RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **35** (2001) 439-451

SUR L'ÉQUILIBRE FORT SELON BERGE

Moussa Larbani[1] et Rabia Nessah[1]

Communiqué par Jean Abadie

Abstract. In this paper we study the main properties of the strong Berge equilibrium, then we prove a theorem of its existence based on the Ky Fan inequality and finally, we provide an algorithm for its determination.

Résumé. Dans cet article nous étudions les propriétés essentielles de l'équilibre fort selon Berge (EFSB) pour les jeux à n personnes, ensuite nous prouvons son existence en utilisant l'inégalité de Ky Fan et donnons un procédé adéquat pour sa recherche pratique.

Mots clés : Jeux, équilibre, inégalité de Ky Fan.

1. Introduction

L'une des particularités les plus importantes de la théorie des jeux est la pluralité des concepts de solutions. Ceci est dû au fait qu'il n'existe pas de concept universel qui tient compte de tous les aspects intuitifs de l'optimalité tels que la justice, la stabilité et la satisfaction. Notons que la difficulté de la démonstration de l'existence d'une solution augmente avec le nombre des aspects intuitifs de l'optimalité qu'elle prend en considération. Dans les jeux non coopératifs la propriété la plus importante est la stabilité. En 1951 Nash [7] a introduit l'équilibre de Nash qui garantit la stabilité par rapport à la déviation d'un des joueur seulement *i.e.* aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie si les autres maintiennent la leur dans un même équilibre de Nash. L'équilibre de Nash possède certains défauts, parmis lesquels on peut citer le fait qu'en général il n'est pas unique, ce

Reçu en mars 2001.

[1] Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mouloude–Mammeri de Tizi Ouzou, 15000 Tizi–Ouzou, Algérie ; e-mail : m_larbani@yahoo.fr, rnessah@yahoo.fr

qui, pour un joueur donné, pose un problème de sélection de l'équilibre où il va choisir sa stratégie puisqu'il n'est pas sûr que les autres joueurs choisiront leur stratégie dans un même équilibre. Ce problème a donné naissance, dans les années 60, à la théorie du "raffinement" de l'équilibre de Nash [10] dont l'idée principale est d'introduire des perturbations au niveau du choix des stratégies ou au niveau des fonctions gains des joueurs, afin de privilégier certains équilibres de Nash plus robustes que d'autres. Dans ce sens, plusieurs concepts d'équilibre ont été introduit, à titre d'exemples on peut citer l'équilibre parfait [9], l'équilibre propre [6], l'équilibre essentiel [11] et l'équilibre régulier [4]. Mais déja en 1957, Berge [2] a introduit le concept d'équilibre fort qui assure une stabilité beaucoup plus forte que celle de l'équilibre de Nash. En effet, si un joueur choisit sa stratégie dans un équilibre fort, alors il oblige tous les autres à faire de même *i.e.* il est stable par rapport à la déviation de tous les joueurs sauf l'un d'entre eux. Comme un équilibre fort est aussi un équilibre de Nash (ce fait va être montré par la suite), on peut le considérer commme étant un "raffinement" de ce dernier.

L'équilibre fort n'a pas reçu d'attention par les chercheurs dans le domaine de la théorie des jeux, nous n'avons rencontré aucun travail le concernant dans la littérature (non exhaustive) que nous avons pu consulter. Cet article vient remplir ce vide. En effet, nous donnons quelques résultats sur ses propriétés, des conditions suffisantes de son existence et un algorithme pour sa recherche pratique.

Le travail est organisé de la manière suivante : dans le paragraphe 2 nous montrons que l'équilibre fort selon Berge possède des propriétés analogues à celles du point selle d'un jeu à deux personnes et à somme nulle ; dans le paragraphe 3 nous étudions le problème d'existence de cet équilibre et donnons un algorithme pour sa recherche pratique ; nous terminons ce travail par une conclusion.

2. Propriétés de l'équilibre fort selon Berge

Dans ce paragraphe nous donnons quelques propriétés importantes de l'équilibre fort selon Berge et établissons le fait qu'il soit la généralisation de la notion du point selle d'un jeu à deux personnes et à somme nulle.

Considérons le jeu non coopératif à n-personnes suivant :

$$\langle I, X, f(x)\rangle \tag{1}$$

où $I=\{1,2,...n\}$ est l'ensemble des joueurs, $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ est l'ensemble des issues du jeu, X_i est l'ensemble des stratégies du i-ème joueur, $X_i \subset \mathsf{R}^{n_i}$, $n_i \geq 1$, $i=\overline{1,n}$; $f=(f_1,f_2,...,f_n)$, $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction gain du i-ème joueur, $i=\overline{1,n}$; $x=(x_1,...,x_n)$ est une issue du jeu où $x_i \in X_i$ est la stratégie du i-ème joueur.

Dans ce jeu, le but de chaque joueur, par le choix de sa stratégie, est de maximiser sa fonction gain.

