RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

S. BOLINTINÉANU
M. EL MAGHRI

Pénalisation dans l'optimisation sur l'ensemble faiblement efficient

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 31, nº 3 (1997), p. 295-310
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1997__31_3_295_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 31, n° 3, 1997, pp. 295-310)

PÉNALISATION DANS L'OPTIMISATION SUR L'ENSEMBLE FAIBLEMENT EFFICIENT (*)

par S. BOLINTINÉANU et M. EL MAGHRI (1) (2)

Communiqué par Jean-Pierre CROUZEIX

Résumé. – *Le problème sous considération est un problème de minimisation d'une fonction scalaire sur l'ensemble faiblement efficient, dit aussi Pareto faible, d'un problème de minimisation multicritère. Ce problème d'analyse post-Pareto a plusieurs applications importantes en pratique. Sa difficulté essentielle est due à la forme implicite de l'ensemble faiblement efficient et au fait que même dans le cas linéaire, le problème n'est pas convexe. Mathématiquement, il est classé parmi les problèmes difficiles de l'optimisation globale. Pour le résoudre, nous utilisons la méthode de pénalité. Nous proposons un algorithme de pénalisation exacte fournissant une solution optimale en un nombre fini d'itérations, dans le cas concave et le cas particulier « Tout Linéaire ».*

Mots clés : Optimisation multicritère, méthodes de pénalité, dualité, minimisation concave sur un polyèdre, programmation linéaire, programmation bilinéaire.

Abstract. – *The paper deals with the problem of minimizing a scalar valued function over the weakly efficient (Pareto) set associated to a multicriteria minimization problem. This problem of post-Pareto analysis has several practical applications. Its main difficulty is due to the implicit form of the weakly efficient set and to the fact that, even in the linear case, the problem is not convex. Mathematically this problem is classified as a difficult global optimization problem. To solve it we use a penalty method. For the particular case of a linear vector problem and concave scalar objective, and also for the special case of linear functional, we propose an exact penalty algorithm which finds an optimal solution in a finite number of iterations.*

Keywords: Multicriteria optimization, penalty methods, duality, concave minimization over a polyhedron, linear programming, bilinear programming.

1. INTRODUCTION ET DÉFINITION DU PROBLÈME

L'optimisation des fonctions vectorielles, dite multicritère, vectorielle ou multiobjectif, a été, depuis les premiers résultats intéressants publiés par Kuhn et Tucker en 1951 relatifs aux conditions d'optimalité des fonctions vectorielles, l'objet de recherches qui a préoccupé un grand nombre d'auteurs.

(*) Reçu en février 1995.

(1) Université de Perpignan, Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Optimisation, 52, av. de Villeneuve, 66860 Perpignan.

(2) Les auteurs sont très reconnaissants au Professeur J.-P. Crouzeix et aux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires et suggestions pertinentes.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/97/03/$ 7.00

Depuis, les travaux dans ce sens ont connu une progression remarquable théoriquement et pratiquement. Son utilité est d'une grande importance dans les domaines de décision où le choix d'une meilleure solution est indispensable. Aujourd'hui de nombreux ouvrages ont été consacrés à l'optimisation multicritère. En dimension finie, on peut citer [SAW] qui rassemble théorie et applications. Dans [LUC], une étude théorique bien approfondie en dimension infinie est exposée. Cependant, l'ensemble efficient (ou faiblement) est en génral infini. Ainsi, l'idée d'optimiser une fonctionnelle sur cet ensemble, reste à nos jours une solution intéressante et pratique. Cette idée a été initialement proposée par [PHI] suggérant un algorithme pour optimiser une forme linéaire sur l'ensemble efficient. Ensuite, [DES] avait développé une méthode pour minimiser chacun des critères d'un programme de maximisation vectorielle linéaire, sur son ensemble efficient. Le même cas a été considéré par [ISE]. Dans [BEN 1] à [BEN 8], plusieurs méthodes et algorithmes résolvant le problème dans différents cas particuliers, notamment le cas « Tout Linéaire », sont proposés. Lorsque la fonctionnelle est quasi-concave, un algorithme convergeant vers une solution optimale approchée (à un seuil de précision donné *a priori*) en un nombre fini d'itérations, et un algorithme exact dans le cas particulier « Tout Linéaire », sont proposés dans [Bol 1]. D'autres cas non linéaires ont été également étudiés dans [BOL 2] et [BOL 3] : des conditions d'optimalités et algorithmes pour minimiser sur l'ensemble faiblement ou proprement efficient, ont été obtenus. Le problème a été aussi étudié par [DAU] dans un cas non linéaire, par [MUU] dans le cas « Tout Linéaire », et par d'autres utilisant des méthodes différentes.

