RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **35** (2001) 367-381

TARIFICATION PAR DES JEUX COOPÉRATIFS AVEC DEMANDES ÉLASTIQUES

F. Bendali[1], J. Mailfert[1] et A. Quilliot[1]

Communiqué par Philippe Chrétienne

Abstract. We propose here a pricing Model which is an extension of the Cooperative Game concept and which includes a notion of Elastic Demand. We present some existence results as well as some algorithms. We conclude by discussing this model in the context of some Production and Transportation problems.

Résumé. Nous proposons ici un modèle de Tarification basé sur une extension du formalisme des Jeux Coopératifs et qui prend en compte la notion d'Élasticité de la Demande. Nous présentons pour ce modèle un résultat d'existence ainsi qu'un algorithme de calcul associé. Nous interprétons enfin ce nouveau concept dans le cas d'un problème de production et nous le prolongeons au cas d'un problème de transport.

Mots clés : Programmation linéaire, Jeux Coopératifs, point fixe, flots, transport, production.

1. Introduction

Les problèmes de Tarification [6, 10, 18], sont en train de devenir un domaine important de la Recherche Opérationnelle. Ils renvoient en effet à une composante majeure du processus de décision stratégique d'une entreprise et les processus de dérégulation en cours dans les secteurs des Transports, des Télécommunications et de l'Énergie obligent les principaux opérateurs de ces secteurs à se repositionner en termes de politique tarifaire et de parts de Marché.

Reçu en janvier 1999. Accepté en avril 2001.

[1] LIMOS, Campus des Cézeaux, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand, 63 173 Aubière, France.

Jusqu'à ces dernières années, les outils dont on pouvait disposer afin de traiter ces problèmes demeuraient d'ordre théorique (Jeux Coopératifs [7, 11, 13, 22, 24], Jeux non Coopératifs [2, 19, 20, 27], Équilibres Concurrentiels [1, 11, 27], ...) et ne pouvaient prétendre qu'orienter l'analyse. Mais l'augmentation de puissance des calculateurs, jointe à la mise en œuvre dans les entreprises de systèmes d'informations de plus en plus complets et de mieux en mieux structurés, permettent à présent d'envisager un suivi efficace de l'activité d'une branche ou d'une entreprise en matière de coûts et de demandes. S'ouvre dès lors une perspective de modèles opérationnels pour l'aide à la décision stratégique (prix et niveaux de production, investissements...).

On peut classifier les modèles théoriques pour la Tarification selon le point de vue qu'ils privilégient :

- modèles considérant la Tarification comme un processus stable d'imputation des coûts entre les usagers avec prise en compte implicite de la notion de concurrence tels que les modèles mono-entreprise (Aumann–Shapley, Jeux Coopératifs) ou multi-entreprise (Oligopoles) ;
- modèles considérant la Tarification comme un mode d'ajustement entre l'Offre et la Demande tels que les modèles de type Ramsey–Boiteux (hors concurrence) ou ceux des Jeux Non Coopératifs, des Équilibres de Nash (avec concurrence explicite).

Nous proposons, au cours de cet exposé, un modèle qui vise à l'unification partielle de ces différents points de vue, et qui se décrit comme une extension du formalisme des jeux coopératifs par prise en compte de la notion d'élasticité des demandes aux prix. Nous présentons pour le modèle ainsi défini un résultat d'existence et un algorithme de calcul, et concluons en examinant comment s'interprètent ce modèle et ces résultats sur deux exemples simples, l'un relatif à un problème de Transport et l'autre à un problème de Production.

2. Un modèle de tarification à demandes élastiques

Notations préliminaires

- Si X est un ensemble fini, on note $\mathbf{P}(X)$ l'ensemble des parties de cet ensemble.
- On note 1, le vecteur indexé sur X et dont les coordonnées sont égales partout à 1.
- Si z est un vecteur indexé sur un ensemble X et si A est une partie de X, alors on note $\mathbf{z^A}$ **la Projection** de z sur A, c'est-à-dire le vecteur indexé sur X qui est nul en X-A et qui coïncide avec z en A.
- Si x est dans X, on note $\mathbf{z_x}$ la coordonnée en x de z. Par extension, si A est une partie de X, on note $\mathbf{z_A}$ **le vecteur Restriction** de z à A, c'est-à-dire le vecteur indexé sur A et qui coïncide avec z en tout x de A. On considère alors que pour deux vecteurs restriction z_A et z'_A, $z_A \leq z'_A$ si $\forall x \in A$, $z_x \leq z'_x$, $z_A < z'_A$ si $\forall x \in A$, $z_x \leq z'_x$ et $z \neq z'$ et enfin $z_A \ll z'_A$ si $\forall x \in A$, $z_x < z'_x$.

2.1. Rappel : Jeux Coopératifs

On nomme ainsi tout couple $J = (X,\ V)$, où X est un ensemble fini et V est une fonction *Coût* qui à toute partie A de X associe $V(X)$ de telle sorte que :

- $V(\emptyset) = 0$;
- V est croissante : si $A \subset B$ alors $V(A) \leq V(B)$.

On dit que J est *sous-additif* si pour tout $A,\ B \in \mathbf{P}(X)$ tel que $A \cap B = \emptyset$, on a $V(A \cup B) \leq V(A) + V(B)$.

Le *Cœur* de J est alors l'ensemble **CO(J)** des vecteurs *Prix* $p = (p_x,\ x \in X)$ tels que :

- $\sum_{x \in X} p_x = V(X)$;
- Pour tout $A \in \mathbf{P}(X)$, $\sum_{x \in A} p_x \leq V(A)$.

La notion de Jeu Coopératif peut s'appliquer à des problèmes de Tarification, selon plusieurs interprétations possibles.