Notations. On note $I-i = I-\{i\} = \{1,...,i-1,i+1,...,n\}$, $X_{I-i} = \prod_{j\in I-i} X_j$, $\widehat{X} = \prod_{i\in I}\prod_{j\in I-i} X^j_{I-i}$ où $X^j_{I-i} = X_{I-i}, \forall i \in I, \forall j \in I-i$,
$x_{I-i} = (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$, $\forall K \subset I$, $K \neq \emptyset$, $X_K = \prod_{i\in K} X_i$, un élément de X_K sera noté x_K ; si $\{K_i\}_{i=\overline{1,s}}$, $s \leq n$ est une partition de l'ensemble des joueurs I alors toute issue $x = (x_1,...,x_n) \in X$ peut s'écrire aussi sous la forme $x = (x_{K_1}, x_{K_2},..,x_{Ks})$.

Définition 2.1. [2] On dit que $\overline{x} \in X$ est un équilibre fort selon Berge (EFSB) pour le jeu (1) si

$$\forall i \in I, \forall j \in I-i, \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, \quad f_j(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x}). \tag{2}$$

Nous avons pris l'initiative d'appeler ce concept l'équilibre fort selon Berge pour éviter toute confusion avec le concept d'équilibre fort introduit par Aumann en 1959 [1].

Propriétés.

1. L'EFSB est très stable. En effet, si un des joueur $i \in I$, choisit sa stratégie $\overline{x}_i$ d'un EFSB, il oblige tous les autres joueurs à choisir leurs stratégies dans le même EFSB : si des joueurs de l'ensemble $I-i$ choisissent des stratégies autres que celles de cet EFSB, aucun d'eux n'améliore son gain. On voit que cet équilibre empêche même la formation de coalitions parmi les joueurs.
2. Un EFSB est aussi un équilibre de Nash. En effet, soit $\overline{x} \in X$ un EFSB du jeu (1) et $i \in I$, supposons que le joueur i choisisse une stratégie x_i autre que $\overline{x}_i$ alors pour $j \in I-i$, on aura $f_i(x_i, \overline{x}_{I-i}) = f_i(\overline{x}_j, \overline{x}_{I-\{i,j\}}, x_i) \leq f_i(\overline{x})$ car $i \in I-j$. Ceci étant vrai $\forall i \in I$, on déduit que $\overline{x}$ est un équilibre de Nash. Dans ce sens l'EFSB peut être considéré comme un raffinement de l'équilibre de Nash. Même dans le cas où il y a plusieurs EFSB, si un joueur déclare qu'il va choisir sa stratégie dans un certain EFSB les autres joueurs n'ont pas d'autres choix que de le suivre alors que dans le cas où le jeu n'admet pas d'EFSB et admet plusieurs équilibres de Nash, une concertation des joueurs est nécessaire au préalable pour fixer l'équilibre de Nash où ils vont choisir leur stratégie.
3. Comme l'équilibre de Nash vérifie le principe de la rationalité individuelle [5], il en est de même de l'EFSB *i.e.* il donne à chaque joueur le gain minimal qu'il peut se garantir contre tout comportement du reste des joueurs. En d'autres termes l'EFSB est un équilibre individuellement rationnel.
4. Comme l'équilibre de Nash, n'est pas en général Pareto optimal, de la propriété 2 on déduit la même chose pour l'EFSB *i.e.* en général il ne vérifie pas le principe de la rationalité collective [5].
5. L'EFSB jouit d'une stabilité plus forte que celle de l'équilibre fort selon Aumann [1] .

6. Dans le cas des jeux à deux personnes ($n = 2$ dans (1)) l'EFSB coïncide avec l'équilibre de Nash. De là on déduit que le concept d'EFSB n'est intéressant que pour les jeux à plus de deux joueurs.

   Dans la suite nous ne considérerons que les jeux à n-personnes avec $n > 2$.

Lemme 2.1. *Supposons que le jeu (1) soit à somme nulle i.e.*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Si $\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}}$ sont deux EFSB pour le jeu (1), alors $\forall i \in I$, $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}})$.

Preuve. Soient $\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}}$ deux EFSB pour le jeu (1). Donc pour $i \in I$, on a

$$\begin{cases} f_j(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x}), \ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, \forall j \in I - i, \\ f_j(\overline{\overline{x}}_i, \widetilde{y}_{I-i}) \leq f_j(\overline{\overline{x}}), \ \forall \widetilde{y}_{I-i} \in X_{I-i}, \forall j \in I - i. \end{cases} \tag{3}$$

Comme le jeu est à somme nulle, du système (3) on déduit que

$$\begin{cases} -\ f_i(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq -f_i(\overline{x}), \ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, \forall j \in I - i, \\ -\ f_i(\overline{\overline{x}}_i, \widetilde{y}_{I-i}) \leq -f_i(\overline{\overline{x}}), \ \forall \widetilde{y}_{I-i} \in X_{I-i}, \forall j \in I - i \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} f_i(\overline{x}) \leq \ f_i(\overline{x}_i, y_{I-i}), \ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, \\ f_i(\overline{\overline{x}}) \leq \ f_i(\overline{\overline{x}}_i, \widetilde{y}_{I-i}), \ \forall \widetilde{y}_{I-i} \in X_{I-i}. \end{cases} \tag{4}$$

