

M. IOUALALEN

A. AISSANI

## **Les symétries dans les réseaux de Petri stochastiques (RdPS). Construction du graphe symbolique**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 34, n° 2 (2000), p. 237-249

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_2000\\_\\_34\\_2\\_237\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_2000__34_2_237_0)

© AFCET, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LES SYMÉTRIES DANS LES RÉSEAUX DE PETRI STOCHASTIQUES (RdPS) CONSTRUCTION DU GRAPHE SYMBOLIQUE (\*)

par M. IOUALALEN <sup>(1)</sup> et A. AISSANI <sup>(2)</sup>

Communiqué par Bernard LEMAIRE

*Résumé.* – L'analyse d'un réseau de Petri nécessite souvent le développement du graphe des marquages accessibles (GMA), dont la taille rend généralement son étude impossible. Le but de notre article est de proposer une méthode de construction d'un graphe réduit pour les réseaux de Petri stochastiques possédant des propriétés de symétrie, le graphe des marquages symboliques (GMS), en nous inspirant du principe de la théorie de la bisimulation de places. Cette construction s'effectue de manière automatique, en détectant les symétries structurelles du réseau. Nous montrons que ce graphe peut être utilisé pour déduire certaines propriétés du réseau, telles que la vivacité, la bornitude... De plus, le GMS étant isomorphe à la chaîne de Markov agrégée du GMA, nous pouvons alors déduire les paramètres de performances du réseau. Nous avons développé un outil, SSPN (Stochastic Symetric Petri Nets), permettant de générer le GMS et de déduire les propriétés qualitatives et quantitatives d'un RdPS.

Mots clés : Symétries, réseau de Petri stochastique, graphe des marquages accessibles, graphe des marquages symboliques.

*Abstract.* – The main purpose of this paper is to give a method for construction of the reduced reachability graph for Stochastic Petri Nets (SPN), the symbolic graph. This construction is achieved by exploiting the structural symetries in the net using the theory of bisimulation of places for detecting isomorphic parts in the net. The symbolic graph, being isomorphic to an agregated Markov chain, may be used to prove qualitative properties as liveness, boundness, ... Moreover, this reduced graph make more easy the computation of the performance measures of interest as the mean number of tokens in a place, the mean number of firing transition ... We have so developped a tool, SSPN (Stochastic Symetric Petri nets), for generating the symbolic graph and deducing qualitatives and quantitatives properties.

Keywords: Symetries, stochastic Petri Net, Symbolic Graph.

### 1. INTRODUCTION

Les réseaux de Petri stochastiques (RdPS) occupent une place prépondérante en tant qu'approche d'évaluation des performances des

(\*) Reçu en décembre 1997.

<sup>(1)</sup> Institut d'Informatique, USTHB, BP. 32, EL-Alia, Algérie.

<sup>(2)</sup> Université de Blida, Algérie.

systèmes informatiques ou industriels. Il a été démontré dans [MOL 81], que leur graphe des marquages accessibles (GMA) est isomorphe à une chaîne de Markov. Par conséquent, les techniques d'analyse du modèle chaîne de Markov sont exploitées dans les RdPS. La démarche de performances revient alors à résoudre une chaîne de Markov. Or, pour un modèle relativement grand, le nombre de ses marquages augmente rapidement, ce qui rend généralement son étude impossible. Ce problème est connu sous le nom d'explosion combinatoire du nombre des marquages, et limite considérablement la classe des systèmes analysables par les RdPS. Cette limitation est à l'origine de plusieurs travaux, dans le but de réduire l'espace d'états à traiter. De la propriété d'isomorphisme entre le graphe d'états des marquages accessibles et une chaîne de Markov, les premières recherches sont orientées à exploiter la technique d'agrégation markovienne pour réduire l'ensemble des états. Elle consiste à regrouper les états en classes, de façon que le nouveau processus soit aussi markovien [KEM 60]. Cependant, l'utilisation directe de cette technique présente des inconvénients tels que :

- La méthode de regroupement d'états n'est pas automatisable d'une part, et de l'autre, on ne sait pas *a priori*, si les classes construites ont un sens vis-à-vis du comportement du système.
- En outre, cette technique exige la génération de tous les états avant de procéder à la réduction.

