$$k_m = 2q - n\,E\left[\frac{1}{x}\right] \sim 2\sqrt{n\,E\left[\frac{1}{x}\right]}$$

le deuxième terme sera souvent négligeable, puisqu'étant le carré de la moitié du premier terme évidemment plus petit que 1, et de préférence très faible (inférieur à 0,1 en général).

La proportion des pièces non contrôlées sera maxima et aura pour valeur en moyenne

$$1 - k_m = \left(1 - \sqrt{n\,E\left[\frac{1}{x}\right]}\right)^2 = (1-q)^2$$

Le raisonnement précédent est approché : si nous décelons en moyenne un déréglage donnant une proportion p de pièces mauvaises à la M_n pièce fabriquée, en réalité, il est facile de voir que la fabrication a été déréglée en moyenne à la pièce de rang

$$M_o = M_n \frac{N}{(1-P)}$$

La démonstration précédente suppose négligeable le terme correctif, ce qui est logique pour les déréglages importants qui sont les plus intéressants.

Nous ne connaissons pas la loi de probabilité de la variable x, nous savons seulement qu'au point de vue mathématique :

— x peut varier par nombres entiers de 1 à l'infini ;

— d'après la formule (4), on doit avoir

$$E\left[\frac{1}{x}\right] < \frac{1}{x}$$

au point de vue pratique :

— l'espérance mathématique de x, c'est-à-dire sa moyenne

$$M = E\,[x]$$

doit être assez grande pour avoir à effectuer peu de réglages, sinon il faudra effectuer l'opération demandée sur une autre machine ; on peut écrire :

(6) $M \gg N = \frac{n}{q}$ (par exemple M = 20 N, 30 N, etc...).

La formule (6) peut s'écrire, en donnant à q la valeur de la formule (1)

$$E\,[x] . \sqrt{E\left[\frac{1}{x}\right]} \gg \sqrt{n}$$

On pourra, dans ce cas, si M est suffisamment grand, assimiler la variable discontinue x à une variable continue.

D'autre part, il est logique d'admettre que la probabilité d'obtenir des réglages pour des valeurs de x pas trop grandes est très faible et pratiquement nulle (fig. 3) et plus précisément que la plus grande proportion des déréglages se trouve dans un intervalle pas trop étendu autour de l'espérance mathématique M = E [x], elle-même assez élevée d'après ce qui précède. On peut donc écrire :

$$\sigma \ll M$$

ce qui signifie que l'écart-type σ de la loi de probabilité des déréglages est beaucoup plus petit que l'espérance mathématique. Dans ces conditions, nous pouvons calculer une estimation de l'espérance mathématique de $\frac{1}{x}$.

Nous avons trouvé une telle estimation en considérant la fonction génératrice de moments

$$y\,(t) = \frac{1}{n}\left\{\Sigma\, x^t\right\}^{\frac{1}{t}}$$

mais, suivant une suggestion de M. Vessereau, on peut l'obtenir plus simplement, en développant, par la formule de Mac Laurin, la fonction $\frac{1}{x} - \frac{1}{M}$ autour de x = M. On a :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{M} = 0 + (x - M)\left[\frac{d}{x}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{x=M} + \frac{(x-M)^2}{2}\left[\frac{d}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{x=M} + $$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{M} = -\frac{(x-M)}{M^2} + \frac{(x-M)^2}{M^3} - \ldots\ldots$$

En prenant les espérances mathématiques des deux membres, on a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{M} = 0 + \frac{1}{M^3}\,E\,(x-M)^2 = \frac{\sigma^2}{M^2}$$

c'est-à-dire

$$E\,(x).\;E\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{\sigma^2}{M^2}$$

(en négligeant les termes en $\frac{1}{M^3}$).

En résumé, la proportion des prélèvements à effectuer pour contrôler le minimum de pièces est approximativement dans la plupart des cas :

$$q = \sqrt{n\,E\left(\frac{1}{x}\right)} \sim \sqrt{\frac{n}{M}\left(1 + \frac{\sigma^2}{M^2}\right)}$$

soit, si $\sigma \ll M$ $\qquad q \sim \sqrt{\frac{1}{M}}$

Il est entendu que la valeur ainsi trouvée pour q doit être considérée comme un ordre de grandeur ; en effet :

1° le calcul du minimum n'est pas absolument rigoureux et a nécessité un certain nombre d'approximations ;

2° une variation même négligeable de la proportion q autour de la valeur de q, donnant rigoureusement le minimum donnera un coût du contrôle très voisin de ce minimum ;

3° la formule suppose connue la moyenne M des déréglages et on ne connaît, en réalité, qu'une estimation qui, souvent, n'est pas très précise.