Posant $y_{I-i} = \overline{\overline{x}}_{I-i}$, et $\widetilde{y}_{I-i} = \overline{x}_{I-i}$ dans (4), on obtient alors pour $s \in I - i$

$$\begin{cases} f_i(\overline{x}) \leq \ f_i(\overline{x}_i, \overline{\overline{x}}_{I-i}) = \ f_i(\overline{\overline{x}}_s, \overline{x}_i, \overline{\overline{x}}_{I-\{i,s\}}) \leq f_i(\overline{\overline{x}}), \\ f_i(\overline{\overline{x}}) \leq \ f_i(\overline{\overline{x}}_i, \overline{x}_{I-i}) = \ f_i(\overline{x}_s, \overline{\overline{x}}_i, \overline{x}_{I-\{i,s\}}) \leq f_i(\overline{x}). \end{cases} \tag{5}$$

Le système (5) entraîne que $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}})$ et comme i est quelconque dans I, on déduit que $\forall i \in I$, $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}})$.

Lemme 2.2. *Supposons que*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0, \ \forall x \in X.$$

Soient x^l, $l = \overline{1, s}$, $1 \leq s \leq n$, s différents EFSB du jeu (1) et K_l, $l = \overline{1, s}$, une portion de l'ensemble des joueurs telle que si $i \in K_l$, le joueur i choisit sa stratégie dans l'EFSB x^l, alors l'issue $\widetilde{x} = (x_{K_1}, x_{K_2}, .., x_{K_s})$ constituée de ces stratégies est aussi un EFSB du jeu (1).

Preuve. Montrons ce lemme dans le cas où $s = 2$ *i.e.* les joueurs choisissent leur stratégies dans deux EFSB, le cas $s > 2$ se démontre d'une manière analogue. Soient $\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}}$ deux EFSB et K l'ensemble des joueurs choisissant leur stratégie dans $\overline{x}$ et $I - K$ le reste des joueurs choisissant leur stratégie dans l'EFSB $\overline{\overline{x}}$. Montrons que $\widetilde{x} = (\overline{x}_K, \overline{\overline{x}}_{I-K})$ est un EFSB pour le jeu (1).

Supposons que $\forall i \in I$, $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$. Soit $i \in I$ donc $i \in K$ ou bien $i \in I - K$.

Si $i \in K$, alors $\widetilde{x}_i = \overline{x}_i$, d'où pour $j \in I - i$, on aura

$$f_j(\widetilde{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x}) = f_j(\widetilde{x}),\ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}.$$

Si $i \in I - K$, alors $\widetilde{x}_i = \overline{\overline{x}}_i$ d'où pour $j \in I - i$, on aura

$$f_j(\widetilde{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{\overline{x}}) = f_j(\widetilde{x}),\ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}.$$

On a donc montré que si $\forall i \in I$, $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$, alors $\widetilde{x}$ est un EFSB pour le jeu (1).

Montrons maintenant que $\forall i \in I$, $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$.

Les issues $\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}}$ sont deux EFSB pour le jeu (1), donc pour $i \in I$, on a

$$\begin{cases} f_j(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x}),\ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, \forall j \in I - i, \\ f_j(\overline{\overline{x}}_i, \widetilde{y}_{I-i}) \leq f_j(\overline{\overline{x}}),\ \forall \widetilde{y}_{I-i} \in X_{I-i}, \forall j \in I - i. \end{cases} \tag{6}$$

Comme le jeu est à somme nulle, du système (6) on déduit que

$$f_i(\overline{x}) \leq f_i(\overline{x}_i, y_{I-i}),\ \forall y_{I-i} \in X_{I-i}, \tag{7}$$

$$f_i(\overline{\overline{x}}) \leq f_i(\overline{\overline{x}}_i, \widetilde{y}_{I-i}),\ \forall \widetilde{y}_{I-i} \in X_{I-i}. \tag{8}$$

Si $i \in K$, on pose $y_{I-K} = \overline{\overline{x}}_{I-K}$, et $y_K = \overline{x}_K$, le fait que $\overline{\overline{x}}$ soit un EFSB et (7) entraînent que $f_i(\overline{x}) \leq f_i(\overline{x}_K, \overline{\overline{x}}_{I-K}) = f_i(\widetilde{x}) \leq f_i(\overline{\overline{x}})$ et du lemme 2.1 on déduit que $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$.

Si $i \in I - K$, on pose $\widetilde{y}_{I-K} = \overline{\overline{x}}_{I-K}$, et $\widetilde{y}_K = \overline{x}_K$, le fait que $\overline{x}$ soit un EFSB et (8) entraînent que $f_i(\overline{\overline{x}}) \leq f_i(\overline{x}_K, \overline{\overline{x}}_{I-K}) = f_i(\widetilde{x}) \leq f_i(\overline{x})$ et du lemme 2.1 on déduit que $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$.

Par conséquent, dans les deux cas possibles on a toujours $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$ et comme i est quelconque dans I, on déduit que $\forall i \in I$, $f_i(\overline{x}) = f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(\widetilde{x})$.