Pour pallier à ces problèmes, une idée est de construire un graphe, nommé graphe des marquages symboliques (GMS), basé sur la détection de symétries dans le réseau, de taille moins importante que celle du graphe des marquages accessibles, où chaque nœud représente une classe d'états, et sur lequel, les propriétés sémantiques du réseau sont étudiées et à partir duquel les paramètres de la chaîne agrégée sont extraits.

La notion de symétrie a été introduite dans les réseaux colorés par Jensen [JEN 84, JEN 86, Roz 91], afin d'identifier les composants d'un système ayant des comportements similaires, i.e des composants exécutant les mêmes séquences d'actions dans les mêmes conditions. Ces marquages ont été organisés en une structure d'arbre, l'arbre d'accessibilité, où chaque nœud représente un marquage accessible, et chaque arc représente un franchissement de transition pour une instance de couleur. Un seul sous-arbre est développé pour un seul marquage par classe d'équivalence.

Dans [HAD 87] est proposée aussi une méthode de construction d'un graphe réduit, appelé graphe des marquages symboliques, pour les réseaux

réguliers, qui forment une sous-classe des réseaux colorés. En plus des classes de marquages, des classes de franchissements sont créées. En combinant les deux idées, Dutheillet [DUT 92] s'est proposée de développer un graphe symbolique dans le cas d'un réseau coloré quelconque, mais sans résoudre les problèmes liés à la construction du graphe, en particulier : la détermination automatique des symétries, ainsi que le choix d'une représentation pour une classe de marquages ou la construction d'une classe de franchissements. Cependant, la méthode a été automatisée pour les réseaux bien formés, extension des réseaux réguliers et des réseaux ordonnés.

En exploitant les travaux réalisés sur les réseaux colorés, et en considérant la classe des systèmes présentant des propriétés de symétries structurelles dans les RdPS, dans lesquels les délais de franchissement des transitions sont des variables aléatoires suivant une loi exponentielle, nous proposons une méthode de construction du graphe symbolique pour les RdPS en nous inspirant du principe de la bisimulation de places pour détecter les parties symétriques dans un réseau. En effet, un RdP modélisant un système possédant des propriétés de symétrie comporte des parties isomorphes connectées entre elles. Deux parties sont isomorphes, si elles ne diffèrent que par les noms de leurs places et leurs transitions.

Les symétries sont utilisées comme critère de définition des classes de marquages, telle que chaque classe est constituée d'un ensemble de marquages équivalents et aboutissent à des marquages équivalents. Ceux-ci assurent des évolutions similaires du système, autrement dit, ils permettent des franchissements équivalents et aboutissent à des marquages équivalents.

Une fois les symétries du modèle détectées, on procède à la construction du graphe symbolique, offrant ainsi une représentation condensée du graphe des marquages accessibles. Un outil, Symetric Stochastic Petri Net (SSPN) a été développé, son rôle étant la construction du GMS et la vérification des propriétés du réseau.

## 2. DÉFINITIONS

Un RdP est un quadruplé  $\mathbf{R} = \langle \mathbf{P}, \mathbf{T}, \text{Pré}, \text{Post} \rangle$  [BRA 83] tel que :

- $\mathbf{P}$  est l'ensemble fini de places ;
- $\mathbf{T}$  est l'ensemble fini de transitions ;
- $\text{Pré} : \mathbf{P} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application d'incidence avant ;
- $\text{Post} : \mathbf{P} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application d'incidence arrière.

Un RdP marqué est un couple  $\langle \mathbf{R}, \mathbf{M}_0 \rangle$  où  $\mathbf{R}$  est un RdP et  $\mathbf{M}_0$  est le marquage initial de  $\mathbf{R}$ .

Le marquage d'un réseau est une application  $M : P \rightarrow \mathbb{N}$  qui associe à chaque place un nombre entier correspondant au nombre de marques ou jetons dans la place.

Le comportement dynamique d'un RdP est défini par le franchissement des transitions sensibilisées.

Une transition est sensibilisée si  $\forall p M(p) \geq pre(p, t)$ , elle est alors dite franchissable.