Les difficultés pour aborder le problème sont dues à la forme implicite de l'ensemble efficient (ou faiblement) et au fait que même dans le cas linéaire, le problème n'est pas convexe. Pour trouver une solution optimale au problème, nous utilisons la méthode de pénalité qui sous une autre forme, a fourni plus récemment les techniques de viscosité intensivement utilisées dans divers domaines. Le principe de cette méthode comme nous le savons, consiste à ramener le problème à la résolution d'une suite de problèmes appelés problèmes pénalisés, dont les contraintes sont simples. Les théorèmes consacrés à la convergence de ces méthodes, montrent que sous certaines hypothèses, toute valeur d'adhérence de la suite des solutions optimales des problèmes pénalisés, est une solution optimale du problème. Dans la section 3, nous étudions une pénalisation du problème en donnant quelques résultats dans un cas général. La section 4 est consacrée au cas intéressant où la fonctionnelle est concave et le problème multicritère est linéaire. Nous montrerons dans ce cas que la pénalisation est exacte et donnons un algorithme basé sur cette méthode offrant en un nombre fini d'itérations, une solution optimale exacte au problème. Enfin, la section 5 traite le cas particulier « Tout Linéaire » où un algorithme légèrement différent du précédent est également proposé.

Soit donc S un compact non vide d'un espace métrique X. Soit F une fonction vectorielle s.c.i. définie par:

$$\begin{aligned} F: \quad & X \to \mathbb{R}^r \\ & x \mapsto F(x) = F_1(x), \ldots, F_r(x)) \end{aligned}$$

On considère le problème d'optimisation multicritère associé à F:

$$(\mathcal{POM}) \qquad \min_{x \in S} \quad F(x)$$

Le problème $(\mathcal{POM})$ « minimise » simultanément les r fonctions objectifs (critères) $F_i : x \mapsto F_i(x)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ où $r \geq 2$ est un entier, dans le sens suivant:

DÉFINITION 1.1: *$\hat{x} \in S$ est une solution de Pareto au sens faible (solution faiblement efficiente) si et seulement si: $\nexists x \in S$ tel que $F(x) < F(\hat{x})$.* (3)

L'ensemble de toutes les solutions faiblement efficientes de $(\mathcal{POM})$, dit l'ensemble faiblement efficient, est noté

$$E = \{\hat{x} \in S : \nexists x \in S,\ F(x) < F(\hat{x})\}$$

Etant donné une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ s.c.i., on se propose de résoudre par une méthode de pénalité le problème de minimisation scalaire:

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in E} \quad f(x)$$

Sous ces hypothèses, nous donnons tout d'abord dans la section suivante, les théorèmes qui montrent l'existence de telles solutions optimales.

2. EXISTENCE DES SOLUTIONS

Les deux théorèmes suivants montrent que le problème $(\mathcal{P})$ admet bien au moins une solution optimale sous les faibles hypothèses sur F et f.

(3) Pour $y, y' \in \mathbb{R}^l$ où l est un entier ≥ 2, $y < y'$ (resp. $y \leqq y'$) signifie $y_i < y'_i$ (resp. $y_i \leq y'_i$) pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$.

THÉORÈME 2.1 : *Avec S compact et F s.c.i., $E \neq \varnothing$.*

Preuve : Considérons pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^r \backslash \{0\}$, l'ensemble

$$E_\lambda = \arg\min_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle$$

où le symbole $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire. Le résultat de scalarisation suivant caractérise l'ensemble E faiblement efficient :

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^r \backslash \{0\}} E_\lambda \subset E \tag{1}$$

En effet, soit $\hat{x} \notin E$, nous avons à montrer que $\hat{x} \notin \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^r \backslash \{0\}} E_\lambda$. Si $\hat{x} \notin S$ alors c'est évident. Supposons donc que $\hat{x} \in S \backslash E$ *i.e.* $\exists x \in S$: $F(x) < F(\hat{x})$. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^r \backslash \{0\}$,

$$\langle \lambda, F(\hat{x}) \rangle > \langle \lambda, F(x) \rangle.$$

D'où $\hat{x} \notin \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^r \backslash \{0\}} E_\lambda$, et le résultat (1) est démontré.

Or S compact et F s.c.i. impliquent par le théorème de Weierstrass que $E_\lambda \neq \varnothing$. Ainsi, il est clair par (1) que $E \neq \varnothing$. $\square$

THÉORÈME 2.2 : *Avec S compact, F et f s.c.i., le problème $(\mathcal{P})$ a au moins une solution optimale.*

Preuve : Montrons premièrement que E est fermé. Considérons

$$z = \lim_k z^{(k)} \qquad \text{avec} \quad z^{(k)} \in E \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Or $E \subset S$ qui est fermé. Donc $z \in S$. Supposons $z \notin E$. Alors il existerait $z' \in S$ tel que $F(z') < F(z)$. La semi-continuité inférieure de F impliquerait que $F(z') < F(z^{(k)})$ pour k suffisamment large. Ce qui contredirait $z^{(k)} \in E$. Ainsi E est fermé dans S compact. Donc E est compact. Comme f est s.c.i., le théorème est donc une conséquence du théorème de Weierstrass. $\square$

Dans la section suivante, nous étudions une pénalisation du problème $(\mathcal{P})$ dans un cas très général.

3. PÉNALISATION DU PROBLÈME

Pour $\mu > 0$, soit

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \min_{x \in S} \; \{f(x) - \mu h(x)\}$$

un problème pénalisé de $(\mathcal{P})$ où la fonction de pénalisation $h : X \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$h(x) = \min_{(x',\, t)} \{t : F(x') - te \leqq F(x),\ x' \in S,\ t \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

avec $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^r$.

