

A. BATBEDAT

Les distances quadrangulaires qui ont une orientation

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 26, n° 1 (1992), p. 15-29

http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_1_15_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES DISTANCES QUADRANGULAIRES QUI ONT UNE ORIENTATION (*)

par A. BATBEDAT (1)

Résumé. — Cette étude se situe à la fois en classification additive et en classification pyramidale, qui toutes les deux prolongent la traditionnelle classification hiérarchique.

Mots clés : Classification additive; classification pyramidale; distances quadrangulaires; orientations; dissimilarités pyras.

Abstract. — This study concerns additive and pyramidal classifications, which extend the usual hierarchical classification.

Keywords : Additive classification; pyramidal classification; additive tree metrics; orientations; pyra dissimilarities.

INTRODUCTION

Dans l'article [5] de *R.A.I.R.O.-R.O.*, nous avons étudié les orientations d'une ultramétrie (nous disons simplement « une ultra »).

Pour une ultra α sur l'ensemble X (fini), soulignons les propriétés U_i suivantes (voir [5], [8] et [10]) :

U_1 : α possède des orientations.

U_2 : La procédure PROCHE construit une orientation de α et toute orientation de α peut être obtenue par PROCHE. Cette procédure est simple et rapide.

U_3 : Une chaîne C sur l'ensemble X est une orientation de α ssi le C demi-tableau de α est Robinson, ssi le dendrogramme hiérarchique de α est présenté par C sans croisement parasite.

(*) Reçu en septembre 1990.

(1) Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Institut de Mathématiques, place Eugène-Bataillon, 34060 Montpellier Cedex.

Dans l'article actuel nous considérons les distances quadrangulaires sur un ensemble X . L'expression « quadrangulaire », utilisée par exemple dans [8], fait référence à la caractérisation de β par « l'inégalité des quatre points » : pour tout quadruplet $\{x, y, z, t\}$,

$$\beta(xy) + \beta(zt) \leq \text{Max} (\beta(xz) + \beta(yt), \beta(xt) + \beta(yz)).$$

Dans [1], où est détaillée la représentation par X -arbre additif, ces distances sont appelées « additives ». Rappelons que la représentation de β par X -arbre additif se fait de la façon suivante :

AD 1 : Construction d'un arbre valué A sur un ensemble Y , sous la condition AD 2.

AD 2 : X est contenu dans Y et contient tous les sommets de A qui sont de degré 1 ou 2.

AD 3 : $\beta(xy)$ est la somme (contexte additif) des valeurs de A sur le chemin entre x et y .

Uniquement pour information, disons que dans [1] le lien entre « additif » et « quadrangulaire » est établi par le théorème 1, p. 54 [il cite Zarestkii (1965), puis Buneman, Patrinos/Hakimi et Dobson (entre 1971 et 1974)].

Toute ultra étant une distance quadrangulaire, nous nous intéressons ici aux distances quadrangulaires qui ont une orientation (c'est le titre de l'article).

Nous verrons que PROCHE ne suffit plus pour déterminer les orientations d'une telle distance : c'est pourquoi nous présenterons l'algorithme PROCHAUT qui renforce PROCHE en sélectionnant aussi par la « hauteur ».

Un autre aspect qui a retenu notre attention est celui de la représentation d'une dissimilarité quelconque δ : en classification hiérarchique, pyramidale ou arborée, δ est représentée par un dendrogramme respectivement hiérarchique, pyramidal (plan au-dessus d'une orientation) ou arboré (spatial au-dessus d'une assise arbre); en classification additive, δ est représentée par un arbre additif. Alors, dans le contexte de cet article, nous proposons de représenter δ par une distance quadrangulaire ayant une orientation, ce qui donnera à la fois un arbre additif et un dendrogramme pyramidal; d'où une grande richesse d'informations, puisque l'arbre apporte des maillons (des sommets) externes (à l'ensemble X) et le dendrogramme des maillons internes en visualisation plane.

Nous parlerons de la classification additive/pyramidale.

Dans la version initiale de cet article, ce nouveau type de classification était introduit comme « une voie de recherche » par la phrase : il faudra adapter des méthodes connues et créer des méthodes nouvelles. Maintenant

(avril 1991), nous disposons de méthodes nouvelles, que nous venons de mettre au point avec le soutien informatique de S. Gromb [11]. Il n'est pas possible de présenter ces méthodes dans cet article (elles découlent de théories sur les distances quadrangulaires et sur les arbres additifs), mais nous traiterons un exemple réel avec les sorties graphiques, comme nous l'a demandé le Rapporteur.