Interprétation 1 : L'ensemble X vu comme ensemble de clients
Imaginons qu'un opérateur $O1$ mette en place une infrastructure I (Transport, Télécommunication...) propre à être utilisée par un ensemble de clients X. Une coalition A de $\mathbf{P}(X)$ est alors assimilable à une part de marché, le coût $V(A)$ peut être vu comme le coût standard de mise en place d'une infrastructure I_A, similaire à I, mais destinée à satisfaire les seuls besoins des membres de A. Tarifer l'accès à I de façon stable revient, pour l'opérateur $O1$, à imputer le coût $V(X)$ aux différents clients de façon à éviter qu'un opérateur $O2$, soumis aux mêmes contraintes de coûts que $O1$, ne puisse proposer aux membres d'une coalition A une alternative dédiée I_A qui leur soit plus avantageuse que I.

Interprétation 2 : L'ensemble X vu comme ensemble de produits
Supposons que X soit un ensemble de produits susceptibles d'être mis sur le marché par un producteur $P1$. Une quantité $V(A)$, $A \subset X$, correspond alors au coût induit pour $P1$ par la mise sur le marché des seuls produits de A. Tarifer l'ensemble des produits de X de façon stable revient alors à leur affecter des prix de telle sorte qu'aucun producteur $P2$, soumis aux mêmes coûts de production que $P1$, ne puisse, en limitant sa production aux produits d'une sous famille A de X, proposer des prix plus avantageux que $P1$.

Remarque 1.

- Il peut se faire que le Cœur du jeu $(X,\ V)$ soit vide. Dans ce cas, existent des procédés moins contraignants de définition d'une tarification équilibrée, tel que celui associé aux valeurs de Shapley ou Aumann–Shapley [22].
- Il peut aussi se faire que ce Cœur soit vaste, auquel cas on peut chercher à caractériser à l'intérieur du Cœur certaines valeurs particulièrement significatives (Nucléolus [5, 8, 16], ...).
- La notion de Cœur ne prend en compte la concurrence que de façon anonyme, sans différencier les coûts et les produits des différents opérateurs. Si l'on

veut prendre en compte de façon explicite cette notion de concurrence, on est alors renvoyé à la notion de Jeu Non Coopératif [2, 10, 18–20].

2.2. Rappel : la Tarification au sens de Ramsey–Boiteux

Celle-ci prend en compte l'Élasticité des demandes aux prix. On considère un opérateur donné, susceptible de produire des biens parmi un ensemble fini de biens I. On suppose alors que le coût d'une production $d = (d_i,\ i \text{ dans } I)$ est une quantité $C(d)$ et que la demande induite par un système de prix $p = (p_i,\ i$ dans $I)$ est une fontion $D(p) = (D_i(p),\ i \text{ dans } I)$ de p. La tarification au sens de Ramsey–Boiteux, s'obtient alors en affectant des prix aux différents services en fonction inverse de leurs élasticités aux prix.

2.3. Jeux Coopératifs Généralisés

La notion d'Élasticité des Demandes aux Prix est évidemment cruciale dans tout problème de décision stratégique portant sur un couple Production/Prix. Les efforts faits pour s'en affranchir tiennent d'abord à la difficulté pratique qu'il y a à mesurer ces quantités. Toutefois, même si ce problème d'acquisition de fonctions de Demande demeure très difficile, les progrès enregistrés en matière d'Informatique d'Entreprise permettent, beaucoup plus qu'auparavant, d'attaquer ce problème. Reprenons les deux exemples d'interprétation de la notion de Cœur d'un jeu coopératif fournis en 2.1, de manière à faire comprendre en quoi la prise en compte de l'élasticité de la demande est susceptible d'induire une extension du modèle classique de jeu coopératif.

1$^{\text{er}}$ exemple : X vu comme un ensemble de clients
Imaginons que l'opérateur $O1$ soit par exemple un opérateur de Transport public et que l'ensemble X soit un ensemble de couples Origine/Destination. Dans ce cas, une offre de transport permettant la connexion, sous certaines contraintes de vitesse de chaque couple élément de X, sera tarifée, pour un tel couple x, selon un prix unitaire p_x. Ce prix induira lui même un niveau de demande d_x, qui sera une fraction de l'ensemble des déplacements potentiels associés à x. Cette fraction d_x sera d'autant plus grande que p_x est petit et pourra même le cas échéant dépendre du niveau global d'utilisation du système, c'est-à-dire de l'ensemble $p = (p_y,\ y$ dans $X)$ des prix pratiqués. À son tour, la satisfaction de l'ensemble $d = (d_y,\ y$ dans $X)$ des demandes ainsi définies induira pour $O1$ un coût $C(d)$. Tarifer de façon stable, en l'absence de toute concurrence identifiée de façon spécifique, signifiera pour $O1$, faire en sorte qu'aucun opérateur $O2$, contraint par des fonctions de coûts similaires, ne puisse proposer, en se limitant à desservir un sous ensemble A de X bien choisi, un service qui serait plus avantageux pour les demandeurs associés à A que celui mis en place par $O1$.

2^{e} exemple : X vu comme un ensemble de produits
On peut imaginer de la même façon que, pour chaque produit x proposé par notre producteur $P1$, la demande d_x en x dépende de l'ensemble $p = (p_x,\ x$ dans $X)$ des prix unitaires pratiqués par $P1$, et qu'à son tour le vecteur demande $d = (d_x,\ x$ dans $X)$ ainsi défini, induise pour $P1$ un coût de production $C(d)$. Une tarification stable sera alors pour $P1$ un vecteur prix p tel qu'aucun producteur soumis techniquement à des contraintes de coût similaires ne puisse déséquilibrer la position occupée par $P1$ en limitant sa production à un sous ensemble A de X bien choisi.

Nous introduisons donc ici le modèle dit du *Jeu Coopératif Généralisé* et qui tend à unifier les deux modèles décrits ci-dessus.