Remarque 2.1. 1. Le lemme 2.1 montre que dans les jeux à somme nulle l'EFSB possède la propriété d'équivalence *i.e.* les fonctions gains des joueurs ont la même valeur pour tous les EFSB. Dans ce cas, contrairement à l'équilibre de Nash, pour les joueurs, le problème de sélection de l'EFSB où il vont choisir leur stratégie, ne se pose pas.

2. Le lemme 2.2 montre que dans les jeux à somme nulle l'EFSB possède la propriété d'interchangeabilité *i.e.* si les joueurs choisissent leur stratégie dans

différents EFSB l'issue obtenue est aussi un EFSB. Notons que cette propriété n'est pas vraie dans le cas de l'équilibre de Nash.

3. Sachant que les propriétés d'équivalence et d'interchangeabilité caractérisent la notion du point selle [8] d'un jeu à deux personnes et à somme nulle, des lemmes 2.1 et 2.2 on peut conclure que l'EFSB est une généralisation de la notion du point selle d'un jeu à deux personnes et à somme nulle. Ainsi, dans le cas des jeux à somme nulle, on peut le qualifier de solution du jeu.

3. Existence et recherche pratique de l'EFSB

Vu la très forte stabilité de l'EFSB, on peut s'attendre à ce que la classe des jeux pour lesquels il existe ne soit pas assez large et que les conditions de son existence soient réstrictives. Ceci constitue un défaut majeur de cet équilibre. Dans ce paragraphe, nous allons établir l'existence de l'EFSB du jeu (1) en utilisant l'inégalité de Ky Fan [3]. De cette approche nous déduirons aussi un algorithme adéquat pour sa recherche pratique.

Cette approche consiste à transformer le problème de recherche de l'EFSB du jeu (1) en un problème de recherche des issues $\overline{x} \in X$ qui sont solutions d'une certaine équation.

En se basant sur (2), on introduit la fonction à valeurs réelles

$$\Psi : X \times \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9}$$

définie par $(x, \widehat{y}) \longrightarrow \quad \Psi\ (x, \widehat{y}) = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in I-i} f_j(x_i, y^j_{I-i}) - f_j(x)$,

où $\quad \widehat{X} = \prod\limits_{i \in I} \prod\limits_{j \in I-i} X^j_{I-i}, \ \ \widehat{y} \in \widehat{X}$ (voir notations).

Remarque 3.1. On a

$$\forall x \in X, \ \ \sup_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (x, \widehat{y}) \geq 0 \tag{10}$$

car pour tout $x \in X$, si on prend $\widehat{y} = (\widehat{y}_1, ..., \widehat{y}_n)$ avec
$\widehat{y}_i = (x_{I-i}, ..., x_{I-i}, x_{I-i}, ..., x_{I-i})$ $\forall i \in I$ (voir notations), on trouve
$\Psi\ (x, \widehat{y}) = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in I-i} f_j(x) - f_j(x) = 0.$

Le lemme suivant donne la relation qui existe entre les EFSB du jeu (1) et la fonction (9).

Lemme 3.1. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1) $\overline{x} \in X$ *est un EFSB pour le jeu (1).*

2) $\sup\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) = 0.$

Preuve. 1) Supposons que $\overline{x} \in X$ soit un EFSB pour le jeu (1) *i.e.* $\forall i \in I$, $\forall j \in I - i, \forall y_{I-i} \in X_{I-i},\ \ f_j(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x})$, d'où

$$\sup_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\bar{x}, \widehat{y}) \leq 0. \tag{11}$$

Les inégalités (10) et (11) entraînent que $\sup\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) = 0$.

2) Supposons que $\sup\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) = 0$, alors on a

$$\forall \widehat{y} \in \widehat{X},\ \sum_{i \in I} \sum_{j \in I-i} f_j(\bar{x}_i, y^j_{I-i}) - f_j(\bar{x}) \leq 0. \tag{12}$$

Soient i_0 et j_0 deux éléments de I tels que $j_0 \in I - i_0$.

Pour $i \in I - i_0,\ j \in I - i$, posons $y^j_{I-i} = \overline{x}_{I-i}$ et pour $i = i_0,\ j \in I - \{j_0, i_0\}$, $y^j_{I-i} = \overline{x}_{I-i}$, alors (12) devient

$$\forall y^{j_0}_{I-i_0} \in X_{I-i_0},\ \ f_{j_0}(\overline{x}_{i_0}, y^{j_0}_{I-i_0}) \leq f_{j_0}(\overline{x}).$$

Comme i_0 et j_0 sont quelconques dans I, on déduit que $\overline{x} \in X$ est un EFSB pour le jeu (1).

Le problème maintenant est de chercher des conditions suffisantes pour que l'équation (2) du lemme 3.1 admette une solution. Dans le théorème suivant nous allons établir de telles conditions.