La fonction h diffère légèrement de la fonction de pénalisation qui a fait l'objet d'une autre étude d'analyse post-Pareto dans [BOL 3]. Dans le lemme qui suit, on montre qu'avec la formule (2), on définit bien tout d'abord une fonction sur l'espace métrique X.

LEMME 3.1 : *Avec S compact et F s.c.i., h est bien définie sur X.*

Preuve : Avec F s.c.i., la fonction $x' \mapsto \max_{i=1\ldots r} (F_i(x') - F_i(x))$ est s.c.i. sur S compact. Par application du théorème de Weierstrass elle atteint donc son minimum sur S, *i.e.* $\exists x'_x \in S$:

$$\max_{i=1\ldots r} (F_i(x'_x) - F_i(x)) \leq \max_{i=1\ldots r} (F_i(x') - F_i(x)) \qquad \forall\, x' \in S.$$

Notons par m_x ce minimum, alors pour tout (x', t) solution admissible pour (2), il est facile de vérifier que $m_x \leq t$. D'autre part, il n'est pas difficile de voir que (x'_x, m_x) est admissible pour (2). D'où $h(x) = m_x$ et le lemme est ainsi prouvé. □

Le lemme suivant donne une description de l'ensemble faiblement efficient E et montre que h a bien les premières propriétés d'une fonction de pénalisation pour le problème $(\mathcal{P})$.

LEMME 3.2 : *Les assertions suivantes sont vraies :*

1. $\forall\, x \in S,\ h(x) \leq 0$.
2. $E = \{x \in S : h(x) = 0\}$.

Preuve : 1. Soit $x \in S$. Comme $F(x) - 0 \times e \leqq F(x)$, alors $(x, 0)$ est une solution admissible pour (2). D'où $h(x) \leq 0$.

2. Soit $x \in E$, alors $x \in S$. Supposons que $h(x) \neq 0$. Alors d'après l'assertion 1, $h(x) < 0$. Il existerait alors une solution admissible (x', t) pour (2) tel que $t < 0$, qui impliquerait que $F(x') - F(x) \leqq te < 0$, qui contredirait $x \in E$. Ainsi $h(x) = 0$. Inversement, soit $x \in S$ tel que $h(x) = 0$. Supposons $x \notin E$, alors $F(x') - F(x) < 0$ pour un certain $x' \in S$. On pourrait donc trouver $t < 0$ tel que $F(x') - F(x) \leqq te < 0$ qui d'après (2), contredirait $h(x) = 0$. D'où $x \in E$. □

On considère maintenant la fonction $\psi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ définie par:

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^r) \quad \psi(\varepsilon) = \min_{(x',\, t)} \left\{ t : F(x') - te \leqq \varepsilon,\, x' \in S,\, t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

Evidemment

$$h = \psi \circ F. \tag{4}$$

Le même raisonnement que pour h, montre qu'avec les hypothèses du lemme 3.1, ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^r$. Ainsi pour obtenir plusieurs informations sur la fonction h, il est plus simple de trouver d'abord les propriétés de la fonction ψ.

LEMME 3.3: *Avec S compact et F s.c.i., ψ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^r$.*

Preuve: En posant $\alpha = \max\limits_{i=1\ldots r} (\varepsilon - \varepsilon')_i$ et $\alpha' = \max\limits_{i=1\ldots r} (\varepsilon' - \varepsilon)_i$, où ε, $\varepsilon' \in \mathbb{R}^r$, et en utilisant la définition de ψ, on obtient facilement $\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon') + \alpha'$ et $\psi(\varepsilon') \leq \psi(\varepsilon) + \alpha$. D'où

$$|\psi(\varepsilon) - \psi(\varepsilon')| \leq \max\left(|\alpha|, |\alpha'|\right) = \max_{i=1\ldots r} \left|(\varepsilon - \varepsilon')_i\right|.$$

D'où le lemme. □

Utilisant (4) et le lemme 3.3, il est immédiat que

COROLLAIRE 3.1: *Avec S compact et F continue, h est continue.*

On considère maintenant l'hypothèse suivante:

(H) S compact dans X, F et f continues.

Sous cette hypothèse et par application du corollaire 3.1, pour chaque $\mu > 0$, il existe alors au moins une solution optimale x_μ pour le problème pénalisé $(\mathcal{P}_\mu)$. Considérons une suite $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et positive telle que $\mu^{(k)} \nearrow +\infty$ et notons $x^{(k)} = x_{\mu^{(k)}}$. Le théorème suivant inspiré de [BOL 3] par son utilité dans la suite, diffère légèrement du théorème standard de pénalisation (*cf.* [LUE, pp. 366-369]), car les problèmes pénalisés considérés ont leurs contraintes données par le compact S permettant des résultats plus forts.

THÉORÈME 3.1: *Sous l'hypothèse (H),*

1. *la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence, et toute valeur d'adhérence est solution optimale de $(\mathcal{P})$,*

2. *les suites $(f(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(h(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ sont croissantes. De plus:* $\lim_k h(x^{(k)}) = 0$.

3. $\lim_k f(x^{(k)}) = f^*$ *et* $\lim_k \mu^{(k)} h(x^{(k)}) = 0$, f^* *étant la valeur optimale de* $(\mathcal{P})$,

4. *si* x^* *est solution optimale unique de* $(\mathcal{P})$, *alors* $\lim_k x^{(k)} = x^*$.

