

M. ATTEIA

A. ELQORTOBI

Hamiltoniens quasi-convexes quasi-concaves

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 25, n° 4 (1991),
p. 425-438

http://www.numdam.org/item?id=RO_1991__25_4_425_0

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HAMILTONIENS QUASI-CONVEXES QUASI-CONCAVES (*)

par M. ATTEIA ⁽¹⁾ et A. ELQORTOBI ⁽²⁾

Résumé. — *Notre objectif est de définir la polaire projective d'une fonction quasi-convexe quasi-concave. On utilisera dans notre étude la notion de polarité partielle d'une fonction quasi-convexe de plusieurs variables. On adopte donc le point de vue de Laurent. Cependant, comme on va le voir, ses résultats peuvent être étendus dans une autre direction.*

Mots clés : Optimisation; fonction quasi-convexe quasi-concave; hamiltonien.

Abstract. — *Our goal is to define the projective polar of a quasiconvex-quasiconcave function. In our study, we use the notion of partial polarity of a quasiconvex-quasiconcave function of multiple variables. Then we adopt the point of view of Laurent. However, his results can be extended in other direction.*

Keywords : Optimization; quasiconvex quasiconcave function; hamiltonian.

1. INTRODUCTION

Dans cette partie, on va rappeler certaines définitions et propriétés qui nous seront utiles. Dans tout ce qui suit, X et X' (resp. Y et Y') sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes mis en dualité séparante par la forme bilinéaire qu'on notera de manière unique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DÉFINITION 1 : On dit qu'une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est *quasi-convexe* (qcx) si : $\forall (u, v) \in X \times X, \forall \lambda \in [0, 1], f[\lambda u + (1 - \lambda)v] \leq \text{Max}[f(u), f(v)]$. f est *quasi-concave* (qcv) si $-f$ est quasi-convexe.

(*) Reçu août 1990.

⁽¹⁾ Département de Mathématiques, Université Paul-Sabatier, Toulouse (France).

⁽²⁾ Département de Mathématiques, Université Mohamed 1^{er}, Faculté des Sciences, Oujda (Maroc) et Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences, Sherbrooke (Canada).

On dit qu'une fonction $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ est *quasi-convexe quasi-concave* (qcx-qcv) ou *fonction selle* si :

$\forall y \in Y$ la fonction $x \in X \mapsto k(x, y)$ est quasi-convexe et

$\forall x \in X$ la fonction $y \in Y \mapsto k(x, y)$ est quasi-concave.

DÉFINITION 2 : Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$.

Posons :

$$\forall x' \in X', \quad f^0(x') = -\text{Inf} \{ f(x) / \langle x, x' \rangle > 1 \},$$

$$f^\Delta(x') = -\text{Inf} \{ f(x) / \langle x, x' \rangle < 1 \},$$

et

$$\forall x \in X,$$

$$f^{00}(x) = -\text{Inf} \{ f^0(x') / \langle x, x' \rangle > 1 \}, \quad f^{\Delta\Delta}(x) = -\text{Inf} \{ f^\Delta(x') / \langle x, x' \rangle < 1 \}.$$

Les fonctions $f^* = \text{Min}(f^0, f^\Delta)$ et $f^{**} = \text{Max}(f^{00}, f^{\Delta\Delta})$ sont appelées respectivement *polaire* et *bipolaire projectives* de f .

Principaux résultats : ([1], [2])

(i) f^{**} est la plus grande minorante quasi-convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i.) de f ; par suite, si f est qcx et s.c.i., alors $f = f^{**}$. En plus, $f \leq g \Rightarrow f^{**} \leq g^{**}$.

(ii) $f^0(0) = -\infty$ et $f^\Delta(0) = -\text{Inf} \{ f(x) / x \in X \}$.

En général $f^{**} \neq (f^*)^*$, d'où on posera :

$$f^{*n} = \begin{cases} f^* & \text{si } n \text{ impair} \\ f^{**} & \text{si } n \text{ pair non nul.} \end{cases}$$

DÉFINITION 3 : Soit $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$. On dira que f vérifie la propriété $P(1)$ [resp. $P(2)$] si $f(0) = -\infty$ (resp. $\forall x \in X, \forall \alpha \in [0, 1] f(\alpha X) \geq f(x)$).

LEMME 1 [10] : Soit f une fonction qcx et s.c.i. appartenant à $\bar{\mathbb{R}}^X$. f vérifie $P(1) \Leftrightarrow f = f^{00}$ et f vérifie $P(2) \Leftrightarrow f = f^{\Delta\Delta}$.