Après le franchissement d'une transition, le marquage  $M$  devient pour toute place  $p$ :

$$M'(p) = M(p) - pre(p, t) + post(p, t) \quad \forall p \in P.$$

On note par  ${}^{\circ}t$  (resp  $t^{\circ}$ ) l'ensemble des places entrantes (resp. des places sortantes) de la transition  $t$ .

Un RdPS est un triplet  $S = \langle \mathbf{R}, \mathbf{M}_0, \varphi \rangle$  [AJM 85] tel que :

$\mathbf{R}$ : le réseau de Petri sous-jacent.

$\mathbf{M}_0$ : le marquage initial du réseau

$\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la fonction qui associe à chaque transition le paramètre de la loi de franchissement.

Un multiensemble  $\mathbf{E}$  sur un ensemble non vide  $\mathbf{A}$  est une application de  $\mathbf{A}$  vers  $\mathbb{N}$ .

Pour tout  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{a})$  désigne la multiplicité de  $\mathbf{a}$  dans  $\mathbf{E}$ .

L'ensemble de tous les multienssembles finis sur  $\mathbf{A}$  est noté  $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ , ainsi  $\mathcal{M}(P)$  désigne l'ensemble de tous les multienssembles sur l'ensemble des places  $P$ , on peut alors considérer que tout marquage  $M$  appartient à  $\mathcal{M}(P)$ . En effet,  $M$  peut être représenté par un multiensemble, où chaque place apparaît autant de fois qu'elle contient de jetons dans  $M$ .

### 3. DÉTECTION DES SYMÉTRIES DANS LES RdPS

Nous utilisons le principe de la bisimulation de places dans les réseaux de Petri, pour détecter les parties isomorphes dans un réseau.

De façon informelle, deux réseaux sont bisimilaires, si tout comportement effectué par l'un est reproduit par l'autre de façon à préserver les moments de choix non déterministe.

Nous avons défini une relation  $\mathcal{R}$  pour les RdP stochastiques, inspirée du principe de la bisimulation de places [BEL 91] qui permet de vérifier l'équivalence comportementale de deux réseaux. Cette relation nous permet d'identifier les parties isomorphes, c'est-à-dire des parties ayant les mêmes propriétés quantitatives.

L'objectif est donc, de construire une relation d'équivalence entre les places des composantes isomorphes du réseau et de déduire ainsi les classes de transitions équivalentes, qui sont à la base de la construction du graphe symbolique.

Soient deux réseaux stochastiques  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$ , tels que  $\mathbf{R}_i = \langle \mathbf{P}_i, \mathbf{T}_i, \text{Pre}_i, \text{Post}_i, \mathbf{M}_{0i}, \varphi_i \rangle$ , où  $\varphi_i$  est une fonction associant à chaque transition un taux de franchissement dans le réseau  $\mathbf{R}_i$ . Étant donnée une relation  $\mathcal{B}$  entre les places,  $\mathcal{B} \subseteq (\mathbf{P} \times \mathbf{P})$ , soient  $\mathbf{M}_1 \in \mathcal{M}(\mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{M}_2 \in \mathcal{M}(\mathbf{P}_2)$ , on peut définir la relation  $\mathcal{R} \subseteq (\mathcal{M}(\mathbf{P}_1) \times \mathcal{M}(\mathbf{P}_2))$ , de la façon suivante :

$$M_1 \mathcal{R} M_2 \Leftrightarrow \exists \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\} \in \mathcal{M}(\mathcal{R}),$$

tel que

$$M_1 = \{p_1, \dots, p_n\} \quad \text{et} \quad M_2 = \{q_1, \dots, q_n\}.$$

$\mathcal{R}$  est étendue aux transitions comme suit :

$$t_1 \mathcal{R} t_2 \Leftrightarrow \bullet t_1 \mathcal{R} \bullet t_2 \quad \text{et} \quad t_1^* \mathcal{R} t_2^* \quad \text{et} \quad \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2).$$

Dans la construction de la relation  $\mathcal{R}$ , on procède par étapes, chaque étape correspond à un niveau. Le modélisateur peut, pour réduire le temps de construction de la relation  $\mathcal{R}$ , décomposer les places marquées du marquage initial en classes  $C_i$ , tel que dans chaque classe, on ne trouve que des objets de même nature (exemple classe de mémoires, classe de processeurs, ...). Cette décomposition n'est pas nécessaire, l'algorithme construira arbitrairement ces classes, à l'étape initiale et fait des retours arrière en cas d'échec, pour essayer d'autres possibilités.