Nous remercions le Rapporteur d'avoir accueilli favorablement l'introduction de la classification additive/pyramidale.

1. LES ORIENTATIONS ET LES ASSISES

1.1. Imaginons un dendrogramme hiérarchique DH , présenté sans croisement parasite par une chaîne C (ordre total sur l'ensemble X des individus). Les paliers de DH avec leur hauteur déterminent l'ultra α de DH ; de plus, C est une orientation de α (propriété $U3$ de l'introduction).

1.2. Cette situation a été adaptée en spatial dans [4], [6] et [7] :

(*) A la place de C , nous avons un arbre A sur X ;

(**) A la place de DH , nous avons un dendrogramme spatial DS , avec des paliers et leur hauteur; les paliers sont des parties connexes de l'arbre A (on traduit cela en disant que A est une assise de DS)

(***) Alors DS donne sa dissimilarité σ [ces dissimilarités sont appelées des arbas (par références à « arboré »)]; l'arbre A est appelé une assise de l'arba σ .

Ces bijections entre dissimilarités et dendrogrammes (avec transfert des assises) ont été formalisées dans [3]. Le prolongement de la propriété « il existe un tableau Robinson » a été fait dans [6] (en spatial, avec aussi le cas particulier plan).

1.3. D'après le théorème 5.3, p. 65 de [7], toute distance quadrangulaire β est une arba (β possède des assises). Comme conséquence, β est parfaitement représentée, à la fois par son arbre additif et par son dendrogramme spatial au-dessus d'une assise.

1.4. Une pyra π de [2] et [4] à [7], est une arba qui possède une assise linéaire L ; alors les deux chaînes de L sont des orientations de π . Dans ce cas, le dendrogramme spatial au-dessus de L est en fait plan (est pyramidal).

2. LES ARBRES MINIMUMS

2.1. Soit γ une dissimilarité arbitraire.

D'après la section 1, une chaîne C est une orientation de γ ssi le C -demi-tableau de γ est Robinson (extension directe de la propriété $U3$ de l'introduction).

Une telle situation se produit ssi γ est pyra.

Ceci constitue une caractérisation, mais n'a pas d'intérêt comme test (il serait fastidieux de parcourir les chaînes jusqu'à obtenir une orientation).

2.2. Le recours aux arbres minimaux permet d'aller plus vite, mais ne donne pas une caractérisation (pour le cas général). Nous précisons :

A partir de γ , on peut appliquer l'algorithme de Kruskal [12] : il construit un arbre (valué) minimal (en longueur) et tout arbre minimal de γ peut être reconstruit par cet algorithme.

Ceci étant, rappelons le corollaire 4.3 en p. 10 de [6] : Pour une arba, toute assise est un arbre minimal.

Ce corollaire est accompagné dans [6] du contre-exemple d'une pyra avec un arbre minimal linéaire qui n'est pas une assise.

2.3. Par contre, nous avons démontré en MATH. 4, p. 71 de [7] : Pour une distance quadrangulaire tout arbre minimal est une assise.

2.4. PROPRIÉTÉ (conséquence de ce qui précède)

Soit β une distance quadrangulaire et C une chaîne : C est une orientation de β ssi le chemin de C est un arbre minimal de β .

2.5. Application à la recherche des orientations (éventuelles) de β

Test de Kruskal sous contrainte linéaire [attention : la longueur doit être celle des arbres minimaux (pas plus grande)].

3. A PROPOS DE PROCHE ET DE PROXEL

3.1. On se donne une dissimilarité γ quelconque.

Les propriétés présentées dans cette section seront attachées à γ .

3.2. Rappelons comment la procédure PROCHE ([5] et [10]) construit une chaîne C , pas à pas, par rangs croissants : à l'étape considérée (avant la fin)

PROCHE a déjà mis en place une section commençante Cq qui contient q singletons totalement ordonnés (on accepte $q=0$). Un singleton y de $(X - Cq)$ va entrer au rang $(q+1)$ après avoir été sélectionné selon PR 1 et PR 2 que voici :

PR 1 : Pour $q=0$ (début de la chaîne), y est pris sans condition

PR 2 : Pour $q>0$, y doit être proche du dernier élément x de Cq (c'est-à-dire : pour tout $z \in (X - Cq)$, $\gamma(xy) \leq \gamma(xz)$).