Preuve : 1. La suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence car elle appartient à S compact. Par la définition de $x^{(k)}$ et compte tenu du lemme 3.2 et du fait que la suite $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est choisie strictement croissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x^{(k)}) - \mu^{(k)} h(x^{(k)}) \le f(x^{(k+1)}) - \mu^{(k)} h\,(x^{(k+1)}), \tag{5}$$

$$f(x^{(k+1)}) - \mu^{(k)} h(x^{(k+1)}) \le f(x^{(k+1)}) - \mu^{(k+1)} h\,(x^{(k+1)}) \tag{6}$$

et en notant par x^* l'une des solutions optimales de $(\mathcal{P})$ et par f^* sa valeur optimale, on a aussi :

$$f(x^{(k)}) \le f(x^{(k)}) - \mu^{(k)} h(x^{(k)}) \le f(x^*) - \mu^{(k)} h(x^*) = f(x^*) = f^*. \tag{7}$$

Soient $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x^{(j)})_{j\in J\subset\mathbb{N}}$ une sous suite convergeante vers $\bar{x}$. Alors la continuité de f entraîne par passage à la limite dans l'inégalité (7) que

$$f(\bar{x}) \le f^*.$$

Pour montrer que $\bar{x}$ est une solution optimale de $(\mathcal{P})$, il suffit donc de montrer que $\bar{x} \in E$. Or S étant fermé, $\bar{x} \in S$. Ce qui revient à montrer d'après le lemme 3.2 que $h(\bar{x}) = 0$. Remarquons d'abord d'après les inégalités (5), (6) et (7) que la suite $(f(x^{(j)}) - \mu^{(j)} h(x^{(j)}))_{j\in J}$ est convergente. Ce qui permet de voir avec le fait que $(f(x^{(j)}))_{j\in J}$ est elle même convergente, que la suite $(\mu^{(j)} h(x^{(j)}))_{j\in J}$ converge. La continuité de h entraîne que $\lim_j h(x^{(j)}) = h(\bar{x})$. Supposons que $h(\bar{x}) \neq 0$. Alors $\lim_j \mu^{(j)} h(x^{(j)}) = -\infty$ est une contradiction. Donc $h(\bar{x}) = 0$.

2. Par la définition de $x^{(k+1)}$, on a :

$$f(x^{(k+1)}) - \mu^{(k+1)} h(x^{(k+1)}) \le f(x^{(k)}) - \mu^{(k+1)} h(x^{(k)}). \tag{8}$$

D'une part dans l'inégalité (5), il n'est pas difficile de voir que si la suite $(h(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $(f(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. D'aure part, en additionant les inégalités (5) et (8), on obtient :

$$(\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}(h(x^{(k+1)}) - h(x^{(k)})) \ge 0.$$

Comme $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a facilement le résultat. Pour montrer maintenant que $\lim_k h(x^{(k)}) = 0$, rappelons que $(h(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0, or croissante, donc convergente. Soit $\tilde{h}$ sa limite et considérons une valeur d'adhérence $\bar{x}$ de $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui d'après 1. est une solution optimale de $(\mathcal{P})$. La continuité de h implique donc que $\tilde{h} = h(\bar{x})$ et ainsi $\tilde{h} = 0$.

3. D'après (7) la suite $f(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il s'en suit d'après les assertions 1. et 2. qu'elle converge vers f^*. Ainsi, en utilisant de nouveau (7), on obtient $\lim_k \mu^{(k)} h(x^{(k)}) = 0$.

4. L'assertion 4. est une conséquence immédiate de 1. et du fait que dans un espace métrique compact, une suite converge vers une limite si et seulement si toutes les sous suites *convergentes*, convergent vers cette même limite. Ce qui complète la preuve du théorème. □

Dans la suite, on désignera par

$$\mathcal{A}_\mu = \arg\min_{x\in S} (f - \mu h)(x) \tag{9}$$

l'ensemble des solutions optimales globales du problème pénalisé $(\mathcal{P}_\mu)$, et par

$$\mathcal{A} = \arg\min_{x\in E} f(x) \tag{10}$$

l'ensemble des solutions optimales globales de $(\mathcal{P})$. Rappelons que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (*cf.* théorème 2.2) et que pour tout $\mu > 0$, $\mathcal{A}_\mu \neq \emptyset$. Ce qui nous permet d'affirmer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.2: *Les assertions suivantes ont lieu:*

1. *Soit* $x_\mu \in \mathcal{A}_\mu$. *Si* $h(x_\mu) = 0$, *alors* $x_\mu \in \mathcal{A}$.

2. *S'il existe* $\mu_0 > 0$ *tel que* $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\mu_0} \neq \emptyset$, *alors* $\forall\, \mu > \mu_0, \mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$.

Preuve: 1. Par la définition de x_μ et compte tenu du lemme 3.2, on a pour tout $x \in E \subset S$:

$$f(x_\mu) = f(x_\mu) - \mu h(x_\mu) \leq f(x) - \mu h(x) = f(x).$$

D'où l'assertion 1.