Avant de donner la méthode de construction de cette relation, nous définissons deux notions :

*Notion de transition successeur*

Soient deux transitions  $t_1$  et  $t_2$ , on dit que  $t_2$  est successeur de  $t_1$  si et seulement si  $\bullet t_2 \cap t_1^* \neq \emptyset$ , on écrit  $t_2 = \text{successeur}(t_1)$ .

### Notion de niveau dans un RdP

On définit de manière récursive la notion de niveau dans un réseau comme suit :

$\text{niveau}_0 = \{t \in \mathbf{T} / \bullet t \subseteq M_0\}$  (l'ensemble des transitions franchissables à partir de  $M_0$ ).

$\text{niveau}_i = \{t \in \mathbf{T} / \exists t' \in \text{niveau}_{i-1} \text{ et } t = \text{successeur}(t')\}$ .

### Algorithme de construction de la relation $\mathcal{R}$

#### Étape 0 :

- Construire la relation  $\mathcal{B}$ , arbitrairement, reliant les places marquées du marquage initial, tel que :

$$(p, q) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow M_0(p) = M_0(q) \quad \text{et} \quad \exists C_i/p \in C_i, \quad q \in C_i$$

$$(p, q) \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad (q, r) \in \mathcal{B} \quad \text{alors} \quad (p, r) \in \mathcal{B}$$

si une classe est composée d'une seule place  $s$ , alors  $(s, s) \in \mathcal{B}$ .

- Construire le  $\text{niveau}_0$  et déterminer les transitions susceptibles d'être équivalentes, les cas suivants sont alors possibles, on note  $r_i$  toutes les extensions de  $\mathcal{B}$  à une étape  $i$  :

- (a) Une transition  $t$  est équivalente à une ou plusieurs transitions  $t'$ .

*i.e.* leurs pré-ensemble et post-ensemble sont déjà reliés dans  $\mathcal{B}$ .

- (b) Le pré-ensemble d'une transition  $t$  est relié à un pré-ensemble d'une ou de plusieurs transitions  $t'$  susceptible(s) d'être équivalente(s) à  $t$ . Ainsi une extension  $r_i$  reliant leur post-ensemble rend les transitions équivalentes.

L'extension  $r_i$  consiste à relier une place  $p \in t^*$ , qui n'est pas déjà reliée dans  $\mathcal{B}$ , à une seule place  $q \in t^*$ , qui n'est pas aussi reliée dans  $\mathcal{B}$ .

- (c) Le pré-ensemble d'une transition  $t$  est relié à un pré-ensemble  $m$ , qui n'est pré-ensemble d'aucune transition équivalente à  $t$  ou susceptible de l'être. Ceci est vu comme un échec, un retour arrière aux étapes antérieures est nécessaire pour choisir d'autres combinaisons.

#### Étape 1 :

- Construire  $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup r_{i-1}$
- Construire l'ensemble des transitions susceptibles d'être équivalentes de  $\text{niveau}_i$ .

Pour cette étape, un cas supplémentaire est envisagé :

(d) Le pré-ensemble d'une transition  $t$  n'est pas entièrement relié dans  $\mathcal{B}$ .

i.e.  $\exists t \in \text{niveau}_{i-1}$  telle que  $\bullet t \cap t' \neq \emptyset$  et aussi

$\exists t'' \in \text{niveau}_j (j > i - 1)$  et  $\bullet t \cap t'' \neq \emptyset$ .

Dans ce cas, le traitement est retardé jusqu'à ce que le pré-ensemble de  $t$  soit entièrement relié dans une étape ultérieure.