Une instance de Jeu Coopératif Généralisé sera donc constituée d'un triplet $G = (X,\ C,\ D)$ pour lequel :
- X est un ensemble fini (clients ou produits) ;
- C est une fonction *Coût*, croissante, nulle en 0 et continue, qui à tout vecteur production $d = (d_x,\ x$ dans $X) \geq 0$, associe un coût $C(d)$; (E1)
- D est une fonction *Demande*, qui à tout vecteur prix $p = (p_x,\ x$ dans $X) \geq 0$, considéré comme système de prix unitaires, associe un vecteur $D(p) = (D_x(p),\ x$ dans $X) \geq 0$, de telle sorte que chaque fonction composante D_x soit décroissante et continue. (E2)

Reprenant la notion de stabilité telle qu'intuitivement formulée dans les exemples précédents, nous dirons qu'un couple $(p = (p_x,\ x$ dans $X)$, $d = (d_x,\ x$ dans $X)) \geq 0$ est dans le Cœur de G si :
- $d = D(p)$;
- $p \cdot d = C(d)$; (le budget de l'opérateur est en équilibre) (E3)
- il n'existe pas (notion de stabilité) A dans $P(X)$, p' et d' indexé sur X tels que : (E4)
  - $p'_{X-A} = p_{X-A}$; $p'_A < p_A$;
  - $d'_{X-A} = 0$; $d'_A \geq d_A$;
  - $C(d') = p'_A \cdot d'_A$
  - $D(p')_A = d'_A$.

Remarque 2. Les hypothèses que nous avons mises sur les fonctions C et D renvoient à une interprétation de chaque quantité d_x, x dans X, comme d'une fraction de marché. Ceci explique que nous ayons autorisé des prix éventuellement nuls et dès lors imposé des demandes bornées ainsi que des hypothèses de continuité.

Remarque 3. Dans le cas de demandes rigides non nulles, on retrouve la notion usuelle de Cœur d'un Jeu Coopératif. En effet, on peut définir à partir du Jeu Généralisé $G = (X,\ C,\ D)$ un Jeu Coopératif classique $J(G, D) = (X, V)$ en posant, pour toute coalition A dans X :

$$V(A) = C(D^A),$$

D^A désignant la projection sur A du vecteur demande fixe D. Si p est la composante prix unitaire d'un élément du Cœur de G, il suffit alors de poser, pour tout x dans X, $q_x = p_x \cdot D_x$, pour obtenir un élément q du Cœur de $J(G)$ et réciproquement.

3. Résultats théoriques et algorithmes

3.1. Un résultat d'existence

Soit $G = (X,\ C,\ D)$ un triplet qui définit un Jeu Coopératif Généralisé au sens de la section 2.3. Nous dirons que la fonction Demande D est *régulière* si elle est strictement positive et si le produit scalaire $p \cdot D(p)$ est strictement croissant en p, c'est-à-dire si toute augmentation stricte **d'au moins une coordonnée** de p induit une augmentation stricte de la quantité $p \cdot D(p)$.

D'après la remarque 3 ci-dessus, pour tout vecteur production $d \geq 0$, nous notons $J(G,\ d)$ le Jeu Coopératif $(X,\ V_d)$ défini pour toute partie A de X par : $V_d(A) = C(d^A)$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème 1. *Soit un ensemble X et une fonction Coût C conforme aux hypothèses (E1). Nous supposons de plus qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que pour tout vecteur $d \geq 0$, $C(d) \leq \lambda N(d)$, où N représente la Norme Euclidienne. Les assertions (1) et (2) ci-dessous sont alors équivalentes:*

(1) *Pour toute fonction Demande D régulière et satisfaisant (E2), le Cœur du Jeu Coopératif Généralisé $(X,\ C,\ D)$ est non vide.*

(2) *Pour tout vecteur $\mu = (\mu_A,\ A$ dans $P(X)) \geq 0$ et Équilibré, c'est-à-dire tel que pour tout x dans X, on a : $\sum_{A\,:\,x\in A} \mu_A = 1$, et pour tout vecteur $d = (d_x,\ x \in X) \gg 0$, on a :*
$$C(d) \leq \sum_{A\in P(X)} \mu_A \cdot C(d^A). \qquad \text{(E5)}$$

Remarque 4.

- Concernant le rapport $C(d)/N(d)$:
  Supposer ce rapport borné à l'infini est naturel puisque cela dérive par exemple d'hypothèses classiques portant sur la dégressivité des coûts marginaux en l'absence de limite quant aux capacités de production.

  Quand la demande tend à s'annuler par contre, notre hypothèse correspond à une forme de simplification de la représentation du coût. Elle implique, en effet, que ne sont considérés ici que des coûts de fonctionnement et d'augmentation d'équipement, hors tout coût fixe d'initialisation. Nous pouvons remarquer que cette hypothèse est satisfaite (comme ce sera le cas en Sect. 4) quand le coût $C(d)$ est valeur optimale d'un programme linéaire dont la matrice de contraintes est fixe.
- Concernant l'énoncé (2) du théorème :
  Prenons le premier exemple de la section 2 relatif à un système de transport. La partie (2) du théorème exprime que si nous supposons que nos coûts marginaux sont dégressifs alors quelque soit le nombre d_x d'utilisation de notre réseau pour le couple origine/destination x, il ne sera pas possible de

segmenter cet ensemble d'utilisation U en des blocs U_A de la forme $\mu_A d^A = \mu_A(d_x,\, x \in A)$, de telle sorte que la gestion séparée de ces blocs s'avère plus économique que la gestion globale de U.

Démonstration du théorème 1.