Remarque 1 : Comme $f^0 = f^{000}$ (resp. $f^\Delta = f^{\Delta\Delta\Delta}$), on déduit que f^0 (resp. f^Δ) vérifie $P(1)$ [resp. $P(2)$].

DÉFINITION 4 [10] : Soit une fonction qcx $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ et $x \in X, x' \in X'$ est un *sous-gradient* de f au point x selon une polarité notée « + » si et seulement si : $f^+(x') + f(x) = 0$ et x' n'appartient pas à $\{x\}^+$.

L'ensemble des sous-gradients de f au point x pour la polarité « + » s'appelle le *sous-différentiel* et sera noté $\partial f(x)$.

2. POLARITÉ PARTIELLE D'UNE FONCTION

Étant donnée une fonction qcx-qcv $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$, nous aurons à faire certaines opérations de polarité par rapport à la première variable ou la seconde variable. On posera :

$$\forall x \in X \quad (\text{resp. } \forall x' \in X')$$

$$A(x) = \{x' \in X' / \langle x, x' \rangle > 1\} \quad (\text{resp. } A(x') = \{x \in X / \langle x, x' \rangle > 1\})$$

et

$$B(x) = \{x' \in X' / \langle x, x' \rangle < 1\} \quad (\text{resp. } B(x') = \{x \in X / \langle x, x' \rangle < 1\}).$$

On notera aussi $A_x k$ et $B_x k$ [suivant qu'on utilise l'ensemble $A(x')$ ou $B(x')$], les fonctions de deux variables obtenues en appliquant l'opération de polarité par rapport à la première variable $x \in X$.

$$A_x k(x', y) = -\text{Inf} \{k(x, y) / x \in A(x')\} \tag{1}$$

$$B_x k(x', y) = -\text{Inf} \{k(x, y) / x \in B(x')\}. \tag{2}$$

On sait que $A_x k$ et $B_x k$ sont qcx et s.c.i. par rapport à x' ([2]). Elles sont aussi qcx par rapport à y . En effet $A_x k$ et $B_x k$ sont les bornes supérieures d'une famille de fonctions qcx par rapport à y . En outre si k est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en y , alors $A_x k$ et $B_x k$ seront s.c.i. en y .

Pour simplifier notre étude, nous n'introduirons pas explicitement la notion de polaire d'une fonction qcv. Par contre l'opérateur d'inversion de signe θ nous permettra de transformer la fonction qcx-qcv k en une fonction qcv-qcx θk ($\theta k(x, y) = -k(x, y)$), et par suite d'appliquer l'opération de polarité à θk par rapport à la seconde variable $y \in Y$.

$$A_y \theta k(x, y') = -\text{Inf} \{-k(x, y) / y \in A(y')\} = \text{Sup} \{k(x, y) / y \in A(y')\} \tag{3}$$

$$B_y \theta k(x, y') = -\text{Inf} \{-k(x, y) / y \in B(y')\} = \text{Sup} \{k(x, y) / y \in B(y')\} \tag{4}$$

On constate aisément que $A_y \theta k$ et $B_y \theta k$ sont qcx et s.c.i. en y' et qcx en x . En outre, si k est s.c.i. en x , alors $A_y \theta k$ et $B_y \theta k$ seront elles aussi s.c.i.

en x . On posera aussi : $\forall (x, y) \in X \times Y$

$$\begin{aligned}\sigma_X k(x, y) &= \text{Max} [A_X \cdot A_X k(x, y), B_X \cdot B_X k(x, y)] \\ &= \text{Max} [\sup_{x' \in A(x)} \inf_{u \in A(x')} k(u, y), \sup_{x' \in B(x)} \inf_{u \in B(x')} k(u, y)] \\ \omega_Y k(x, y) &= \text{Min} [\theta A_Y \cdot A_Y \theta k(x, y), \theta B_Y \cdot B_Y \theta k(x, y)] \\ &= \text{Min} [\inf_{y' \in A(y)} \sup_{v \in A(y')} k(x, v), \inf_{y' \in B(y)} \sup_{v \in B(y')} k(x, v)]\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat suivant :

Pour y fixé (resp. pour x fixé), $\sigma_X k(x, y)$ [resp. $\omega_Y k(x, y)$] est la plus grande minorante qcx et s.c.i. (resp. la plus petite majorante qcv et s.c.s.) de $k(x, y)$, ce qui veut dire : $\sigma_X k(x, y) \leq k(x, y) \leq \omega_Y k(x, y)$.