**Exemple 1 :** Considérons le cas de deux processus se partageant une mémoire commune, le RdPS associé est représenté par la figure suivante :

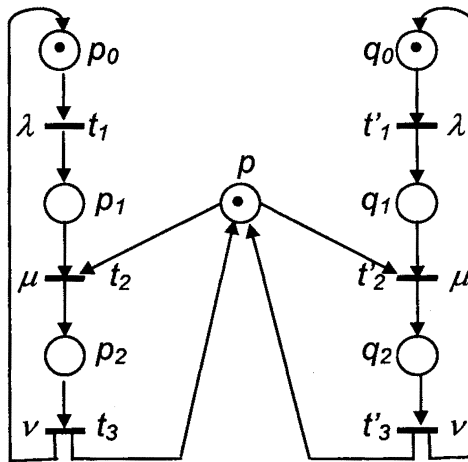


Figure 1. - Le RdPS correspondant à l'exemple 1.

**Étape 0 :**

$$\mathcal{B} = \{(p_0, q_0), (p, p)\}$$

niveau<sub>0</sub> = { $t_1, t'_1$ },  $t_1$  et  $t'_1$  sont susceptibles d'être équivalentes, on relie leur post-ensemble,  $r_0 = \{(p_1, q_1)\}$ .

**Étape 1 :**

$$\mathcal{B} = \{(p_0, q_0), (p, p), (p_1, q_1)\}$$

niveau<sub>1</sub> = { $t_2, t'_2$ },  $t_2$  et  $t'_2$  sont susceptibles d'être équivalentes, on relie leur post-ensemble,  $r_1 = \{(p_2, q_2)\}$ .

**Étape 2 :**

$$\mathcal{B} = \{(p_0, q_0), (p, p), (p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$$



niveau<sub>2</sub> =  $\{t_3, t'_3\}$ ,  $t_3$  et  $t'_3$  sont équivalentes car leur pré-ensemble et post-ensemble sont déjà reliés, on peut donc conclure que  $t_1, t'_1$  sont équivalentes, de même pour  $t_2, t'_2$ , et  $t_3, t'_3$ . Aucune autre extension n'est faite et il n'y a pas d'autre niveau, c'est donc la dernière étape.

$$B = \{(p_0, q_0), (p, p), (p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$$

$$T_1 = \{t_1, t'_1\}, T_2 = \{t_2, t'_2\}, T_3 = \{t_3, t'_3\}.$$

La relation ainsi définie est exploitée entre les places afin de définir les classes de marquages équivalents.

Deux marquages sont équivalents, s'ils sont identiques à une permutation près entre les places équivalentes.

#### 4. GRAPHE DES MARQUAGES SYMBOLIQUES

Les marquages équivalents appartiennent à une même classe et au lieu de les faire apparaître tous sur le graphe, on définit pour chaque classe un représentant, qui seul est destiné à figurer, il est appelé marquage symbolique, et une seule transition représentante de toutes les autres transitions équivalentes est choisie pour figurer dans le graphe symbolique.

Le principe de construction du graphe symbolique est alors de ne développer les franchissements que pour un marquage par classe.

L'idée originale de la notion du franchissement symbolique a été utilisée dans les réseaux réguliers [HAD 87]. Il s'agit de représenter plusieurs arcs issus des marquages d'une classe, par un seul arc issu du représentant de la classe, celui-ci est le premier marquage généré dans la classe.

#### Algorithme de construction du GMS

$M \leftarrow M_0$

GMS :=  $\{M\}$ ; enfiler (M); (on utilise une file des marquages dont les transitions franchissables n'ont pas encore été ajoutées au graphe)

tantque (file non vide)

faire defiler (M);

Pour tout t, telle que  $M[t > M'$

faire si  $M' \in$  GMS et il n'existe pas de Marquage équivalent à  $M'$  dans le GMS

alors GMS := GMS  $\cup$   $\{M'\}$ ; ( $M'$  sera le représentant d'une nouvelle classe)

ajouter  $M[t > M'$ ; enfiler ( $M'$ );