Lemme 1. *Soit C une fonction Coût vérifiant (E1) et D une fonction Demande satisfaisant (E2). Tout élément du Cœur du Jeu Généralisé G = (X, C, D) est alors une solution du programme Cœur (G) :*

Cœur (G) : $\{p = (p_x,\, x \text{ dans } X) \geq 0,\ d = (d_x,\, x \text{ dans } X) \geq 0,$
- Pour toute partie A de X, $\sum_{x\in A} p_x \cdot d_x \leq C(d^A)$;
- $p \cdot d = C(d)$;
- $d = D(p)\}\cdot$ (E6)

Démonstration du lemme 1. Vérifions que si un couple (p, d) est dans le Cœur du Jeu Généralisé $G = (X,\ C,\ D)$ alors il satisfait les équations (E6). Il suffit de prouver que si A est une partie quelconque de X, alors on a $\sum_{x\in A} p_x \cdot d_x \leq C(d^A)$. Si tel n'est pas le cas, soit A tel que $\sum_{x\in A} p_x \cdot d_x > C(d^A)$. Comme $C(d^A) \geq 0$ et que C est monotone, sans perte de généralité, supposons $p_x > 0$, pour tout $x \in A$. On peut alors considérer, pour tout nombre $\tau \geq 0$, le vecteur prix p^τ défini par :

– $p^\tau_{X-A} = p_{X-A}$;
– $p^\tau_A = \tau \cdot p_A$.

On constate alors qu'il existe τ^* dans l'intervalle [0,1[tel que $p^{\tau^*}_A \cdot D(p^{\tau^*})_A = C(D(p^{\tau^*})^A)$. Il suffit alors de poser $p' = p^{\tau^*}$, $d'_{X-A} = 0$ et $d'_A = D(p^{\tau^*})_A$ pour obtenir les équations (E4) et déduire donc que le couple (p, d) ne peut pas faire partie du Cœur du jeu Généralisé $(X,\ C,\ D)$.

Lemme 2. *Soit D une fonction de Demande régulière. Alors le Cœur du Jeu Généralisé G = (X, C, D) est exactement l'ensemble des solutions du programme Cœur (G).*

Démonstration du lemme 2. Le lemme 1 nous dit que tout élément du Cœur de G est solution du programme Cœur (G). Réciproquement, soit (p, d) une solution du programme Cœur (G). Supposons qu'il existe une partie A de X et un vecteur p' tels que les équations (E4) soient vérifiées, c'est-à-dire tels que :

– $p'_{X-A} = p_{X-A}$; $p'_A < p_A$;
– $C(D(p')^A) = p'_A \cdot D(p')_A$. (E7)

On doit avoir (décroissance de D) que $D(p')_A \geq D(p)_A$ ce qui entraine (croissance de C) que $C(D(p')^A) \geq C(D(p)^A)$. On doit aussi avoir (programme Cœur (G)) : $\sum_{x\in A} p_x \cdot d_x \leq C(D(p)^A)$; la croissance stricte de la fonction qui à tout vecteur prix q associe le produit scalaire $q \cdot D(q)$ et la décroissance de D entraine l'inégalité $p'_A \cdot D(p')_A < p_A \cdot D(p)_A$ ce qui induit alors une contradiction.

Démonstration du théorème. Rappelons le théorème de Bondareva–Shapley [4,22,23] : le Cœur d'un Jeu Coopératif (X, V) est non vide si et seulement si pour tout vecteur équilibré $\mu = (\mu_A,\, A \text{ dans } P(X)) \geq 0$, on a :

$$V(X) \leq \sum_{A \in P(X)} \mu_A \cdot V(A).$$

Démontrons dès lors l'implication (1) $\Rightarrow$ (2).
Supposons donc (2) faux, ce qui signifie qu'il existe un certain vecteur demande $d = (d_x,\, x \text{ dans } X) \gg 0$ et un certain vecteur équilibré $\mu = (\mu_A,\, A \text{ dans } P(X)) \geq 0$ tels que l'inégalité (E5) ne soit pas satisfaite. Nous pouvons alors considérer des fonctions de Demande D_x, $x \in X$, qui sont constantes et égales à d_x. Celles-ci sont régulières (puisque d est strictement positif) et satisfont (E2). Si un couple (p^*, d^*) fait partie du Cœur du Jeu Généralisé $J = (X, C, D)$, le vecteur Prix q^* défini par :

$$\text{pour tout } x \text{ dans } X,\ q^*_x = p^*_x \cdot d_x\ ,$$

devra donc être de fait dans le Cœur du Jeu Coopératif $J(G, d)$. Or le théorème de Bondareva–Shapley nous dit que le Cœur de ce jeu doit être vide si l'inégalité (E5) n'est pas satisfaite, ce qui implique que le couple (p^*, d^*) ne peut pas exister.

Démontrons à présent la réciproque (2) $\Rightarrow$ (1). Rappelons tout d'abord qu'une multi-application convexe, compacte et semi-continue supérieurement d'un espace R^n dans un espace R^m est une fonction Γ qui à tout x dans R^n associe une partie convexe et compacte $\Gamma(x)$ de R^m, de telle sorte que pour tout ouvert U de R^m, l'ensemble $\Gamma^+(U) = \{x \text{ dans } R^n \text{ tels que } \Gamma(x) \in U\}$ est un ouvert de R^n. Il est connu (théorème de Tychonov–Kakutani [25]), que si Λ est une partie convexe compact de R^n et si Γ est une multi-application convexe, compacte et semi-continue supérieurement de Λ dans lui-même, alors Γ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe x dans Λ tel que $x \in \Gamma(x)$.

Considérons à présent un ensemble X et une fonction Coût C conformes aux hypothèses du théorème 1 et une fonction de Demande D régulière et satisfaisant (E2). Notons G le Jeu Généralisé induit (X, C, D). Pour tout vecteur de prix unitaires $p \geq 0$, le Jeu Coopératif $J(G, D(p))$ admet un Cœur $K(p)$ non vide, dès lors que l'assertion (2) du théorème est vérifiée, et ce Cœur est un sous-ensemble compact et convexe de $R^{\mathrm{Card}(X)}$.