3.3. Pour une dissimilarité quelconque γ , la procédure PROXEL de [2] permet de déterminer les orientations de γ (en même temps, de dire si γ est pyra). PROXEL se déroule pas à pas comme PROCHE, mais avec un mode de sélection plus compliqué en « proximité élevée » :

– Pour $q>0$, y doit être en proximité à Cq [c'est-à-dire : pour tout $x \in Cq$ et tout $z \in (X - Cq)$, $\gamma(xy) \leq \gamma(xz)$].

– L'élévation s'impose dans toutes les étapes (même pour $q=0$) : y est élevé après Cq si pour tous z, t , dans $(X - Cq)$ est vérifiée : $\gamma(zt) \leq \text{Max}(\gamma(yz), \gamma(yt))$.

3.4. L'élévation étant un peu compliqué, on a voulu le remplacer par la hauteur : on dit que y est haut après Cq s'il est seul après Cq ou s'il existe $z \in (X - Cq)$ tel que $\gamma(yz) = \text{Max}(\gamma | (X - Cq))$.

3.5. Notons que (après Cq) tout y élevé est haut mais que (pour le cas général) la réciproque n'est pas vraie.

3.6. Nous avons montré dans [2] que Proxel ne peut pas être simplifié en remplaçant l'élévation par la hauteur ou en remplaçant la proximité par la propriété proche qui est dans PR 2.

4. LA PROCEDURE PROCHAUT

4.1. On introduit ici la procédure PROCHAUT, définie comme PROCHE (en particulier, on conserve PR 2) mais en imposant aussi la sélection par la hauteur (3.5) dans toutes les étapes (même pour $q=0$).

4.2. Exemple : Considérons l'étoile suivante, évaluée par 1 sur chaque arête.

$$\begin{array}{c} x - u - z \\ | \\ y \end{array}$$

Elle donne la distance quadrangulaire β sur $X = \{x, y, z, u\}$.

On vérifie que pour β , PROCHAUT ne sort aucune chaîne (car il n'y a pas de candidat au rang 2).

Ajoutons que PROXEL lui non plus ne sort aucune chaîne : cette distance quadrangulaire β n'est pas pyra.

4.3. Exemple : Considérons l'arbre F suivant, valué par 1 sur chaque arête :

$$\begin{array}{c} x - u - z - t \\ | \\ y \end{array}$$

Notons X l'ensemble des sommets x, y, z et t , prenons la distance quadrangulaire φ de ce X -arbre, puis appliquons PROCHAUT pour φ , en commençant par le singleton x (qui est haut) : après x, y est proche et haut, z est proche et non haut, t est haut et non proche. Après $x < y$, entre z . Enfin, entre t .

Pour cette distance φ , PROCHAUT a construit la chaîne : $x < y < z < t$.

En complément dans cet exemple 4.3, ajoutons que PROCHAUT ne peut pas construire une chaîne commençant par z (car z n'est pas haut) et précisons que φ n'est pas ultra.

4.4. Commentaire : On rappelle que PROCHE sort toujours une chaîne, pour une γ arbitraire et même après un premier singleton imposé. Alors, les exemples 4.2 et 4.3, éclairés par le théorème 4.6 (ci-après) montrent que PROCHE ne convient pas pour déterminer les orientations d'une distance quadrangulaire. Par contre, PROXEL convient mais une forme simplifiée sera la bienvenue.

4.4. LEMME : Soit β une distance quadrangulaire et Cq une partie de X (Cq peut être vide) : un singleton y est élevé après Cq ssi il est haut après Cq (cas particulier remarquable dans 3.5).