Théorème 3.1. *Supposons les conditions suivantes satisfaites.*

1) *Les ensembles* X_i, $i = \overline{1, n}$ *sont non vides, convexes et compacts.*
2) *Les fonctions* f_i, $i = \overline{1, n}$ *sont continues sur* X *et les fonctions* $y_{I-i} \longmapsto f_j(x_i,\ y_{I-i})$, $i \in I$, $j \in I - i$, *sont concaves sur* $X_{I-i}, \forall x_i \in X_i$.
3) $\forall x \in X, \exists y \in X$ tel que $\forall i \in I, \forall j \in I - i, \forall t_{I-i} \in X_{I-i}$,

$$f_j(x_i, t_{I-i}) \leq\ f_j(x_i, y_{I-i}).$$

Alors le jeu (1) possède au moins un EFSB.

Preuve. Introduisons la fonction à valeurs réelles suivantes.

$$\Omega : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \tag{13}$$

définie par $(x, y) \longrightarrow \quad \Omega\ (x, y) = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in I-i} f_j(x_i, y_{I-i}) - f_j(x)$.

D'après la condition 3) du théorème 3.1, nous avons
$\forall x \in X$, $\exists y \in X$ tel que $\forall i \in I, \forall j \in I - i$,
$$\forall t_{I-i} \in X_{I-i},\ \ f_j(x_i, t_{I-i}) \leq \ f_j(x_i, y_{I-i}).$$
En tenant compte de (9) et (13), on déduit que

$$\forall x \in X, \exists y \in X, \ \ \text{tel que} \ \ \Psi\ (x, \widehat{t}) \leq \ \Omega(x, y), \ \ \forall \widehat{t} \in \widehat{X}. \tag{14}$$

Des conditions 1) et 2) du théorème 3.1, on déduit que la fonction $x \longmapsto \Omega(x, y)$ est continue sur X, $\forall y \in X$ et la fonction $y \longmapsto \Omega(x, y)$ est concave sur X, $\forall x \in X$. Comme Ω est définie de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$, X est convexe et compact, on conclue que cette fonction satisfait toutes les conditions de l'inégalité de Ky Fan [3] et par conséquent :

$$\exists \overline{x} \in X, \ \sup_{y \in X} \Omega\ (\overline{x}, y) \leq \sup_{x \in X} \Omega\ (x, x).$$

Or par construction de Ω, on a $\forall x \in X$, $\Omega\ (x, x) = 0$, donc

$$\sup_{y \in X} \Omega\ (\overline{x}, y) \leq 0. \tag{15}$$

Les inégalités (14) et (15) entraînent que

$$\sup_{\widehat{t} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{t}) \leq 0. \tag{16}$$

Les inégalités (10) et (16) entraînent que $\sup_{\widehat{t} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{t}) = 0$ et d'après le lemme 3.1 $\overline{x} \in X$ est un EFSB pour le jeu (1).

Remarque 3.2. Posons

$$\alpha = \inf_{x \in X} \ \sup_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (x, \widehat{y}). \tag{17}$$

Si les fonctions f_i, $i = \overline{1, n}$ sont continues et les ensembles X_i, $i = \overline{1, n}$ sont non vides et compacts. Alors

$$\alpha = \min_{x \in X} \ \max_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (x, \widehat{y}).$$

Si on tient compte des remarques 3.1, 3.2 et du lemme 3.1, on déduit la proposition suivante qui est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un EFSB.

Proposition 3.1. *Supposons que les fonctions* f_i, $i = \overline{1, n}$ *sont continues et les ensembles* X_i, $i = \overline{1, n}$ *sont non vides et compacts.*

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1) *le jeu (1) possède au moins un EFSB.*
2) $\alpha = 0$.

De cette proposition, on déduit le procédé suivant de recherche pratique de l'EFSB pour le jeu (1) :

Procédé 3.1.
Étape 1. Calculer la valeur α de (17).
Étape 2. D'après la remarque 3.1, on a $\alpha \geq 0$.

- Si $\alpha > 0$, alors le jeu (1) n'admet pas d'EFSB.
- Si $\alpha = 0$, alors les issues $\overline{x} \in X$ vérifiant $\sup_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) = 0$ sont des EFSB pour le jeu (1).

Remarque 3.3. Si toutes les conditions du théorème 3.1 sont satisfaites, alors la condition $\alpha = 0$ de l'étape 2 du procédé 3.1 est garantie et ce procédé donne au moins un EFSB pour le jeu (1).

Exemple 3.1. Supposons que dans le jeu (1) $n = 3$, $X_i = [0, 1]$, $i = \overline{1, 2}$, $X_3 = [-1, 1]$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = X_1 \times X_2 \times X_3$. $f_1(x) = 2x_1x_2 \cos(x_3\pi/2) - x_2$, $f_2(x) = x_1 - x_1^2/2$, $f_3(x) = x_1 \cos(x_2x_3\pi/2)$.

Les conditions 1) et 2) du théorème 3.1 sont satisfaites.