sinon si  $M' \in$  GMS

alors ajouter  $M[t > M'$

alors ajouter  $M[t > M'$

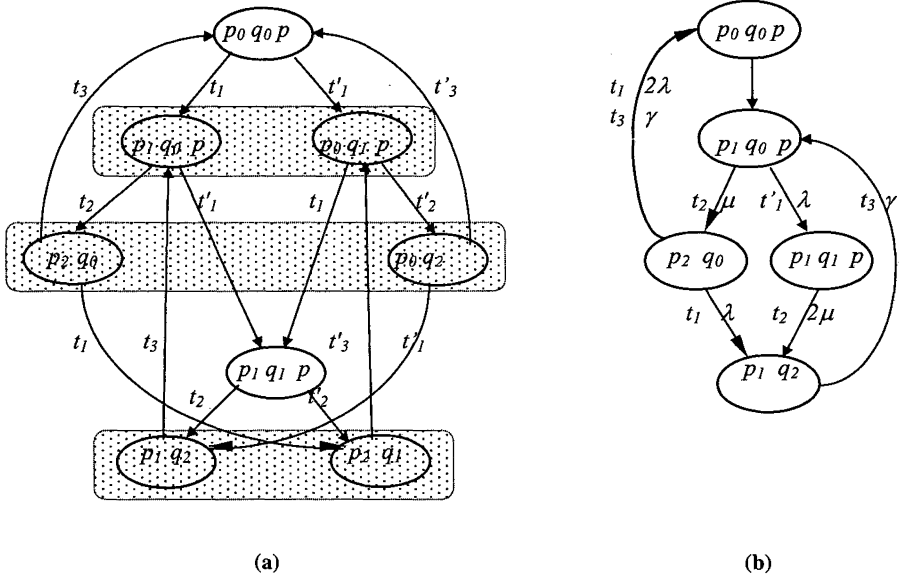
sinon ajouter  $M[t > M'$

alors ajouter  $M[t > M'$

sinon ajouter  $M[t > M''$  ( $M'' \in$  GMS,  $M''$  est un marquage équivalent à  $M'$ )

fsi  
 fsi  
 fait  
 fait  
 fin

Nous donnons le GMA et le GMS du RdPS de l'exemple 1.



Les marquages se trouvant dans un même rectangle sont équivalents.

Figure 2. – (a) Le Graphe des marquages accessibles. (b) Le graphe des marquages symboliques.

### 5. GRAPHE SYMBOLIQUE ET VALIDATION DU RÉSEAU

Dans ce paragraphe, nous énonçons des propositions permettant d'établir une correspondance entre la validation qualitative d'un réseau sur le GMA et le GMS, en nous basant sur les propositions démontrées dans [DUT 92].

On note  $Eq(t)$  l'ensemble des transitions équivalentes à  $t$ .

PROPOSITION 1: *Les marquages équivalents permettent des franchissements équivalents qui aboutissent à des marquages aussi équivalents.*

PROPOSITION 2: À tout franchissement ordinaire correspond un unique franchissement symbolique, et de tout franchissement symbolique, on peut extraire un ensemble de franchissements ordinaires dont les marquages d'origine (resp. d'arrivée) appartiennent au marquage symbolique d'origine (resp. d'arrivée).

PROPOSITION 3: Soit  $\sigma = t_1, \dots, t_{k-1}$  une séquence de franchissements ordinaires telle que:  $M_1[t_1 > M_2[t_2 > \dots M_{k-1}[t_{k-1} > M_k$ , alors il existe une séquence de franchissements symboliques  $\sigma$ , telle que:  $M_1[t_1 > M[t_2 \dots M_{k-1}[t_{k-1} > M_k$ .

PROPOSITION 4: Soit  $\sigma = t_1, \dots, t_{k-1}$  une séquence de franchissements symboliques telle que:  $M[t_1 > M_2[t_2 > \dots M_{k-1}[t_{k-1} > M_k$ , alors:

- 1)  $\forall M'_1 \in M_1, \exists M'_i \in M_i, \exists t'_i \in \text{Eq}(t_i)$  tel que  $M'_1[t'_1 > M'_2[t'_2 > \dots M'_{k-1}[t'_{k-1} > M'_k$ .
- 2)  $\forall M'_k \in M_k, \exists M'_1 \in M_1 \dots M'_{k-1} \in M_{k-1}, \exists t'_1, \dots, t'_{k-1}$  tels que  $M'_1[t'_1 > M'_2[t'_2 > \dots M'_{k-1}[t'_{k-1} > M'_k$ .