Preuve : On suppose qu'il existe après Cq un singleton y haut et non élevé : il existe z, t, u , dans $(X - Cq)$ pour lesquels :

$$\beta(zt) > \beta(yz) \geq \beta(yt) \quad \text{et} \quad \beta(yu) = \text{Max}(\beta | (X - Cq)).$$

Ceci donne :

$$\beta(zt) + \beta(yu) > \beta(yz) + \beta(tu)$$

et

$$\beta(zt) + \beta(yu) > \beta(yt) + \beta(zu).$$

C'est absurde. ■

4.6. THÉORÈME : *Pour une distance quadrangulaire β , une chaîne est une orientation ssi elle peut être construite par PROCHAUT (4.1).*

Preuve directe (par la propriété Robinson) : Soit C une chaîne et T le C -demi-tableau de β . Si C est une orientation de β , T est Robinson donc la chaîne C peut être construite par PROCHAUT. Réciproquement, C provenant de PROCHAUT, on suppose que T n'est pas Robinson : il existe $x < y < z$ avec une inversion en ligne x ($\beta(xy) > \beta(xz)$) [inégalité repérée par ((1))] ou une inversion en colonne z ($\beta(yz) > \beta(xz)$). Dans le cas de l'inversion en colonne, l'élévation pour x (choix de PROCHAUT puis, lemme 4.5) impose $\beta(xy) \geq \beta(yz)$: ceci nous ramène à l'inversion en ligne x avec laquelle on continue. On ajoute le choix DER que voici : la ligne x est la dernière ligne dans T ayant une inversion. On considère le suivant t de x dans C et on lui applique la propriété proche : $\beta(xt) \leq \beta(xz)$. Avec ((1)), ceci implique $\beta(xt) < \beta(xy)$ [repérée par ((2))]. Ensuite, grâce au choix DER, $\beta(ty) \leq \beta(tz)$ ((3)). Enfin, la propriété d'élévation pour t (lemme 4.5) donne $\beta(yz) \leq \beta(tz)$ ((4)).

Par ((1)) et ((3)) : $\beta(xy) + \beta(zt) > \beta(xz) + \beta(yt)$.

Par ((2)) et ((4)) : $\beta(xy) + \beta(zt) > \beta(xt) + \beta(yz)$.

Ceci est contradictoire. ■

Preuve indirecte (lien avec PROXEL) : Toute orientation peut être reconstruite par PROXEL, donc aussi par PROCHAUT qui est un PROXEL simplifié. Réciproquement, on applique PROCHAUT et on considère la première incompatibilité avec le déroulement simultané de PROXEL. D'après le lemme 4.5, le blocage a lieu en proximité. Précisons : PROCHAUT, qui a déjà mis en place une section commençante Cq non vide, propose un candidat y au rang $(q+1)$ en présence d'un x de Cq et d'un t de $(X - Cq)$ pour lesquels : $\beta(xy) > \beta(xt)$ [repérée par ((1))]. Compte tenu de la propriété proche pour y , ce singleton x est distinct du dernier élément z de Cq et $\beta(zx) \leq \beta(xt)$ [repérée par ((2))]. De plus, z est en proximité à $C(q-1)$ d'où : $\beta(xz) \leq \beta(xt)$ puis avec ((1)) : $\beta(xz) < \beta(xy)$ ((3)). Enfin, la propriété d'élévation de z , jointe à ((2)), donne : $\beta(yt) \leq \beta(zt)$ ((4)).

Par ((1)) et ((2)) : $\beta(xy) + \beta(zt) > \beta(xt) + \beta(yz)$.

Par ((3)) et ((4)) : $\beta(xy) + \beta(zt) > \beta(xz) + \beta(yt)$.

Ceci est contradictoire. ■

4.7. PROCHAUT EN CONSENSUS sera relatif à plusieurs distances quadrangulaires et déterminera (s'il existe) une orientation commune : à chaque étape, un candidat y devra remplir les conditions de sélection pour toutes ces distances.

5. LA CLASSIFICATION ADDITIVE/PYRAMIDALE

5.1. Dans cette section, nous avons une dissimilarité δ « à représenter ».

5.2. En classification hiérarchique, δ est représentée par un dendrogramme hiérarchique DH : nous disons que c'est « l'instrument » dans ce type de classification. Il peut être déterminé abstraitement par la famille des paliers avec les hauteurs et/ou être présenté graphiquement au-dessus d'une orientation. Formellement, DH est équivalent à son ultra α (l'un donne l'autre).

On peut distinguer les étapes suivantes :

H 1 : Choisir une méthode hiérarchique (il en existe beaucoup);

H 2 : Elle donne soit une ultra α , soit un dendrogramme DH ;

H 3 : A partir de l'un des deux, α ou DH , expliciter l'associé;

H 4 : Mesurer la déformation Déform (δ , α);

H 5 : Interpréter DH (qui donne des groupes disjoints ou emboîtés, d'individus fortement reliés).