La correspondance qui à $p = (p_x,\, x \text{ dans } X) \geq 0$ associe l'ensemble $K(p)$ est donc une multi-application convexe, compacte et semi-continue supérieurement. Par composition, et puisque la fonction D est strictement positive (du fait de la Propriété de Régularité), on voit alors que la multi-application K^* qui à tout vecteur prix unitaire $p \geq 0$, associe $K^*(p)$ défini par :

$K^*(p) = \{u = (u_x,\, x \text{ dans } X)$, tels que chaque u_x peut s'écrire $u_x = q_x/d_x$
Avec : $d_x = D(p)_x$ et $q_x \in K(p)\}$

est donc aussi une multi-application convexe, compacte et semi-continue supérieurement de $R^{\mathrm{Card}(X)}$ dans lui-même. Par ailleurs, nous avons fait l'hypothèse de l'existence d'un nombre $\lambda \geq 0$ tel que pour tout vecteur $d \geq 0$ indexé sur X, on ait $C(d) \leq \lambda \cdot N(d)$, où N désigne la Norme Euclidienne. Dans ces conditions, si

p est un vecteur prix unitaire, si q est dans $K(p)$ et si x est dans X, l'inégalité $q_x \leq C(d^{\{x\}}) = C(D(p)^{\{x\}})$ fournit aussi $q_x/d_x \leq \lambda$. Ceci signifie que si u est un élément de $K^*(p)$, alors on a $u_x \leq \lambda$. Il s'en déduit que si l'on pose $\Lambda = \{p = (p_x,$ x dans $X) \geq 0$ et tels que $\mathbf{Sup}_{x\in X}\, p_x \leq \lambda\}$ alors K^* est une multi-application convexe, compacte et semi-continue supérieurement de Λ dans Λ. K^* admet donc un point fixe p^*. Posant $d^* = D(p^*)$, on constate que le vecteur q^* défini pour tout x dans X par : $q^*_x = p^*_x \cdot d^*_x$ est dans le Cœur du Jeu Coopératif $J(G,\, d^*)$ et donc que l'on a les relations :

$1 \cdot q^* = C(d^*)$;
pour toute partie A de X, $\sum_{x\in A} q^*_x \leq C(d^{*A})$;

ce qui s'écrit encore :

$p^* \cdot d^* = C(d^*)$;
pour toute partie A de X, $\sum_{x\in A} p^*_x \cdot d^*_x \leq C(d^{*A})$.

Le vecteur p^* est donc solution du programme Cœur (G). Le Jeu Généralisé $G = (X,\ C,\ D)$ étant de surcroit régulier, alors le lemme 2 permet de conclure.

3.2. Un Algorithme

Il ressort du résultat précédent qu'une façon heuristique de chercher un couple (p, d) dans le Cœur d'un Jeu Généralisé $G = (X,\ C,\ D)$ consistera à résoudre le programme Cœur (G). Ceci pourra se faire selon le schéma algorithmique suivant :
Initialiser p (prix unitaire) ; Not Stop ;

Tant que Not Stop **faire**
  Soient d et q le vecteur (prix global) définis par :
    pour tout x dans X, $d_x = D(p)_x$ et $q_x = p_x \cdot d_x$;
  Chercher q' dans le Cœur du Jeu Coopératif $J(G,\, d)$ et qui minimise
  la quantité $N(q' - q)$; N désigne la Norme Euclidienne (I1)
  Si q' n'existe pas **alors** Stop (Echec)
  Sinon
    Si $N(q' - q)$ "*petit*" **alors** Stop (Succès)
    Sinon Poser, pour tout x dans X, $p_x := (p_x + q_x/d_x)/2$.

L'instruction (I1) au sein de ce schéma pourra alors se spécifier comme ci-dessous (on suppose que le Cœur du jeu $J(G,\, d)$ est non vide) :
Initialiser une famille U de parties actives de X et un vecteur q, appartenant au polyèdre $\Pi(U, d)$ défini comme étant l'ensemble des vecteurs $z = (z_x,\, x \in X)$ tels que $\sum_{x\in X} z_x = C(d)$ et tels que pour tout A dans U, on ait $\sum_{x\in A} z_x \leq C(d^A)$; on fera en sorte que $\Pi(U, d)$ soit borné.

Not Stop1 ;

Tant que Not Stop1 **faire**
  Soit z^* un élément (obtenu *via* la version Primale de l'Algorithme du
  simplexe) de $\Pi(U, d)$, qui minimise la quantité $z \cdot (q' - q)$;
  Not Stop2 ;
  Tant que Not Stop2 **faire**

Si z^* est un élément du Cœur du jeu $J(G,d)$ **alors** Stop2
Sinon
Générer une partie A de X telle que $\sum_{x\in A} z_x^* > C(d^A)$;
Insérer A dans U ;
Calculer à nouveau $z*$ dans $\Pi(U,d)$, qui minimise la quantité $(q'-q)\cdot z$, *via* la version Duale de l'Algorithme du Simplexe ;
Rechercher q'' de la forme $t\cdot q' + (1-t)\cdot z^*$, t dans [0,1], tel que $N(q,\ q'')$ soit le plus petit possible ;
Si $\left|N(q,\ q') - N(q,\ q'')\right|$ est suffisamment petit **Alors**
Stop1 ;
$q' := q''$;
Sinon $q' := q''$.

4. Un cas non concave : le Jeu de Production

Dans la plupart des modèles, la fonction Coût C s'avère être concave, et une telle hypothèse, dans le cas où C est de surcroit différentiable en 0, permet d'obtenir très simplement pour C les hypothèses du théorème 1.

Nous allons proposer ici un exemple d'application de ce théorème 1 qui concerne une situation dans laquelle la fonction Coût C n'est pas concave, mais au contraire convexe.

Nous nous inspirons ici du Jeu de Production étudié par Granot [14] et Owen [21] et considérons donc un ensemble X de biens finaux ou clients, une fonction de demande D qui à tout vecteur $p = (p_x,\ x$ dans $X) \geq 0$, associe un vecteur $D(p) = (D_x(p)),\ x$ dans $X) \geq 0$, un vecteur coût $c \geq 0$, indexé sur X, et une matrice positive M, dont les lignes sont indexées sur X et les colonnes sur un ensemble de "*ressources intermédiaires*" I. Nous supposons que chaque ligne et chaque colonne de M contiennent au moins un élément non nul.