PROPOSITION 5: Soit  $[M_0 >$  l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage initial  $M_0$

$[M_0 >$  l'ensemble des marquages symboliques accessibles à partir du marquage symbolique  $M_0$

Alors:  $[M_0 > = [M_0 >$

En effet, cette proposition signifie que pour tout marquage  $M \in [M_0 >$ , il existe un marquage symbolique  $M \in [M_0 >$  tel que  $M \in M$  et inversement pour tout marquage symbolique  $M \in [M_0 >$ .

De ces propositions, on déduit aisément que le graphe symbolique peut être directement utilisé afin de vérifier les propriétés qualitatives d'un réseau telles que la vivacité, la forte connexité, l'existence d'un état d'accueil, etc.

En effet:

- Le GMA contient un état puits ssi le GMS contient un état puits.
- Le GMA est fortement connexe ssi le GMS est fortement connexe.
- Le GMA admet le marquage  $M_0 \in M_0$  comme état d'accueil ssi  $M_0$  est le marquage d'accueil dans le GMS, et tout marquage  $M \in M_0$  est un marquage d'accueil dans le GMA.
- Il existe une séquence de franchissement à partir du marquage  $M$  où figure la transition  $t$  ssi il existe une séquence de franchissement

symbolique à partir du marquage symbolique  $\mathbf{M}$  où figure la transition  $t \in M \in \mathbf{M}$ .

Cette dernière propriété permet de prouver la vivacité, la quasi-vivacité du réseau à l'aide du graphe symbolique.

**6. GRAPHE SYMBOLIQUE ET ÉVALUATION DES PERFORMANCES**

Si le système modélisé présente des symétries sur le plan qualitatif, c'est à dire, qu'il est composé de sous-systèmes qui exécutent les mêmes séquences d'actions dans les mêmes conditions. Les symétries sur le plan quantitatif signifient que des actions sont exécutées, dans ces sous systèmes, pendant des durées suivant la même loi de probabilité. Ce qui revient à:  $\forall t \in T, \forall t' \in \text{Eq}(t), \varphi(t) = \varphi(t')$ .

Le GMS représente alors la chaîne agrégée de la chaîne de Markov isomorphe au graphe des marquages accessibles.

En effet, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne de Markov puisse être agrégée suivant une partition  $\{C_1, \dots, C_n\}$  et que pour tout couple de classes  $(C_i, C_j)$

$$\sum_{M_k \in C_j} q_{lk} = \sum_{M_k \in C_j} q_{l'k} \quad \forall M_l, M_{l'} \in C_i$$

où  $q_{ij}$  = taux de transition du marquage  $M_i$  au marquage  $M_j$ .

Dans notre cas, cette condition est vérifiée car si  $M_1, M_2 \in C_i$ , c-à-d que  $M_i, M_j$  sont deux marquages équivalents, et que  $M_i[t > M_{i'}]$  et  $M_j[t' > M_{j'}]$ ,  $M_{i'}$  et  $M_{j'}$  sont aussi deux marquages équivalents, c'est-à-dire appartenant à une même classe  $C_j$ , alors  $\varphi(t) = \varphi(t')$  ce qui implique donc  $q_{ii'} = q_{jj'}$ . Et d'autre part, si  $M_i \equiv M_j$  et  $t$  et  $t'$  sont aussi équivalentes c'est-à-dire reliées par la relation  $\mathcal{R}$ , alors pour tout  $M_{i'}$  tel que  $M_i[t > M_{i'}] \exists M_{j'}$  tel que  $M_j[> M_{j'}]$  et  $M_{i'} \equiv M_{j'}$  et réciproquement donc

$$\sum_{M_k \in C_j} q_{lk} = \sum_{M_k \in C_j} q_{l'k} \quad \forall M_l, M_{l'} \in C_i.$$

Le taux de transition du marquage symbolique  $\mathbf{M}_i$  vers le marquage symbolique  $\mathbf{M}_j$  est égal à:

$$\sum_{M_k \in C_j} q_{lk} \text{ pour un marquage } M_l \in \mathbf{M}_i.$$

L'obtention des probabilités des marquages symboliques, revient à résoudre le système :

$$\Pi Q = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \Pi_i = 1 \quad n \text{ étant le nombre de marquages symboliques.}$$

$Q$  : la matrice des probabilités de transition de la chaîne agrégée, où  $q_{ij}$  est le taux de passage de la classe  $i$  à la classe  $j$ , tel que :

$$q_{ij} = \sum_{M_k \in C_j} q_{lk} \quad \text{pour un marquage } M_l \in M_i$$

$$q_{ii} = - \sum_{l \neq j} q_{ij}$$

$\Pi$  le vecteur des probabilités stationnaires et  $\Pi_k$  est la probabilité stationnaire de la classe  $C_k$ .