2. Soit $x_{\mu_0} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\mu_0}$, et pour $\mu > \mu_0$, soit $x_\mu \in \mathcal{A}_\mu$. Si on note par f^* la valeur optimale de $(\mathcal{P})$, alors par les définitions de x_{μ_0} et de x_μ et compte

tenu du lemme 3.2, on a :

$$\begin{aligned} f^* = f(x_{\mu_0}) &= f(x_{\mu_0}) - \mu_0 h(x_{\mu_0}) \\ &\leq f(x_\mu) - \mu_0 h(x_\mu) \leq f(x_\mu) - \mu h(x_\mu) \\ &\leq f(x_{\mu_0}) - \mu h(x_{\mu_0}) = f^* \end{aligned}$$

qui impliquent que

$$(\mu - \mu_0) h(x_\mu) = 0.$$

Comme $\mu \neq \mu_0$, alors $h(x_\mu) = 0$. On conclut d'après 1. que $x_\mu \in \mathcal{A}$.

Pour démontrer l'inclusion inverse, soit $x^* \in \mathcal{A}$ et considérons $x_\mu \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\mu > \mu_0$. Alors d'après l'autre inclusion $x_\mu \in \mathcal{A}$. Ainsi

$$f(x^*) - \mu h(x^*) = f(x^*) = f(x_\mu) = f(x_\mu) - \mu\, h(x_\mu)$$

qui permet de voir que $x^* \in \mathcal{A}_\mu$. D'où l'égalité. $\square$

Dans la suite, nous nous intéressons à une application importante des théorèmes 3.1 et 3.2. Il s'agit d'un cas intéressant où la pénalisation s'avère exacte.

4. PÉNALISATION EXACTE

Désormais, on se placera dans $X = \mathbb{R}^n$. Nous nous intéressons au problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in E} \quad f(x)$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est concave continue, E est l'ensemble faiblement efficient du problème multicritère $(\mathcal{POM})$ considéré dorénavant linéaire :

$$(\mathcal{POM}) \qquad \min_{x \in S} \quad F(x) := Cx$$

où $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ est la matrice des critères, S un polyèdre compact (*i.e.* polytope). Notons par $V(S)$ l'ensemble des sommets de S.

Quitte à changer la dimension de l'espace vectoriel X en introduisant des variables supplémentaires dans le programme vectoriel linéaire $(\mathcal{POM})$, on peut toujours mettre le polyèdre S sous la forme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \; : Ax \leqq b, \; x \geqq 0\}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice, $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur colonne.

La formule (2) montre bien que la fonction de pénalisation h, est définie dans ce cas comme étant la valeur optimale du programme linéaire

$$(\mathcal{PL}_x) \qquad \min t \quad (= h(x))$$
$$\begin{cases} Cx' - te \leqq Cx \\ Ax' \leqq b \\ x' \leqq 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 4.1 : L'hypothèse du lemme 3.1 étant ici vérifiée, ce problème admet donc au moins une solution optimale, et en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x)$ peut donc être calculée par la programmation linéaire.

Une autre propriété intéressante de cette fonction est donnée dans le lemme suivant.

LEMME 4.1 : *h est convexe sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve : Soient $x, z \in \mathbb{R}^n$. Par la définition de h, il existe $x', z' \in S$ tels que : $Cx' - h(x)\, e \leqq Cx$ et $Cz' - h(z)\, e \leqq Cz$. Comme S est convexe, on en déduit facilement que $h(x + (1 - \alpha)z) \leq \alpha h(x) + (1 - \alpha)h(z)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$. D'où la convexité de h. □

Utilisant ce lemme, il n'est pas difficile de voir que la fonction $f - \mu h$ est concave. D'après la théorie de la minimisation concave sur un polytope, le minimum est atteint en un sommet (*cf.* [MAJ], [TUY], [ZWA], [FAL], ou [ROS], ...). Par conséquent, pour chaque $\mu > 0$, le problème pénalisé

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \min_{x \in S} \quad \{f(x) - \mu h(x)\}$$

est un problème de minimisation concave sur un polytope admettant ainsi au moins une solution optimale $x_\mu \in V(S)$.

Le théorème suivant permet de voir qu'à partir d'un certain rang, les problèmes $(\mathcal{P}_\mu)$ et $(\mathcal{P})$ sont équivalents. C'est-à-dire que la pénalisation est exacte.

THÉORÈME 4.1 : *Sous les hypothèses de cette section,*

1. *le paramètre*

$$\mu^* = \inf \{\mu > 0 \, : \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_\mu \neq \emptyset\}$$

existe,

2. *pour tout $\mu > \mu^*$, les problèmes $(\mathcal{P}_\mu)$ et $(\mathcal{P})$ sont équivalents,*

3. *Soient*

$$M = \max\{h(x) : x \in V(S)\backslash(E \cap V(S))\},$$

$$m^* = \min f(S) \qquad et \qquad M^* = \max f(S),$$

alors $\frac{m^*-M^*}{M} \geq \mu^*$.

Preuve : 1. On considère d'après 1. du théorème 3.1, une sous suite $(x^{(j)})_{j\in J\subset\mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{x} \in \mathcal{A}$. Vu la remarque précédente, on peut supposer que cette sous suite est dans $V(S)$ qui est un ensemble fini. Ce qui entraîne immédiatement qu'il existe $j_0 \in J$ tel que pour tout $j \geq j_0$, $x^{(j)} = \bar{x}$. Ce qui permet de voir qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_\mu \neq \emptyset$. D'où l'existence du paramètre μ^*.