Un vecteur production $d = (d_x,\ x$ dans $X) \geq 0$ étant donné, nous définissons le Coût C-PROD(d) associé à cette production comme étant la valeur optimale du programme linéaire :

PROD(d): $\{$Trouver $z = (z_i,\ i$ dans $I) \geq 0$, tel que $M\cdot z \geq d$ et qui minimise la quantité $c\cdot z\}\cdot$

Le Jeu Généralisé G-PROD = $(X,$ C-PROD, D), ainsi défini, est nommé Jeu de Production Généralisé. La fonction Coût C-PROD n'est donc pas concave, mais convexe. Nous allons voir qu'une simple application du théorème 1 ci-dessus permet d'obtenir :

Théorème 2. *Si la fonction Demande D est régulière et satisfait l'hypothèse (E2), alors le Cœur du Jeu de Production Généralisé G-PROD défini ci-dessus est non vide.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la fonction Coût C-PROD satisfait les hypothèses de base du théorème 1. Cette fonction est clairement continue et croissante, et il nous faut simplement démontrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout vecteur $d \geq 0$, on ait C-PROD$(d) \leq \lambda \cdot N(d)$. Considérons le polyèdre PROD* associé au programme dual de PROD(d) :

$$\text{PROD}^* = \{\ p \geq 0, \text{ indexés sur } X, \text{ tels que } p \cdot M \leq c\}\cdot$$

Ce polyèdre est borné ($M \geq 0$ et n'admet aucune colonne nulle), et nous pouvons poser :

$$\lambda = \text{Sup}_{p \text{ dans PROD}^*} N(p).$$

Pour tout d, on a par Dualité que :

$$\text{C-PROD}(d) = \text{Sup}_{p \text{ dans PROD}^*} p \cdot d\ ;$$

Il s'en déduit que pour tout vecteur $d \geq 0$, C-PROD$(d) \leq \lambda \cdot N(d)$.

Afin de conclure, il nous suffit de vérifier que la propriété (2) du théorème 1 est satisfaite ici, c'est-à-dire que pour tout vecteur $d \geq 0$, le Jeu Coopératif $J(G,\, d)$ possède un Cœur non vide.

Ceci s'obtient en remarquant que si d est un vecteur Demande donné, et si p est une solution optimale du programme dual PROD*(d) de PROD(d), alors le vecteur $q = (p_x \cdot d_x,\, x \text{ dans } X)$ est dans le Cœur du Jeu Coopératif de Production $J(G,\, d)$. On a en effet, $C(d) = p \cdot d = \sum_{x \in X} q_x$ par Dualité. Par ailleurs, pour toute partie A de X, le fait que p soit une solution réalisable du dual de PROD(d^A), entraine que l'on ait les relations $\sum_{x \in A} q_x = \sum_{x \in A} p_x \cdot d_x \leq C(d^A)$, d'où notre assertion.

On déduit aussi de cette démonstration:

Corollaire 1. Sous les hypothèses du théorème 2, on peut obtenir un élément du Cœur du Jeu de Production Généralisé (X, C, D) défini dans cette section en résolvant le système :

$\{$Trouver $z = (z_i, i \in I) \geq 0$, $p = (p_x, x \in X) \geq 0$ et $d = (d_x, x \in X) \geq 0$
tels que :
$p \cdot M \leq c$;
$M \cdot z \geq d$;
$c \cdot z = p \cdot d$;
$d = D(p)\}\cdot$

Démonstration. Ce corollaire exprime le fait que si p est un élément du Cœur du Jeu Généralisé G-PROD, et si d est le vecteur Demande induit par p, alors p peut de fait être choisi tel que le vecteur q défini pour tout x dans X par : $q_x = d_x \cdot p_x$, soit un solution optimale du programme dual PROD*(d). Ceci s'obtient tout simplement en reprenant la démonstration du théorème 1, et en considérant comme ensemble $K(p)$, non plus le Cœur du Jeu J(G-PROD, $D(p)$), mais la partie de ce Cœur formée des solutions optimales du programme PROD*$(D(p))$, dual de PROD$(D(p))$. Le reste de la démonstration procède exactement du même mécanisme de point fixe que celui utilisé pour obtenir le théorème 1.

5. Une variante multicritère pour le cas d'un Jeu de Transport

Nous allons maintenant présenter une variante du modèle étudié plus haut, conçue en référence à un jeu de Transport particulier, et pour lequel nous devons tenir compte du fait que les demandes sont élastiques, non seulement aux tarifs proposés, mais aussi à certaines caractéristiques techniques de l'offre mise en place par l'opérateur, qui à leur tour conditionnent le coût de cette infrastructure. Fondamentalement, ce sont les mêmes mécanismes que ceux précédemment mis en évidence qui présideront tant à la formalisation de la notion de stabilité (Cœur), qu'à l'obtention de théorèmes d'existence ou d'algorithmes de calcul.

Nous considérons donc ici un réseau $H = (Z,\ E)$, supposé fortement connexe, ainsi qu'un ensemble A d'arcs particuliers, susceptibles de supporter le transit d'une flotte de véhicules. Nous supposons qu'à chaque arc e dans E correspond un temps de parcours t_e et un coût c_e. Nous supposons aussi que le temps t_e est sensiblement plus petit si e est dans A que s'il n'y est pas. L'ensemble X de clients correspond ici à un ensemble de couples de sommets origine/destination $(o_x,\ s_x)$, x dans X, (Ensemble *des groupes-usagers*). Desservir tout ou partie de cet ensemble de clients va signifier, pour un opérateur donné, mettre en place, sur les arcs de A, un flot de véhicules z susceptibles d'être utilisés par les membres de chaque *groupe-usager* x dans X, et de leur offrir dès lors une connection plus rapide de o_x vers s_x. Le problème de la tarification du service ainsi offert est ici compliqué par le fait que la demande d_x d'accès à ce service par le *groupe-usager* x est supposée élastique à la fois **au tarif unitaire $\mathbf{p_x}$ pratiqué** pour un tel déplacement et **au temps de parcours $\mathbf{T_x}$** induit.