Dorénavant, pour alléger l'écriture, on remplacera les symboles $A_X k$ et $B_X k$ par l'unique symbole $P_X k$ et les ensembles $A(x)$ et $B(x)$ par l'unique ensemble $P(x)$. Ainsi, par exemple, les expressions analytiques (1) et (2) s'écriront de manière unique : $P_X k(x', y) = -\text{Inf} \{ k(x, y) / x \in P(x') \}$.

Les applications σ et ω nous suggèrent d'introduire un opérateur de régularisation.

DÉFINITION 5 : Soit une fonction qcx-qcv $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$.

On appellera *opération de régularisation* par rapport à la variable $x \in X$, l'opération $\gamma_{X, P}$ définie par : $\gamma_{X, P} k = P_X \cdot P_X k$. De même, on notera $\gamma_{Y, P}$ l'opération de régularisation par rapport à la variable $y : \gamma_{Y, P} k = \theta P_Y \cdot P_Y \theta k$.

Exposons quelques méthodes pour construire des fonctions qcx-qcv. Soit φ une fonction qcx et s.c.i. de $\mathbb{R}^{X' \times Y}$. Notons par ψ_P la fonction qcx et s.c.i. de $\mathbb{R}^{X' \times Y'}$ définie par :

$$\psi_P(x', y) = -\text{Inf} \{ \varphi(x, y') / (x, y') \in P(x') \times P(y) \}.$$

En utilisant les notations précédentes, on obtient :

$$\psi_P = P_X \theta P_Y \cdot \varphi = P_Y \cdot \theta P_X \varphi.$$

La polaire projective de φ est alors : $\psi = \text{Min}(\psi_A, \psi_B)$. Comme φ est qcx et s.c.i., on a : $\varphi^{**} = \varphi$. Posons :

$$\varphi_P(x, y') = -\text{Inf} \{ \psi_P(x', y) / (x', y) \in P(x) \times P(y') \}.$$

On obtient alors : $\varphi_P = P_X \cdot \theta P_Y \psi_P = P_Y \theta P_X \cdot \psi_P$ et $\varphi = \text{Max}(\varphi_A, \varphi_B)$.

THÉORÈME 1 : Les fonctions $\bar{k}_P = \theta P_Y \cdot \varphi_P$ et $\underline{k}_P = P_X \cdot \psi_P$ sont qcx-qcv sur $X \times Y$.

Preuve : Soient $(x, y) \in X \times Y$. $\bar{k}_P(x, y) = \text{Inf} \{ \varphi_P(x, y') / y' \in P(y) \}$ donc $\bar{k}_P(x, \cdot)$ est qcv sur Y . Montrons que $\bar{k}_P(\cdot, y)$ est qvx sur X . Soient $(u, v) \in X^2$ et $\lambda \in]0, 1[$. Si $\bar{k}_P(u, y) = +\infty$ où $\bar{k}_P(v, y) = +\infty$ alors d'une manière évidente $\bar{k}_P[\lambda u + (1-\lambda)v, y] \leq \text{Max}[\bar{k}_P(u, y), \bar{k}_P(v, y)]$.

Supposons que $\bar{k}_P(u, y) < +\infty$ et $\bar{k}_P(v, y) < +\infty$.

Considérons deux nombres réels a et b vérifiant : $\bar{k}_P(u, y) < a$ et $\bar{k}_P(v, y) < b$. $\exists (y', z') \in [P(y)]^2$ tels que : $\bar{k}_P(u, y) \leq \varphi_P(u, y') \leq a$ et $\bar{k}_P(v, y) \leq \varphi_P(v, z') \leq b$. Comme $P(y)$ est un ensemble convexe, $\lambda y' + (1-\lambda)z' \in P(y)$. Sachant que φ_P est qcx,

$$\begin{aligned} \bar{k}_P[\lambda u + (1-\lambda)v, y] &\leq \varphi_P[\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda y' + (1-\lambda)z'] \\ &\leq \text{Max}[\varphi_P(u, y'), \varphi_P(v, z')] \leq \text{Max}(a, b). \end{aligned}$$

En faisant tendre (a, b) vers $[\bar{k}_P(u, y), \bar{k}_P(v, y)]$, on déduit que $\bar{k}_P(\cdot, y)$ est qvx. Quant à l'autre résultat, il suffit de remarquer que ψ_P est qcx sur $X \times Y$ et on emploie le même raisonnement que précédemment. @

LEMME 2 : $P_Y P_Y \cdot \varphi_P = \varphi_P$ et $P_X P_X \cdot \psi_P = \psi_P$.