2. Soit $\mu > \mu^*$ et notons $\mathcal{M} = \{\mu > 0 : \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_\mu \neq \emptyset\}$, alors μ n'est pas un minorant pour $\mathcal{M}$, ce qui montre qu'il existe $\mu' < \mu$ tel que $\mu' \in \mathcal{M}$. L'équivalence entre $(\mathcal{P}_\mu)$ et $(\mathcal{P})$ n'est ensuite qu'une conséquence immédiate de l'assertion 2. du théorème 3.2.

3. Notons $\mu_1 = \frac{m^*-M^*}{M}$. Il est clair qu'étant donné que S est compact et que f est continue, le couple (m^*, M^*) existe. D'aure part, on sait que $V(S) \cap E \neq \emptyset$ (*voir* formule (1) de scalarisation), et on peut aussi supposer que $V(S) \neq E$ (sinon le problème $(\mathcal{P})$ sera trivial), donc M existe. De plus, $m^* - M^* < 0$ et compte tenu du lemme 3.2, $M < 0$. Ainsi μ_1 existe et $\mu_1 > 0$. Par ailleurs, soit $x_\mu \in V(S) \cap \mathcal{A}_\mu$ où $\mu > \mu_1$. Par la définition de x_μ, on a pour tout $x \in S \supset E$:

$$f(x_\mu) - \mu h(x_\mu) \leq f(x) - \mu h(x).$$

En particulier pour $x^* \in E$ et compte tenu de l'assertion 2. du lemme 3.2, on a aussi :

$$f(x_\mu) - \mu h(x_\mu) \leq f(x^*) \leq M^*. \tag{11}$$

Si on suppose par l'absurde que $x_\mu \notin E$, on aurait par le lemme 3.2 que $h(x_\mu) < 0$. Donc pour $\mu > \mu_1$, l'inégalité (11) entraînerait que

$$m^* - M^* \leq f(x_\mu) - M^* \leq \mu h(x_\mu) < \mu_1 h(x_\mu).$$

En divisant par μ_1, on obtiendrait que $M < h(x_\mu)$ qui contredirait la définition de M. Donc $x_\mu \in E$, et l'assertion 2. du lemme 3.2 ainsi que l'assertion 1. du théorème 3.2 montrent bien que $x_\mu \in \mathcal{A}$. Ainsi, pour tout

$\mu > \mu_1$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_\mu \neq \emptyset$. D'où $\mu_1 \geq \mu^*$. Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

L'assertion 3. du théorème 4.1 de pénalisation exacte, donne une estimation du meilleur paramètre de pénalisation, qui permet d'apprécier le conditionnement du problème.

L'algorithme de pénalisation exacte que nous proposons pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ dans le cas concave, est donc conforme à la procédure suivante :

Algorithme

- **Initialisation :**
  - Définir une suite positive strictement croissante $\mu^{(k)} \nearrow +\infty$, et poser $k = 0$.
- **Itération** (k) :
  - Trouver $x^{(k)} \in \operatorname{argmin}(f - \mu^{(k)} h)(S)$.
  - Si $h(x^{(k)}) = 0$ alors STOP : $x^{(k)}$ est une solution optimale de $(\mathcal{P})$.
    Sinon incrémenter k et retourner à l'itération (k).

Remarque 4.2 : La condition d'arrêt $h(x^{(k)}) = 0$, n'est autre qu'une application de l'assertion 1. du théorème 3.2. La remarque 4.1 permet de rappeler que $h(x)$ est calculable par programmation linéaire de $(\mathcal{PL}_x)$.

Remarque 4.3 : Trouver $x^{(k)} \in \operatorname{argmin}(f - \mu^{(k)} h)(S)$, c'est trouver une solution optimale du problème pénalisé $(\mathcal{P}_{\mu^{(k)}})$ qui, comme nous l'avons dit, est un problème de minimisation d'une fonction concave continue sur un polytope. Ce problème fondamental d'optimisation globale, a été intensivement étudié : plusieurs méthodes et algorithmes sont disponibles, y compris ceux de [MAJ], [TUY], [ZWA], [FAL], [BEN 9], [CAB], [HOR], [ROS], ou [TAH]... Un bon nombre de ces algorithmes sont finis et fournissent des solutions optimales exactes.

La convergence de l'algorithme de pénalisation exacte pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ ne dépend donc d'après le théorème 4.1, que de la méthode utilisée pour résoudre chaque problème pénalisé $(\mathcal{P}_{\mu^{(k)}})$ à l'itération k. Pour conclure, nous constatons donc que l'algorithme est basé sur trois méthodes fondamentales dans l'optimisation :

- la méthode de pénalité,
- la programmation linéaire,
- la programmation concave,

et fournit sous les hypothèses considérées dans cette section, après un nombre fini d'itérations, une solution optimale exacte.

Nous traitons dans la section suivante, un cas particulier important dans l'optimisation multicritère.