Nous formalisons le problème ainsi posé en introduisant, pour toute valeur multicritère k et pour tout vecteur demandes $d = (d_x,\ x \text{ dans } X)$, le programme linéaire suivant :

TRANS$(d,\ k)$: {Chercher sur le réseau H un flot $z \geq 0$
et un multiflot $f = f(x),\ x$ dans X tels que :
- chaque flot $f(x)$ exprime l'acheminement de la quantité d_x depuis o_x vers s_x ;
- Pour tout arc e dans A, $z_e \geq \sum_{x \in X} f(x)_e$;
- et qui minimisent la quantité $c \cdot z + k \cdot t \cdot (\sum_{x \in X} f(x))$.}

Dans ce programme, le flot z représente le flot de véhicules mis en place par l'opérateur, et chaque flot $f(x)$ exprime le cheminement d'une quantité d_x d'usagers pour aller de o_x vers s_x. La quantité $c \cdot z$ fournit le coût économique de z. La quantité $T_x = (t \cdot f(x))/d_x$ fournit ici le temps moyen nécessaire à l'acheminement d'un usager associé à la demande d_x pour aller de o_x vers s_x, selon le routage induit par le multiflot f. Le programme TRANS$(d,\ k)$ fournit une décision d'infrastructure optimale du point de vue de l'opérateur, dès lors que la demande d'acheminement d_x est considérée comme connue et fixe et dès lors que le coefficient k est supposé fournir, aux yeux de cet opérateur, un mode de conversion des temps de transit en coûts.

Nous notons $W(d,\, k)$ la valeur optimale de ce programme, qui constitue **le Coût de Satisfaction de la Demande d selon le Coefficient Multicritère k**.

Nous définissons alors ce que nous nommons Jeu Généralisé Multicritère de Transport, en considérant que les demandes d_x effectives d'accès à l'infrastructure définie par le flot z sont de fait conditionnées à la fois par les prix unitaires p_x, x dans X, imputés pour cet accès, et par les temps de parcours induits T_x, x dans X, et s'expriment sous la forme : $d_x = D_x(p_x,\, T_x)$, où chaque fonction D_x est décroissante et continue. Nous pouvons remarquer que dans un tel cadre, c'est l'opérateur et l'usager qui planifient un acheminement, et que cet acheminement n'est donc pas forcément conçu selon un critère de plus court chemin. Les temps T_x, x dans X, font dès lors partie de l'offre mise en place par l'opérateur au même titre que les prix p_x, x dans X.

Les considérations introduites au cours des sections précédentes en vue de formaliser la notion de stabilité d'un système de tarification nous conduisent alors à étendre comme suit la notion de Cœur présentée en section 2.

Nous disons qu'un triplet ($p = (p_x,\, x$ dans $X) \geq 0$, $T = (T_x,\, x$ dans $X) \geq 0$, $d = (d_x,\, x$ dans $X) \geq 0$), dit triplet (Prix, Temps, Demandes), est dans le Cœur du Jeu Généralisé Multicritère de Transport défini par les programmes **TRANS**$(d,\, k)$ et par les fonctions de demandes D_x, x dans X, si l'on a :

$d = D(p,\, T)$.
Il existe une valeur $k \geq 0$ et une solution optimale (z, f) du programme **TRANS**(d, k) telle que :
- $c \cdot z = p \cdot d$;
- pour tout x dans X, $T_x = (t \cdot f(x))/d_x$.

Il n'existe pas A inclus dans X, $k \geq 0$, et un triplet (Prix, Temps, Demande) $(p',\, T',\, d')$ tels que :
- $(p', T')_A < (p, T)_A$; $d'_A \geq d_A$;
- $p'_{X-A} = d'_{X-A} = 0$;
- $d'_A = D(p', T')_A$;
- $W(d',\, k') =$ Valeur optimale du programme **TRANS**$(d',\, k') = d'.(p' + k'T')$.

On dit que ce Jeu Généralisé Multicritère de Transport est régulier si chaque fonction D_x est strictement positive et si pour tout $k \geq 0$, chaque quantité $(p_x + k \cdot T_x) \cdot D_x(p_x, T_x)$ est strictement croissante en fonction du couple (p_x, T_x).

Les méthodes mises en oeuvre précédemment conduisent alors au résultat suivant :

Théorème 3. *Si le Jeu Multicritère Généralisé de Transport défini ci-dessus est régulier, alors son Cœur est non vide. Un élément de ce Cœur peut être obtenu en résolvant pour une valeur k quelconque le système suivant :*

{*Chercher* p, T, $d \geq 0$, *une solution optimale (z, f) de* ***TRANS***$(d,\, k)$ *et une solution* ($\alpha = (\alpha_z,\, z$ *dans* $Z)$, $\beta^x = (\beta^x_z,\, z$ *dans* $Z)$, $\gamma = (\gamma_e,\, e$ *dans* $A) \geq 0$) *optimale du dual de* ***TRANS***$(d,\, k)$ *tels que :*

- $d = D(p,\, T)$;
- *pour tout* x *dans* X, $d_x \cdot T_x = t \cdot f(x)$;

- *pour tout x dans X, $p_x = \beta^x \cdot 1^{*x} - k \cdot T_x$, où 1^{*x} est le vecteur indexé sur Z, qui vaut 1 en o_x, -1 en s_x et 0 ailleurs*$\}\cdot$