Preuve : Par construction, φ_A (resp. φ_B) est qcx et s.c.i. D'après la remarque 1, elle vérifie la propriété (P1) [resp. (P2)]. Même chose pour ψ . @

NOTATION : $S_P(X \times Y)$ désignera l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ qui sont qcx par rapport aux deux variables et qui vérifient les propriétés suivantes : $f = P_X \cdot P_X f$ et $f = P_Y \cdot P_Y f$.

THÉORÈME 2 : Soient $\varphi \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ qcx et s.c.i., φ_P et ψ_P construits comme précédemment. Alors pour toute fonction qcx-qcv k vérifiant $\underline{k}_P \leq k \leq \bar{k}_P$, on a : $\gamma_{X,P} k = \underline{k}_P$, $\gamma_{Y,P} k = \bar{k}_P$, $P_X k = \psi_P$ et $P_Y \theta k = \varphi_P$.

Preuve :

$$\gamma_{X,P} \bar{k}_P = P_X \cdot P_X \bar{k}_P = P_X \cdot P_X \theta P_Y \cdot \varphi_P = P_X \cdot \psi_P = \underline{k}_P$$

et

$$\gamma_{Y,P} \underline{k}_P = \theta P_Y \cdot P_Y \theta \underline{k}_P = \theta P_Y \cdot P_Y \theta P_X \cdot \psi = \theta P_Y \cdot \varphi_P = \bar{k}_P.$$

Par suite $\forall k$ tel que

$$\begin{aligned} \underline{k}_P \leq k \leq \bar{k}_P, \quad \gamma_{X,P} k = \underline{k}_P \quad \text{et} \quad \gamma_{Y,P} k = \bar{k}_P. \\ P_X \underline{k}_P = P_X P_X \cdot \psi_P = \psi_P \end{aligned}$$

et

$$P_X \bar{k}_P = P_X \theta P_Y \cdot \varphi_P = \psi_P \Rightarrow P_X k = \psi_P$$

$$P_Y \theta \bar{k}_P = P_Y P_Y \cdot \varphi_P = \varphi_P$$

et

$$P_Y \theta \underline{k}_P = P_Y \theta P_X \cdot \psi_P = \varphi_P \Rightarrow P_Y \theta k = \varphi_P. \quad @$$

DÉFINITION 6 : Soit $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$.

On dira que k est de type S_P si k est qcx-qcv et vérifie les deux conditions suivantes : $\gamma_{X,P} \gamma_{Y,P} k = \gamma_{X,P} k$ et $\gamma_{Y,P} \gamma_{X,P} k = \gamma_{Y,P} k$.

THÉORÈME 3 : Soit $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S_P . Alors il existe deux fonctions quasi-convexes φ_P et ψ_P vérifiant : $P_Y \theta P_X \cdot \psi_P = \varphi_P$ et $P_X \theta P_Y \cdot \varphi_P = \psi_P$, telles que si l'on pose $\underline{k}_P = P_X \cdot \psi_P$ et $\bar{k}_P = \theta P_Y \cdot \varphi_P$, on ait $\underline{k}_P \leq k \leq \bar{k}_P$. De plus on a : $\underline{k}_P = \gamma_{X,P} k$ et $\bar{k}_P = \gamma_{Y,P} k$. Enfin, $\varphi_P \in S_P(X \times Y')$ et $\psi_P \in S_P(X' \times Y)$.

Preuve : On posera $k_x = \gamma_{X,P} k$ et $k_y = \gamma_{Y,P} k$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés. On a évidemment $k_x \leq k \leq k_y$. Comme k est de type S_P , on a :

$$\gamma_{Y,P} k_x = \gamma_{Y,P} \gamma_{X,P} k = \gamma_{Y,P} k = k_y \quad \text{et} \quad \gamma_{X,P} k_y = \gamma_{X,P} \gamma_{Y,P} k = \gamma_{X,P} k = k_x$$

donc $\gamma_{Y,P} k_x = k_y$ et $\gamma_{X,P} k_y = k_x$. Par suite, $\forall k'$ tel que $k_x \leq k' \leq k_y$, on a :

$$\gamma_{Y,P} k' = k_y \quad \text{et} \quad \gamma_{X,P} k' = k_x.$$

Posons : $P_Y \theta k_x = \varphi_P$ et $P_X k_y = \psi_P$. On obtient :

$$P_X \theta P_Y \cdot \varphi_P = P_X \theta P_Y \cdot P_Y \theta k_x = P_X \gamma_{Y,P} k_x = P_X k_y = \psi_P$$

et

$$P_Y \theta P_X \cdot \psi_P = P_Y \theta P_X \cdot P_X k_y = P_Y \theta \gamma_{X,P} k_y = P_Y \theta k_x = \varphi_P.$$