5. LE CAS « TOUT LINÉAIRE »

On considère dans cette dernière section, le cas particulier important où la fonction f est linéaire :

$$f(x) = \langle d,\, x\rangle$$

avec $d \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné. Le problème sous considération s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in E} \quad \langle d,\, x\rangle$$

où E est l'ensemble faiblement efficient du programme vectoriel linéaire $(\mathcal{POM})$ défini dans la section 4.

Le cas « Tout Linéaire » décrit ci-dessus, est évidemment un cas particulier de la section 4. Par conséquent, il peut être résolu par l'algorithme précédent. Cependant, le problème pénalisé $(\mathcal{P}_\mu)$ grâce à la linéarité de la fonction f, peut se ramener à un programme bilinéaire. En effet, soit

$$D = \{(\lambda,\, \gamma) \in \mathbb{R}^r_+ \times \mathbb{R}^m_+ : \langle \lambda,\, e\rangle = 1,\ C^T\lambda + A^T\gamma \geqq 0\} \tag{12}$$

le polyèdre qui définit les contraintes du dual

$$(\mathcal{DL}_x) \qquad \max \quad \{\langle -C^T\lambda,\, x\rangle + \langle -\gamma,\, b\rangle\}$$
$$\begin{cases} \langle \lambda,\, e\rangle = 1 \\ C^T\lambda + A^T\gamma \geqq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^r_+, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^m_+ \end{cases}$$

du programme linéaire $(\mathcal{PL}_x)$ défini dans la section 4. D'après la théorie de la programmation linéaire, comme $h(x)$ est la valeur optimale du programme linéaire $(\mathcal{PL}_x)$, elle l'est aussi pour son dual *i.e.*

$$h(x) = \max_{(\lambda,\gamma)\in D} \{\langle -C^T\lambda,\, x\rangle + \langle -\gamma,\, b\rangle\}.$$

Pour $\mu > 0$, il est clair que

$$-\mu h(x) = \min_{(\lambda,\gamma)\in D} \{\langle \mu C^T\lambda,\, x\rangle + \langle \mu\gamma,\, b\rangle\} \tag{13}$$

En remplaçant $-\mu h(x)$ par cette formule, le problème pénalisé $(\mathcal{P}_\mu)$ se met alors sous la forme

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \min_{x \in S} \{\langle d,\, x\rangle + \min_{(\lambda,\,\gamma) \in D} \{\langle \mu C^T \lambda,\, x\rangle + \langle \mu\gamma,\, b\rangle\}\}$$

équivalente aussi à

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \min \quad \{\langle d + \mu C^T \lambda,\, x\rangle + \langle \mu\gamma,\, b\rangle\}$$
$$\begin{cases} (\lambda,\, \gamma) \in D \\ x \in S \end{cases}$$

Utilisant la forme explicite de S et la formule (12) de D, on obtient finalement la forme bilinéaire que prend le problème pénalisé

$$(\mathcal{P}_\mu) \qquad \min \quad \{\langle d + \mu C^T \lambda,\, x\rangle + \langle \mu\gamma,\, b\rangle\}$$
$$\begin{cases} \langle \lambda,\, e\rangle = 1 \\ C^T \lambda + A^T \gamma \geqq 0 \\ Ax \leqq b \\ x \in \mathbb{R}^n_+, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^r_+, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^m_+. \end{cases}$$

En vertu du théorème 4.1, pour μ assez grand, le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent à $(\mathcal{P}_\mu)$. Ainsi, dans le cas « Tout Linéaire », l'algorithme de pénalisation exacte peut utiliser seulement la programmation bilinéaire sans calculer directement $h(x)$, et obtenir une solution optimale après un nombre fini d'itérations.

Algorithme

- **Initialisation :**
  - Définir une suite positive strictement croissante $\mu^{(k)} \nearrow +\infty$, et poser $k = 0$.
- **Itération** (k) :
  - Résoudre le programme bilinéaire $(\mathcal{P}_{\mu^{(k)}})$ et trouver une solution optimale $(x^{(k)},\, \lambda^{(k)},\, \gamma^{(k)})$.
  - Si $\langle C^T \lambda^{(k)},\, x^{(k)}\rangle + \langle \gamma^{(k)},\, b\rangle = 0$ alors STOP : $x^{(k)}$ est une solution optimale de $(\mathcal{P})$. Sinon incrémenter k et retourner à l'itération (k).

Remarque 5.1 : La condition d'arrêt formulée explicitement par

$$\langle C^T \lambda^{(k)},\, x^{(k)}\rangle + \langle \gamma^{(k)},\, b\rangle = 0,$$

n'est autre que la condition $h(x^{(k)}) = 0$ (*cf.* remarque 4.2). En effet, d'après la formule (13),

$$-\mu^{(k)} h(x^{(k)}) = \langle \mu^{(k)} C^T \lambda^{(k)},\, x^{(k)} \rangle + \langle \mu^{(k)} \gamma^{(k)},\, b \rangle.$$

En simplifiant par $\mu^{(k)}$, on a le résultat.

Remarque 5.2: Pour résoudre le programme bilinéaire $(\mathcal{P}_{\mu^{(k)}})$, plusieurs algorithmes sont disponibles, y compris ceux de [GAL], [KON] et autres utilisant des méthodes différentes.

BIBLIOGRAPHIE

[ARM] P. ARMAND and C. MALIVERT, Determination of the Efficient Set in Multiobjective Linear Programming, *J. of Optimization Theory and Applications*, 1991, *70*, p.467-489.