Montrons que la condition 3) du théorème 3.1 est satisfaite *i.e.*
$\forall x \in X$, $\exists y \in X$ tel que $\forall i \in I, \forall j \in I - i$,

$$\forall t_{I-i} \in X_{I-i},\ f_j(x_i, t_{I-i}) \leq f_j(x_i, y_{I-i}).$$

En effet, soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3$.
– Pour $x_3 \in [-2/3, 2/3]$, on pose $y = (1, 1, 0)$.
Pour $i = 1$ on a $\forall (t_2, t_3) \in X_2 \times X_3$
$f_2(x_1, t_2, t_3) = x_1 - x_1^2/2 \leq f_2(x_1, y_2, y_3) = x_1 - x_1^2/2$,
$f_3(x_1, t_2, t_3) = x_1 \cos(t_2t_3\pi/2) \leq\ f_3(x_1, y_2, y_3) = x_1$.
Pour $i = 2$ on a $\forall (t_2, t_3) \in X_2 \times X_3$
$f_1(t_1, x_2, t_3) = 2t_1x_2 \cos(t_3\pi/2) - x_2 \leq\ \ f_1(y_1, x_2, y_3) = x_2$,
$f_3(t_1, x_2, t_3) = t_1 \cos(x_2t_3\pi/2) \leq\ f_3(y_1, x_2, y_3) = 1$.
Pour $i = 3$ on a $\forall (t_1, t_2) \in X_1 \times X_2$
$f_1(t_1, t_2, x_3) = 2t_1t_2 \cos(x_3\pi/2) - t_2 \leq\ \ f_1(y_1, y_2, x_3) = 2\cos(x_3\pi/2) - 1$,
$f_2(t_1, t_2, x_3) = t_1 - t_1^2/2 \leq f_2(y_1, y_2, x_3) = 1/2$.
– Pour $x_3 \in [-1, -2/3] \cup [2/3, 1]$, on pose $y = (1, 0, 0)$.
Pour $i = 1$ on a $\forall (t_2, t_3) \in X_2 \times X_3$
$f_2(x_1, t_2, t_3) = x_1 - x_1^2/2 \leq f_2(x_1, y_2, y_3) = x_1 - x_1^2/2$,
$f_3(x_1, t_2, t_3) = x_1 \cos(t_2t_3\pi/2) \leq\ f_3(x_1, y_2, y_3) = x_1$.

Pour $i = 2$ on a $\forall (t_2, t_3) \in X_2 \times X_3$
$f_1(t_1, x_2, t_3) = 2t_1 x_2 \cos(t_3\pi/2) - x_2 \leq \ f_1(y_1, x_2, y_3) = x_2,$
$f_3(t_1, x_2, t_3) = t_1 \cos(x_2 t_3 \pi/2) \leq \ f_3(y_1, x_2, y_3) = 1.$
Pour $i = 3$ on a $\forall (t_1, t_2) \in X_1 \times X_2$
$f_1(t_1, t_2, x_3) = 2t_1 t_2 \cos(x_3\pi/2) - t_2 \leq \ f_1(y_1, y_2, x_3) = 0,$
$f_2(t_1, t_2, x_3) = t_1 - t_1^2/2 \leq f_2(y_1, y_2, x_3) = 1/2.$

Donc d'après le théorème 3.1, ce jeu possède au moins un EFSB.

On vérifie par le procédé 3.1 que $\overline{x} = (1, 0, 1)$ est un EFSB pour ce jeu.

On a $\quad \alpha = \min\limits_{x \in X} \ \max\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (x, \widehat{y}).$

Comme $\max\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) = \max\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \left[\sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in I-i} f_j(\overline{x}_i, y^j_{I-i}) - f_j(\overline{x}) \right],$

d'où $\qquad \max\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) \ = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in I-i} \left[\max\limits_{y_{I-i} \in X_{I-i}} \ f_j(\overline{x}_i, y^j_{I-i}) - f_j(\overline{x}) \right].$

On vérifie facilement que $\quad \max\limits_{y_{I-i} \in X_{I-i}} \ f_j(\overline{x}_i, y^j_{I-i}) = f_j(\overline{x}),\ \forall i \in I, \forall j \in I - i,$
d'où $\max\limits_{\widehat{y} \in \widehat{X}} \Psi\ (\overline{x}, \widehat{y}) = 0$, et en tenant compte de (10), on déduit que $\alpha = 0$.

Remarque 3.4. La concavité des fonctions $f_i,\ i = \overline{1, n}$, et la condition 3) du théorème 3.1 ne sont pas nécessaires pour l'éxistence de l'EFSB, car il existe des jeux ne les vérifiant pas et possédant un EFSB.

Exemple 3.2. Supposons que dans le jeu (1) $n = 3$, $X_i = [-1, 1]$,$i = 1, 3$ et $X_2 = [0, 1]\,, X = \prod\limits_{i=1}^{3} X_i,\ x = (x_1, x_2, x_3) \in X,\ f_1(x) = x_1 x_2 \cos((1 + x_3)\pi/2) - x_2 + x_3^2,$ $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3,\ f_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2.$

La condition 1) du théorème 1 est évidemment satisfaite, alors que les fonctions $f_i,\ i = \overline{1, n}$ ne sont pas concaves. Montrons que la condition 3) du théorème 3.1 n'a pas lieu.