5.3. Dans la classification arborée, l'instrument est le dendrogramme spatial (voir 1.2). Il déforme beaucoup moins que le hiérarchique et fait apparaître des groupes maillons (ce que ne peut pas faire le hiérarchique).

En spatial, les dissimilarités types sont les arbas (1.2).

5.4. Un dendrogramme spatial n'est pas facile à mettre en place graphiquement; c'est pourquoi on préfère souvent se restreindre aux dendrogrammes plans, ce qui nous situe en classification pyramidale. Ici, les dissimilarités types sont les pyras (1.4).

5.5. Pour la classification pyramidale, le livre [7] détaille des programmes de « couplage après le hiérarchique ». Utilisation :

CP 1 : Construire une ultra représentative α ;

CP 2 : Appliquer un programme de couplage pyramidal après α : il donne une pyra π , qui possède une orientation commune C avec α ;

CP 3 : Présenter par cette orientation C , les dendrogrammes hiérarchique de α et pyramidal de π ;

CP 4 : Calculer Déform (δ, α) et Déform (δ, π);

CP 5 : Interpréter.

5.6. Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous proposons de prendre pour distances types les distances quadrangulaires pyras. Nous parlerons alors de la classification additive/pyramidale. Son grand intérêt sera de disposer simultanément des deux instruments suivants, très visuels et complémentaires : les arbres additifs et les dendrogrammes plans.

Par analogie avec les étapes de H 1 à H 5 de 5.2, on peut faire :

AP 1 : Appliquer une méthode additive/pyramidale sur δ :

- elle donne soit une distance quadrangulaire pyra β ,
- soit un arbre additif AD « à caractère pyramidal ».

AP 2 : Préciser l'arbre additif AD de β (resp. β pour AD);

AP 3 : Construire le dendrogramme pyramidal DP de β ; AP 4 : Calculer Déform (δ, β);

AP 5 : Interpréter l'arbre additif AD et le dendrogramme DP , (sachant que ces deux instruments sont en harmonie, c'est-à-dire pour la même distance quadrangulaire pyra β).

Nous venons de présenter ce que l'on peut appeler « la ligne directe » dans la classification additive/pyramidale.

5.7. Il existe aussi « la ligne couplée après le hiérarchique » (comme en 5.5) où δ est représentée par un couple (α, β) ayant une orientation commune (α ultra et β distance quadrangulaire pyra).

5.8. Il nous a paru intéressant de prolonger ce couplage en remplaçant (α, β) par un triplet (α, β, π) ayant une orientation commune. La pyra π étant libre, ceci nous situe dans la classification pyramidale.

Pour ce couplage en triplet, on propose les étapes suivantes :

CT 1 : Construire une ultra représentative α

CT 2 : Un programme de couplage de 5.7 donne une distance quadrangulaire pyra β et une orientation C commune à α et β .

Commentaire : La distance β peut aussi être construite de façon autonome. Dans ce cas, on continuera avec PROCHAUT EN CONSENSUS sur α et β (4.7), en espérant que PROCHAUT puisse donner une chaîne C .

CT3 : Un programme pyramidal de [7] sort une pyra π pour laquelle la chaîne C est une orientation.

Commentaire : Ici, on veut construire une pyra représentative sous contrainte (la chaîne C déjà choisie, doit être une orientation) : il faut utiliser une méthode adaptée; par exemple, une procédure pyramidale en regroupements ascendants ne convient pas.

CT4 : Calculer Déform (δ, α), Déform (δ, β) et Déform (δ, π);

CT5 : Construire l'arbre additif de β ;

CT6 : Présenter par C les dendrogrammes hiérarchique de α et pyramidaux de β et π ;

CT7 : Interpréter.

(un arbre additif, un dendrogramme hiérarchique et deux dendrogrammes pyramidaux, le tout « dirigé » par la chaîne C).

6. UN EXEMPLE RÉEL

6.1. A la demande du Rapporteur, nous allons représenter un exemple réel en couplage par un triplet de 5.8.

6.2. L'exemple est appelé RURAL. Il provient de [9] (après adaptation) où Degenne et Vergès ont présenté des méthodes de l'Analyse de Similitude.