[BEN 1] H. P. BENSON, Optimisation over the Efficient Set, Discussion Paper No. 35, Center for Econometrics and Decision Sciences, University of Florida, Gainesville, Florida, 1981.

[BEN 2] H. P. BENSON, Optimization over the Efficient Set, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1984, *98*, p.562-580.

[BEN 3] H. P. BENSON, An algorithm for Optimizing over the Weakly-Efficient Set, *European J. of Operational Research*, 1986, *25*, p.192-199.

[BEN 4] H. P. BENSON, An All-Linear Programming Relaxation Algorithm for Optimizing over the Efficient Set, *J. Of Global Optimization*, 1991, *1*, p. 83-104.

[BEN 5] H. P. BENSON, A Finite, Nonadjacent Extreme Point Search Algorithm for Optimization over the Efficient Set, *J. of Optimization Theory and Applications*, 1992, *73*, p. 47-64.

[BEN 6] H. P. BENSON, A Face Search Heuristic Algorithm for Optimizing over the Efficient Set, *Naval Research Logistics*, 1993, *40*, p. 103-116.

[BEN 7] H. P. BENSON, A Bisection-Extreme Point Search Algorithm for Optimizing over the Efficient Set in the Linear Dependence Case, *J. of Global Optimization*, 1993, *3*, p. 95-111.

[BEN 8] H. P. BENSON, Optimization over the Efficient Set: Four Special Cases, *J. of Optimization Theory and Applications*, 1994, *80*, n° 1.

[BEN 9] H. P. BENSON, A Finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyedron, *Naval Research Logistics Quaterly*, 1985, *32*, p. 165-177.

[BOL 1] S. BOLINTINÉANU, Minimization of Quasi-Concave Function over an Efficient Set, *Math. Programming*, 1993, *61*, p. 89-110.

[BOL 2] S. BOLINTINÉANU, Optimality Conditions for Minimization over the (Weakly or Properly) Efficient Set, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1993 *173*, n° 2, p. 523-541.

[BOL 3] S. BOLINTINÉANU, Necessary Conditions for Nonlinear Suboptimization over the Weakly-Efficient Set, *J. of Optimization Theory and Applications*, 1993, *78*, n° 3.

[CAB] A. V. CABOT, Variations on a Cutting Plane Method for Solving Concave Minimization Problems with Linear Constraints, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1974, *21*, p. 265-274.

[DAU] J. P. DAUER, Optimization over the Efficient Set Using an Active Constraint Approach, *Zeitschrift fur Operations Research*, 1991, *35*, p. 185-195.

[DES] M. I. DESSOUKY, M. GHIASSI and W. J. DAVIS, Determining the Worst Value of an Objective Function within the Nondominated Solutions in Multiple Objective Linear Programming, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Illinois, Urbana, Ill., 1979.

[FAL] J. E. FALK and K. R. HOFFMANN, A Successive Underestimation Method for Concave Minimization Problems, *Math. of Operations Research*, 1976, *1*, p. 251-259.

[GAL] G. GALLO and A. ÜLKÜCCÜ, Bilinear Programming: An Exact Algorithm, *Math. Programming*, 1977, *12*, p. 173-194.

[HOR] R. HORST and H. TUY, Global Optimisation: Deterministic Approches, Springer-Verlag, Berlin, Germany, Second Edition, 1993.

[ISE] H. ISERMANN and R. E. STEUER, Computational Experience Concerning Payoff Tables and Minimum Criterion Values over the Efficient Set, *European J. of Operational Research*, 1987, *33*, p. 91-97.

[KON] H. KONNO, A Cutting Plane Algorithm for Solving Bilinear Programs, *Math. Programming*, 1976, *11*, p. 14-27.

[LUC] D. T. LUC, Theory of Vector Optimization: Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[LUE] D. G. LUENBERGER, Linear and Nonlinear Programming, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, Second Edition, 1984.

[MAJ] A. MAJTHAY and A. WHINSTON, Quasiconcave Minimization Subject a Linear Constraints, *Discrete Math.*, 1974, *9*, p. 35-59.

[MUU] L. D. MUU, A Method for Optimization of a Linear over the Efficient Set, Institute of Mathematics, Hanoi, Preprint 15, 1991.

[PHI] J. PHILIP, Algorithm for the Maximization Problem, *Math. Programming*, 1972, *2*, p. 207-229.

[ROC] R. T. ROCKAFELLAR, Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[ROS] J. B. ROSEN, Global Minimization of a Linearly Constrained Concave Function by Partition of Feasible Domain, *Math. of Operations Research*, 1983, *8*, p. 215-230.

[SAW] Y. SAWARAGI, H. NAKAYAMA and T. TANINO, Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press, Orlando, Florida, 1985.

[TAH] H. A. TAHA, Concave Minimization over a Convex Polyedron, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1973, *20*, p. 533-548.

[TUY] H. TUY, Concave Programming under Linear Constraints, *Soviet. Math.*, 1964, *5*, p. 1437-1460.

[ZWA] P. B. ZWART, Global Miminization of a Convex Function with Linear Inequality Constraints, *Operations Research*, 1974, *22*, p. 602-609.