Calculons \underline{k}_P et \bar{k}_P :

$$\underline{k}_P = P_X \cdot \psi_P = P_X \cdot P_X k_y = \gamma_{X,P} k_y = k_x, \quad \bar{k}_P = \theta P_Y \cdot \varphi_P = \theta P_Y \cdot P_Y \theta k_x = \gamma_{Y,P} k_x = k_y.$$

Par construction φ et ψ sont deux fonctions qcx par rapport aux deux variables. Pour montrer que $\varphi_P \in S_P(X \times Y')$ et $\psi_P \in S_P(X' \times Y)$, il suffit de remarquer que pour toute fonction qcx $f \in \mathbb{R}^X$ on a : $P_X P_X \cdot P_X f = P_X f$ (cf. [1], [2] où la remarque 1). Par conséquent,

$$P_X P_X \cdot \psi_P = P_X P_X \cdot P_X k_y = P_X k_y = \psi_P$$

et

$$P_Y P_Y \cdot \varphi_P = P_Y P_Y \cdot P_Y \theta k_x = P_Y \theta k_x = \varphi_P.$$

Comme φ_P et ψ_P peuvent s'écrire aussi de la manière suivante :

$$\varphi_P = P_X \cdot \theta P_Y \psi_P \quad \text{et} \quad \psi_P = P_Y \cdot \theta P_X \varphi_P,$$

on a :

$$P_X \cdot P_X \varphi_P = P_X \cdot P_X P_X \cdot \theta P_Y \psi_P = P_X \cdot \theta P_Y \psi_P = \varphi_P$$

et

$$P_Y \cdot P_Y \psi_P = P_Y \cdot P_Y P_Y \cdot \theta P_X \varphi_P = P_Y \cdot \theta P_X \varphi_P = \psi_P. \quad @$$

Les théorèmes (2) et (3) suggèrent de construire une classe d'équivalence dont les éléments extrêmes seront \underline{k}_P et \bar{k}_P .

DÉFINITION 7 : Soient deux fonctions qcx-qcv k et $k' \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ et \mathbb{R}_P une relation définie par : $k \mathbb{R}_P k' \Leftrightarrow \gamma_{X,P} k = \gamma_{X,P} k'$ et $\gamma_{Y,P} k = \gamma_{Y,P} k'$.

THÉORÈME 4 : \mathbb{R}_P est une classe d'équivalence. Si \underline{k}_P et \bar{k}_P sont les fonctions obtenues précédemment, alors

$$K_P = \{ k \in \mathbb{R}^{X \times Y} \text{ qcx-qcv telles que } \underline{k}_P \leq k \leq \bar{k}_P \}$$

est une classe d'équivalence.

Preuve : Il est clair que \mathbb{R}_P est une classe d'équivalence. En plus tous les éléments de K_P sont équivalents entre eux. En effet, soient k et $k' \in K_P$. D'après le théorème (2), $\gamma_{X,P} k = \gamma_{X,P} k' = \underline{k}_P$ et $\gamma_{Y,P} k = \gamma_{Y,P} k' = \bar{k}_P$. Supposons que k' soit équivalent à $k \in K_P$. On a donc $\gamma_{X,P} k = \gamma_{X,P} k' = \underline{k}_P$ d'où $\underline{k}_P \leq k'$. Enfin $\gamma_{Y,P} k = \gamma_{Y,P} k' = \bar{k}_P$ d'où $k' \leq \bar{k}_P$. On a donc bien $k' \in K_P$. @

Remarque 2 : Toutes les fonctions qcx-qcv k situées entre \underline{k}_P et \bar{k}_P sont de type S_P . Dans toute la suite, nous ne considérerons que des fonctions qui sont de type S_P . Si k est de type S_P , la classe de k est donc l'ensemble K_P des fonctions qcx-qcv k' comprises entre $\underline{k}_P = \gamma_{X,P} k$ et $\bar{k}_P = \gamma_{Y,P} k$.