Considérons l'issue $x = (0, 0, 0)$, supposons que $\exists y \in X$ tel que

$$\forall i \in I, \forall j \in I - i, \forall t_{I-i} \in X_{I-i},\ f_j(0, t_{I-i}) \leq \ f_j(0, y_{I-i}). \tag{18}$$

Pour $i = 3$, on a

$$f_1(0, t_1, t_2) = -t_2 \leq -y_2, \quad \forall (t_1, t_2) \in \quad X_1 \times X_2. \tag{19}$$

$$f_2(0, t_1, t_2) = t_1^2 + t_2^2. \leq y_1^2 + y_2^2,\ \forall (t_1, t_2) \in \quad X_1 \times X_2. \tag{20}$$

L'équation (19) entraîne que $y_2 = 0$ et (20) entraîne que $y_2 = 1$, comme la composante y_2 n'est pas la même dans (19) et (20), on conclue que (18) n'a pas lieu. On vérifie facilement que le point $(1, 1, -1)$ est un EFSB pour le jeu (1).

3.1. Cas où les fonctions gain sont à variables séparées

Au cours de cette étude nous avons constaté que lorsque l'EFSB existe, il est presque souvent un maximum pour toutes les fonctions gain. Ceci constitue également un défaut majeur de cet équilibre. Dans ce paragraphe nous allons mettre en évidence une classe de jeux pour lesquels ce défaut est vérifié.

Proposition 3.2. *Supposons que dans le jeu (1) les fonctions gains soient de la forme*

$$\forall j \in I, \quad f_j(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x_i). \tag{21}$$

Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes

1) $\overline{x} \in X$ *est un EFSB pour le jeu (1).*

2) $\overline{x} \in X$ *est un maximum pour toutes les fonctions* f_i, $i = \overline{1, n}$.

Preuve. Supposons que $\overline{x} \in X$ soit un EFSB pour le jeu (1) *i.e.* $\forall i \in I$, $\forall j \in I - i$, $\forall y_{I-i} \in X_{I-i}$, $\ f_j(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x})$ *i.e.* $\forall i \in I$, $\forall j \in I - i$, $\forall y_{I-i} \in X_{I-i}$,

$$a_{j1}(y_1) + ... + a_{ji}(\overline{x}_i) + ... + a_{jn}(y_n) \leq \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(\overline{x}_l). \tag{22}$$

Soit $l \in I$. Montrons que $\forall y \in X$, $\ f_l(y) \leq \ f_l(\overline{x})$.

Soit $k \in I - l$. Commençons par montrer que

$$\forall s \in I - k, \ \forall y_s \in X_s, \quad a_{ls}(y_s) \leq a_{ls}(\overline{x}_s). \tag{23}$$

Soit $s \in I - k$, posons $i = k$ et $j = l$ dans (22), alors si on choisit $y_{I-k} \in X_{I-k}$ tel que $y_p = \overline{x}_p$, $p \in I - \{k, s\}$ et y_s et quelconque dans X_s, on obtient

$$a_{ls}(y_s) \leq a_{ls}(\overline{x}_s), \forall \ y_s \in X_s$$

i.e. on a montré (23).

Il reste à montrer que

$$a_{lk}(y_k) \leq a_{lk}(\overline{x}_k), \ \forall \ y_k \in X_k. \tag{24}$$

Soit maintenant $s \in I - \{k, l\}$, posons $i = s$ et $j = l$ dans (22), alors si on choisit $y_{I-s} \in X_{I-s}$ tel que $y_p = \overline{x}_p$, $p \neq k$ et y_k est quelconque dans X_k, on obtient

$$a_{lk}(y_k) \leq a_{lk}(\overline{x}_k), \ \forall \ y_k \in X_k$$

i.e. on a montré (24).

Les inégalités (23) et (24) entraînent que

$$\forall s \in I, \ \forall y_s \in X_s, \quad a_{ls}(y_s) \leq a_{ls}(\overline{x}_s), \text{ donc } \ \forall y \in X, \quad f_l(y) \leq \ f_l(\overline{x}),$$

et comme l est quelconque dans I, on conclue que $\overline{x}$ est un maximum pour toutes les fonctions f_i, $i = \overline{1, n}$.

Réciproquement. Supposons que $\overline{x} \in X$ est un maximum pour toutes les fonctions f_i, $i = \overline{1, n}$ *i.e.* $\forall j \in I$, $\forall y \in X$, $f_j(y) \leq f_j(\overline{x})$ d'où $\forall i \in I$, $\forall j \in I - i$, $\forall y_{I-i} \in X_{I-i}$, $f_j(\overline{x}_i, y_{I-i}) \leq f_j(\overline{x})$, donc $\overline{x} \in X$ est un EFSB pour le jeu (1).

Remarque 3.5. 1) Si les fonctions f_i, $i = \overline{1, n}$, sont linéaires *i.e.* $\forall j \in I$, $f_j(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, où $a_{ji} \in \mathbb{R}$, elles sont de la forme (21), d'où la conclusion de la proposition 3.2 est vraie aussi pour le cas linéaire.

2) Dans le cas quadratique il existe des jeux ayant un EFSB qui n'est pas un maximum pour toutes les fonctions gain, l'exemple suivant illustre cette situation.