RURAL porte sur les neuf singletons suivants : OUT (outillage agricole), ART (existence d'artisanat courant), ASS (assolement), FOR (fumure organique), FMI (fumure minérale), SSE (sélection des semences), SAR (sélection arbustive), SAN (sélection animale), MEC (mécaniciens et équipements de réparations). Ajoutons que pour l'arbre additif on utilisera un codage à deux lettres au lieu de trois : OU, AR, AS, FO, FM, SE, SR, SN et ME.

Le choix de RURAL est d'autant plus intéressant que l'on dispose (pour comparaison) non seulement de l'étude détaillée de [9] mais aussi des applications des méthodes de [7] : dans ce livre, RURAL est pris comme exemple dans les pages 23 (arbre minimum), 82 (chaînes bien situées), 118 et 119 (induites et quotient), 136, 142, 154, 155, 158, 163 (approches pyramidales) et 171, 172 (approches arborées).

6.3. Le programme global que nous avons mis en place avec S. Gromb, construit un triplet (α, β, π) de 5.8 (α ultra, β distance quadrangulaire pyra, π pyra), mesure les déformations respectives de α, β, π , et trace les quatre graphiques (un arbre additif et trois dendrogrammes). Les sorties graphiques ont été élaborées par S. Gromb.

Voici quelques explications (pour les lecteurs qui souhaiteraient obtenir des précisions, appelons ce programme « hiéradpyra ») :

– Pour l'ultra α et la pyra π , l'utilisateur a le choix entre plusieurs voies telles que la minoration (lien simple ou saut minimum pour α), la majoration ou d'autres voies dites « de proximité ». Pour cet article, nous avons choisi la voie de proximité en L1 (que nous appelons la voie absolue).

Commentaire : Quelle que soit la méthode sollicitée, la distance β ne sera généralement pas dans une voie de comparabilité (sauf à déformer beaucoup) : alors, pour des raisons d'harmonie, les voies de proximité devraient être privilégiées.

– Pour une voie déterminée, nous avons prévu trois façons d'obtenir une orientation commune C « bien située ». Naturellement, ici nous n'en retenons qu'une.

Commentaire : La chaîne C joue un rôle important puisqu'elle dirige tous les graphiques, y compris l'arbre additif en présentation axiale. C'est pourquoi l'interprétation pourra être nuancée par le recours à plusieurs chaînes, données par des méthodes différentes (consensus).

– Les déformations de α , β , π , sont calculées (relativement à RURAL) selon la norme L1, en divisant par le nombre des paires.

Commentaire : D'une façon très générale, π est la meilleure représentante. Par contre, en appliquant ce programme hiéradpyra sur des exemples variés, nous avons constaté que la distance β déforme souvent plus que l'ultra α (nous y reviendrons pour RURAL en 6.5).

Voici une dissimilarité δ qui donne une progression régulière des déformations : 0,13 puis 0,53 puis 0,67 pour π puis β puis α :

3	6	6	11	10
	2	6	9	10
		6	12	10
			9	8
				3

6.4. Voici l'orientation commune C retenue pour RURAL :

FOR < FMI < SAN < OUT < SAR < SSE < ASS < MEC < ART.

6.5. Les déformations de α , β , π , sont respectivement : 2,58 – 3,83 – 1,47.

Nous sommes dans le cas où β déforme plus que l'ultra α . Mais il faut dire que nous avons choisi la meilleure représentante ultra parmi les