La démonstration est presque la même que celle que nous avons utilisée pour prouver le corollaire du théorème 2, et qui dérivait elle-même de celle utilisée pour obtenir le théorème 1. Contentons-nous de spécifier ici l'espace Λ des couples (p, T) sur lequel s'effectue, conformément au mécanisme déjà décrit au cours de ces démonstrations, la recherche d'un point fixe. Pour un nombre k donné, notons U_k l'enveloppe convexe (qui est un domaine compact) des sommets du polyèdre défini par les solutions réalisables du programme dual de **TRANS**(k, d). L'espace Λ s'écrit alors :
$\Lambda = \{$couples $(p, T) \geq 0$ tels que pour tout x dans X, il est possible de trouver $k \geq 0$, $\alpha = (\alpha_z, z$ dans $Z)$, $\beta^x = (\beta^x_z, z$ dans $Z)$, $\gamma = (\gamma_e, e$ dans $A) \geq 0$, dans U_k, permettant d'écrire $p_x = \beta^x \cdot 1^{*x} - k \cdot T_x\}\cdot$
Le reste de la démonstration s'obtient en construisant, comme pour les démonstrations du théorème 1 et du corollaire du théorème 2, une multi-application G de Λ dans lui-même, auquel on applique la méthode du Point Fixe.

6. Conclusion

Nous venons de présenter un modèle de tarification qui vise à intégrer, à l'intérieur du formalisme des Jeux Coopératifs, la notion fondamentale de réactivité de la demande face aux prix. Nous avons souligné que l'opérationnalité des différents modèles de tarification passait en premier lieu par l'existence d'un processus fiable d'estimation tant des coûts que des demandes, et que ce problème, que nous n'avons pas abordé ici, demeurait un problème très difficile, même si la qualité des systèmes d'informations existant permettait d'en envisager un traitement empirique. Nous avons aussi remarqué que la modélisation de la notion de concurrence au moyen du formalisme des jeux coopératifs présentait un certain nombre de faiblesses.

Par rapport au modèle même sur lequel nous venons de travailler, plusieurs développements peuvent être envisagés, concernant :

- le traitement des cas de vacuité du Cœur (extension de la notion de Valeur de Shapley...) ;
- la recherche au sein du Cœur de valeurs significatives (extension de la notion de Nucléolus...) ;
- l'interprétation du modèle sur des cas particuliers, liés aux Télécommunications, aux Transports, à la Localisation.

De tels développements feront l'objet de travaux ultérieurs.

Références

[1] K.J. Arrow, *Choix Collectifs et Préférences Individuelles.* Calmann-Levy (1975).

[2] C. Berge, *Théorie des Jeux à n personnes.* Gauthier-Villars, Paris, *Memorial Sciences Math.* **138** (1957).

[3] C.G. Bird, On cost allocation on a spanning tree: A game theoretical approach. *Networks* **6** (1976) 335-350.

[4] O.N. Bondareva, Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. *Problemy Kibernetica* **10** (1963) 119-139.

[5] G. Bruyneel, Computation of the nucleolus of a game by means of minimal balanced sets. *Oper. Res. Verfahren* **34** (1979) 35-51.

[6] N. Curien, Cost allocation and pricing policy: the case of french telecommunications, in *Cost Allocation: Methods, Principles, Applications*, edited H.P. Young, Chap. 9, Elsevier Sciences (1985) 167-178.

[7] M. Davis, M. Maschler, The kernel of a cooperative game. *Naval Res. Logist. Quarterly* **12** (1965) 223-259.

[8] D. Granot, G. Huberman, On the core and nucleolus of minimum cost spanning tree games. *Math. Programming* **29** (1984) 323-347.

[9] P. Dubey, L.S. Shapley, Totally balanced games arising from controlled programming problems. *Math. Programming* **29** (1984) 245-267.

[10] H.A. Eiselt, G. Laporte, J.F. Thisse, Competitive location model: a framework and bibliography. *Transportation Sci.* **27** (1993) 44-54.

[11] I. Ekeland, *La Théorie des Jeux et ses Applications à l'Economie Mathématique.* Presses Universitaires de France (1974).

[12] F.M. Fisher, Games economists play: A non cooperatice view. *Rand J. Econom.* **20** (1989) 113-124.

[13] D. Fudemberg, J. Tirole, *Game Theory.* MIT Press (1991).

[14] D. Granot, A generalized linear production model: A unifying model. *Math. Programming* **34** (1986) 212-222.

[15] D. Granot, F. Granot, On some network flow games. *Math. Oper. Res.* **17** (1992) 792-841.

[16] G. Huberman, The nucleolus and the essential coalitions, in *Analysis and Optimization Systems.* Springer, Berlin (1980) 416-422.

[17] E. Kalai, E. Zemel, Totally balanced games and games of flows. *Math. Oper. Res.* **7** (1982) 476-478.

[18] P.J. Lederer, A competitive network design problem with pricing. *Transportation Sci.* **27** (1993) 25-38.

[19] J. Nash, Non-Cooperative games. *Ann. of Math.* **54** (1951) 286-295.

[20] A. Orda, R. Rom, N. Shimkin, Competitive routing in multiuser communication networks. *IEEE/ACM Trans. Networking* **1** (1993) 510-521.

[21] G. Owen, On the core of linear production games. *Math. Prog.* **9** (1975) 358-370.

[22] G. Owen, *Game Theory.* Academic Press (1982).

[23] L.S. Shapley, On balanced sets and cores. *Naval Res. Logist. Quarlerly* **14** (1967) 453-460.

[24] L.S. Shapley, Cores of convex games. *Int. J. Game Theory* **1** (1971) 11-26.

[25] D.R. Smart, *Fixed Point Theorems.* Cambridge University Press, *Cambridge Tracts in Math.* **66** (1974).

[26] A. Tamir, On the core of network synthesis games. *Math. Programming* **50** (1991) 123-135.

[27] J. Von Neuman, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton University Press (1947).