Exemple 3.3. Supposons que dans le jeu (1), $n = 3$, $X_i = [-1, 1]$, $i = 1, 3$ et $X_2 = [0, 1]$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod\limits_{i=1}^{3} X_i$, $f_1(x) = x_3 x_2$, $f_2(x) = x_3 x_1$ et $f_3(x) = x_1 x_2$. On vérifie facilement que $\overline{x} = (0, 0, 0)$ est un EFSB, alors que f_1 atteint son maximum en $x = (x_1, 1, 1)$, $\forall x_1 \in X_1$, f_2 atteint son maximum en $x = (1, x_2, 1)$ ou $x = (-1, x_2, -1)$, $\forall x_2 \in X_2$ et f_3 atteint son maximum en $x = (1, 1, x_3)$, $\forall x_3 \in X_3$.

Remarque 3.6. Dans le cas général les deux situations peuvent avoir lieu. En effet, si on revient à l'exemple 3.1 on remarque que $\max\limits_{x \in X} f_1(x) = 1$ est atteint au point $x = (1, 1, 0)$, alors que $f_1(\overline{x}) = 0$. $\max\limits_{x \in X} f_2(x) = 1/2$ est atteint au point $x = (1, x_2, x_3)$, $\forall (x_2, x_3) \in X_2 \times X_3$, alors que $f_2(\overline{x}) = 1/2$. $\max\limits_{x \in X} f_3(x) = 1$ est atteint au point $x = (1, x_2, 0)$, $\forall x_2 \in X_2$, alors que $f_2(\overline{x}) = 1$.

Si on revient à l'exemple 3.2 on constate que $(1, 1, -1)$ est un EFSB où toutes les fonctions gain atteignent leur maximum. On peut même avoir la situation où un jeu possède un EFSB et un maximum commun à toutes les fonctions gains n'existe pas. Cette situation est illustrée par l'exemple suivant :

Exemple 3.4. Supposons que dans le jeu (1), $n = 3$, $X_i = [-1, 1]$, $i = 1, 3$ et $X_2 = [0, 1]$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod\limits_{i=1}^{3} X_i$, $f_1(x) = x_3 x_2$, $f_2(x) = x_3 x_1$ et

$f_3(x) = -x_1x_2$. Alors $\overline{x} = (0,0,0)$ est un EFSB pour ce jeu alors que f_1 atteint son maximum en $x = (x_1, 1, 1)$, $\forall x_1 \in X_1$, f_2 atteint son maximum en $x = (1, x_2, 1)$ ou $x = (-1, x_2, -1)$, $\forall x_2 \in X_2$ et f_3 atteint son maximum en $x = (-1, 1, x_3)$, $\forall x_3 \in X_3$.

Conclusion

Dans cet article nous avons donné quelques propriétés intéressantes de l'EFSB et nous avons traité le problème de son existence et sa détermination pratique. Dans le lemme 3.1 et la proposition 3.1 nous avons établi des conditions nécéssaires et suffisantes d'existence de cet équilibre sous des conditions assez générales sur les ensembles des stratégies et sur les fonctions gain des joueurs. À l'aide du théorème 3.1, nous avons trouvé des conditions qui garantissent l'existence de l'EFSB. Notons que l'hypothèse 3) du théorème 3.1 est assez difficile à vérifier. Enfin, nous avons donné un algorithme de recherche pratique de cet équilibre. Beaucoup de choses restent à faire en ce qui concerne l'EFSB. Nous pensons que ce travail peut être développé dans au moins trois directions : la première est d'étudier le cas où les ensembles des stratégies des joueurs sont finis, la deuxième est de généraliser ces résultats au cas où les joueurs sont incertains par rapport aux données du jeu et au cas des jeux différentiels.

Références

[1] R. Aumann, Acceptable Points in General Cooperative n- Person Games, in *Contributions to the Theory of Games 4*. Princeton University Press (1959).

[2] C. Berge, *Théorie général des jeux à $n-$ personnes*. Gauthier Villars, Paris (1957).

[3] K. Fan, Minimax Inequality and Application, in *Inequality*, Vol. 3, edited by O. Shisha. Academic Press, New York (1972).

[4] J.C. Harsanyi, Oddness of the Number of Equilibrium Points: A new proof. *Int. J. Game Theory.* **2** (1973) 235-250.

[5] H. Moulin, *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*. Herman, Paris (1981).

[6] R.B. Myerson, Refinements of the Nash Equilibrium Concept. *Int. J. Game Theory* **7** (1978) 73-80.

[7] J.F. Nash, Non-Cooperative Games. *Ann. Maths* **54** (1951) 286-295.

[8] G. Owen, *Game Theory*. Academic Press, London (1995).

[9] R. Selten, Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Point in Extensive Games. *Int. J. Game Theory* **4** (1975) 25-55.

[10] E. Van Damme, *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1987).

[11] Wu Wen–Tsün and Jiang Jia–He, Essential Equilibrium Point of n-Person Non-cooperative Games. *Sci. Sinica* **11** (1962) 1307-1322.