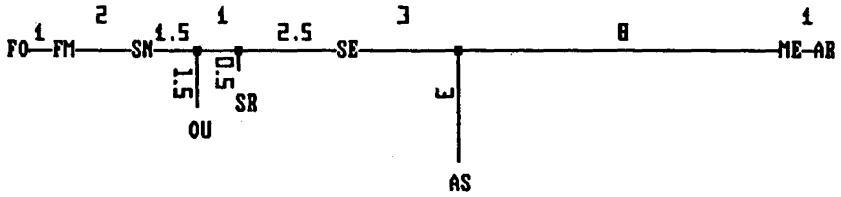
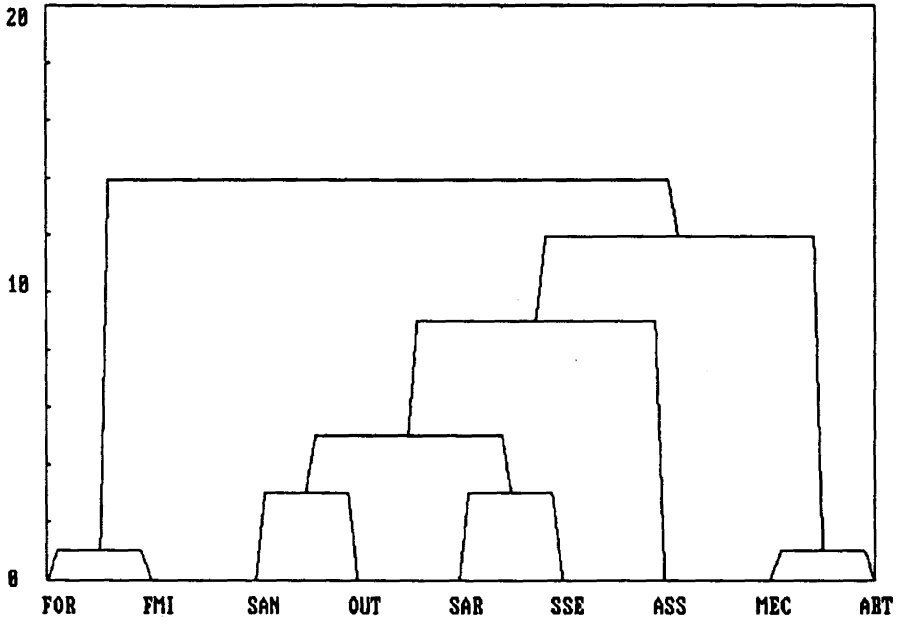
suivantes : absolue (ici) (2,58), euclidienne ou encore intermédiaire (2,76), majorante (4,47), minorante (6,36).

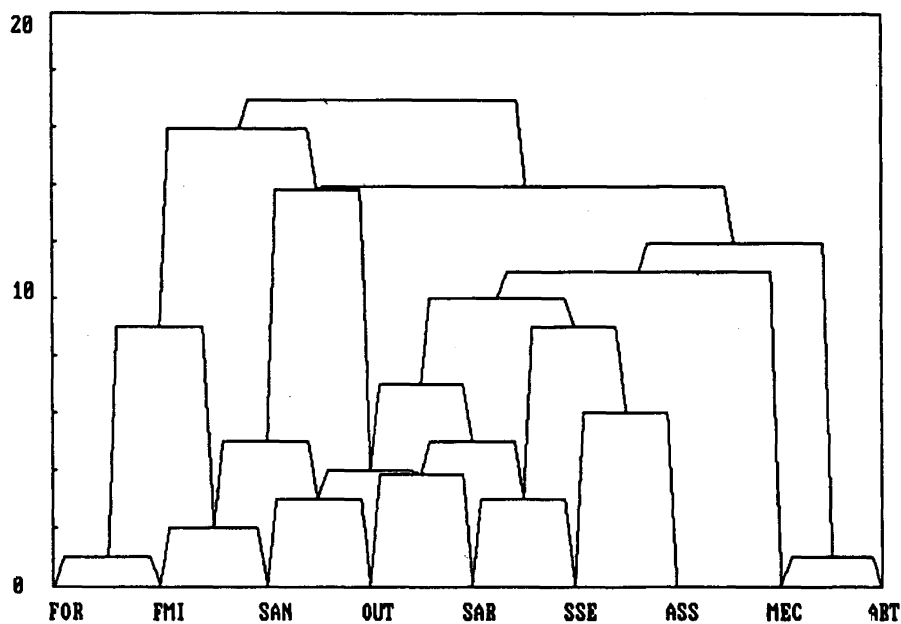
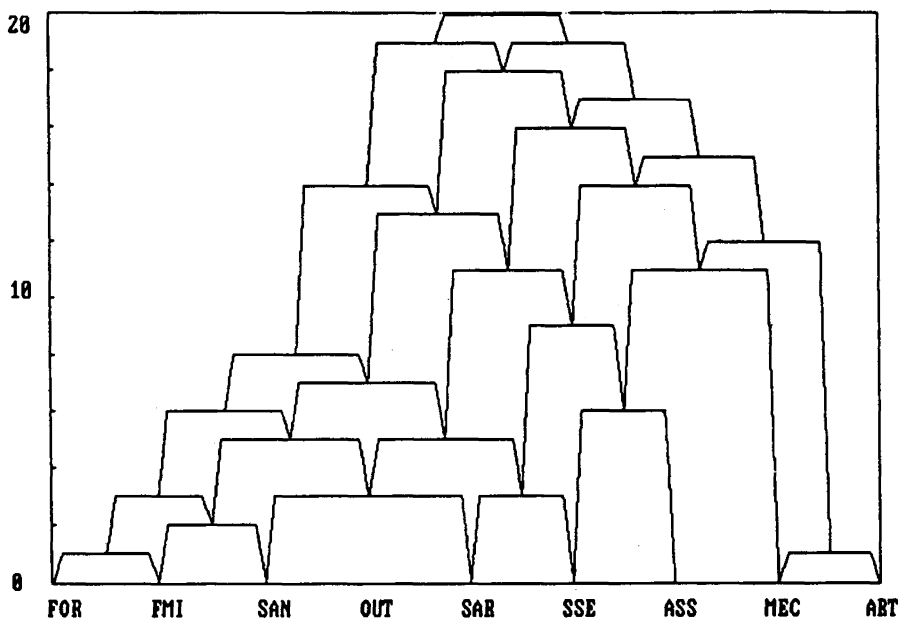
6.6. Ci-après, on explicite de gauche à droite et de bas en haut les demi-tableaux respectifs de $RURAL$, α , β et π .