Les classes d'états du GMS sont déduites en respectant les symétries du modèle ; par ailleurs, on peut prouver que les états d'une même classe ont la même probabilité stationnaire :

$$\pi_i = \Pi_k / |C_k|, \quad \forall i \in C_k.$$

## CONCLUSION

En exploitant les symétries structurelles dans un réseau de Petri, et en nous basant sur la théorie de la bisimulation de places afin d'identifier les objets d'un système ayant des comportements similaires, nous avons proposé une méthode de construction d'un graphe des marquages accessibles réduit, graphe symbolique pour les réseaux de Petri stochastiques, où les délais de franchissement des transitions sont des variables aléatoires suivant une loi exponentielle. Ce graphe peut être utilisé pour prouver les propriétés qualitatives d'un réseau, telles que la vivacité, bornitude... En outre, étant donné que le GMS constitue la chaîne agrégée de la chaîne de Markov isomorphe au graphe des marquages accessibles, il permet notamment de calculer certains critères de performances, tels que la probabilité d'un état, le temps moyen de séjour dans une place...

L'avantage apporté par l'outil SSPN est principalement la diminution du coût d'analyse pour des configurations de grande taille . En effet, plusieurs exemples ont été testés, en particulier celui des 5 philosophes, où le graphe des marquages accessibles a généré 152 noeuds et 620 arcs, alors que le graphe des marquages symboliques a donné 24 noeuds et 69 arcs. Il est aussi facile de remarquer que chaque marquage symbolique a une signification au

niveau du comportement du système. Par exemple, il existe un marquage symbolique regroupant les états dans lesquels 4 philosophes pensent, tandis que le 5<sup>ème</sup> décide de manger ; un marquage symbolique regroupant les états dans lesquels 2 philosophes pensent, 1 mange et 2 décident de manger, et l'un des deux est en attente d'une fourchette.

### RÉFÉRENCES

- [AJM 85] M. AJMONE, G. BALBO, A. BOBBIO, G. CHIOLA, G. CONTE et A. CUMANI, *On Petri nets with Stochastic timing*, in *Proc. of the International Workshop on Timed Petri Nets*. Torino, Italie (1985) 80-87.
- [BEL 91] C. AUTANT, Z. BELMESK et P. JORRAND, *Strong Bisimilarity on Nets Revisited*, Extended Abstract in PARLE 91, LNCS.
- [BRA 83] G.W. BRAMS, *Réseaux de Petri: théorie et pratique*, Tomes 1 et 2. Masson Ed. (1983).
- [DUT 92] C. DUTHEILLET, *Symétries dans les Réseaux Colorés, Définition, Analyse et Application à l'Évaluation des Performances*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1992).
- [HAD 87] S. HADDAD, *Une Catégorie Régulière de Réseaux de Petri de Haut Niveau: définition, Propriétés et Réductions*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1987).
- [JEN 84] P. HUBER, A.M. JENSEN, L.O. JEPSEN et K.JENSEN, *Towards Reachability Trees for High-Level Petri Nets*. *Adv. in Petri Nets* **84** (1984) 215-233.
- [JEN 86] P. HUBER, A.M. JENSEN, L.O. JEPSEN et K.JENSEN, *Reachability Trees for High-Level Petri Nets*. *Theoret. Comput. Sci.* **45** (1986) 261-292.
- [KEM 60] J.G. KEMENY et J.L. SNELL, *Finite Markov Chains*, edited by V. Nostrand. Princeton, NJ (1960).
- [MOL 81] M.K. MOLLOY, *On the Integration of Delay and Throughput Measures in Distributed Processing Models*. Ph.D. Dissertation, University of California, Los Angeles (1981).
- [ROZ 91] K. JENSEN et G. ROZENBERG, *High-level Petri Nets. Theory and Application*. Springer-Verlag (1991).