On présente ensuite successivement le dendrogramme hiérarchique de α , l'arbre additif puis le dendrogramme de la distance quadrangulaire pyra β et enfin le dendrogramme de la pyra π .

	FOR	FMI	SAN	OUT	SAR	SSE	ASS	MEC	ART
FOR	*	1	14	14	14	14	14	14	14
FMI	1	*	14	14	14	14	14	14	14
SAN	9	2	*	3	5	5	9	12	12
OUT	16	5	3	*	5	5	9	12	12
SAR	14	14	3	4	*	3	9	12	12
SSE	18	14	7	5	3	*	9	12	12
ASS	17	16	9	11	9	6	*	12	12
MEC	14	9	1	10	14	11	15	*	1
ART	17	11	5	10	13	12	18	1	*

	FOR	FMI	SAN	OUT	SAR	SSE	ASS	MEC	ART
FOR	*	1	9	16	16	17	17	17	17
FMI	1	*	2	5	14	14	14	14	14
SAN	3	2	*	3	4	7	10	11	12
OUT	6	5	3	*	4	5	10	11	12
SAR	6	5	3	3	*	3	9	11	12
SSE	8	7	5	5	3	*	6	11	12
ASS	14	13	11	11	9	6	*	11	12
MEC	19	18	16	16	14	11	11	*	1
ART	20	19	17	17	15	12	12	1	*





BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. BARTHELEMY et A. GUENOCHÉ, Les arbres et les représentations des proximités, *Masson*, Paris, 1988.
2. A. BATBEDAT, L'algorithme PROXEL pour les dissimilarités, *Math. Sci. Hum.*, 1988, 102, p. 31-38.
3. A. BATBEDAT, Les isomorphismes HTS et HTE, *Metron*, 1988, XLVI, p. 47-59.
4. A. BATBEDAT, Applications des isomorphismes HTS et HTE (vers la classification arborée), *Metron*, 1989, XLVII, p. 35-51.
5. A. BATBEDAT, Sur les orientations d'une ultramétrie ou d'une hiérarchie, *RAIRO-Rech. Oper.* 1989, 23, n° 4, p. 393-403.
6. A. BATBEDAT, Les dissimilarités médas ou arbas, *Statis. Anal. Données*, 1989, 14, n° 3, p. 1-18.
7. A. BATBEDAT, Les approches pyramidales dans la classification arborée, avec les programmes Pascal de J.-P. Bordat, *Masson*, Paris, 1990.
8. G. BROSSIER, Problèmes de représentation des données par des arbres, *thèse d'état*, Université de Haute-Bretagne, 1986.
9. A. DEGENNE et P. VERGES, Introduction à l'Analyse de Similitude, *Rev. Française Sociol.*, 1973, XIV, Paris, p. 471-512.
10. E. DIDAY, Croisements, ordre et ultramétries : application à la recherche de consensus en classification automatique, *Metron*, 1985, XLIII-N, p. 3-20.
11. S. GROMB, Applications de l'informatique à la classification, *Séminaire*, Université des Sciences, Montpellier, 1989/1990.
12. J. KRUSKAL, On the Shortest Spanning Tree of a Graph and the Travelling Salesman Problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1956, 7, p. 48-50.