3. POLAIRES D'UNE FONCTION QUASI-CONVEXE QUASI-CONCAVE

Soit k de type S_P . On notera K_P la classe de k .

(i) Appliquons l'opération de polarité par rapport à la première variable $x \in X$. On obtient une fonction $P_X k \in \mathbb{R}^{X' \times Y}$ qui est qcx par rapport aux deux variables. Appliquons ensuite l'opération de polarité par rapport à la seconde variable $y \in Y$ et inversons le signe pour obtenir à nouveau une fonction qcx-qcv définie sur $X' \times Y'$ que l'on notera k_P^* et sera appelée *polaire supérieure*

de k par rapport à P . On obtient : $k_p^* = \theta P_Y P_X k$ c'est-à-dire

$$k_p^*(x', y') = \text{Inf} \{ - \text{Inf} \{ k(x, y) / x \in P(x') \} / y \in P(y') \} = - \text{Sup}_{y \in P(y')} \text{Inf}_{x \in P(x')} k(x, y).$$

(ii) Appliquons maintenant l'opération de polarité par rapport à la seconde variable $y \in Y$ (après avoir inversé le signe). On obtient une fonction $P_Y \theta k \in \mathbb{R}^{X \times Y'}$ qui est qcx par rapport aux deux variables. Appliquons ensuite l'opération de polarité par rapport à la première variable $x \in X$. On obtient encore une fonction qcx-qcv définie sur $X' \times Y'$ que l'on notera k_{p^*} et sera appelée *polaire inférieure de k par rapport à P* . On obtient : $k_{p^*} = P_X P_Y \theta k$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k_{p^*}(x', y') &= - \text{Inf} \{ - \text{Inf} \{ -k(x, y) / y \in P(y') \} / x \in P(x') \} \\ &= - \text{Inf}_{x \in P(x')} \text{Sup}_{y \in P(y')} k(x, y) \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu deux fonctions qcx-qcv k_p^* et k_{p^*} de type S_p dont la seule différence dans leur expression est l'interversion des opérations *Inf* et *Sup*. On a trivialement : $\forall (x', y') \in X' \times Y' k_{p^*}(x', y') \leq k_p^*(x', y')$.

DÉFINITION 8 : L'application $k^* = \text{Min}(k_A^*, k_B^*)$ [resp. $k_* = \text{Min}(k_{A^*}, k_{B^*})$] est appelée *polaire projective supérieure* (resp. *inférieure*) de k .

Remarque 3 : On a toujours l'inégalité $k_* \leq k^*$.

Au théorème (2), à partir de deux fonctions, on a obtenu \underline{k}_p et \bar{k}_p par polarité partielle. On peut recommencer cette construction mais en inversant les rôles de ψ_p et φ_p . A partir de $\varphi_p \in S_p(X \times Y')$ et $\psi_p \in S_p(X' \times Y)$ telles que $\varphi_p = P_X \theta P_Y \psi_p$ et $\psi_p = P_Y \theta P_X \varphi_p$, on posera $\bar{m}_p = \theta P_Y \psi_p$ et $\underline{m}_p = P_X \varphi_p$. On constate alors que $\bar{m}_p = k_p^*$ et $\underline{m}_p = k_{p^*}$. En effet $\bar{m}_p = \theta P_Y P_X k = k_p^*$ car $\psi_p = P_X k$ et $\underline{m}_p = P_X P_Y \theta k = k_{p^*}$ car $\varphi_p = P_Y \theta k$ (cf. théorème 2). Ainsi les éléments k_p^* et k_{p^*} sont les éléments extrêmes d'une classe. On notera M_p l'ensemble des fonctions qcx-qcv m définies sur $X' \times Y'$ telles que $\underline{m}_p \leq m \leq \bar{m}_p$. Comme les fonctions φ_p et ψ_p sont les mêmes quelle que soit la fonction qcx-qcv que l'on prend dans la classe K_p , il en est de même pour \underline{m} et \bar{m} . Ainsi M_p dépend en fait de K_p . On dira que M_p est la classe polaire de K_p et l'on notera $M_p = K_p^*$.

Pour $m \in M_p$ (m est donc de type S_p), on peut définir de la même façon $m_p^* = \theta P_Y P_X m$ et $m_{p^*} = P_X P_Y \theta m$, et l'on notera $M_p^* = K_p^{**}$ l'ensemble des fonctions qcx-qcv comprises entre m_{p^*} et m_p^* , d'où le résultat suivant.

THÉORÈME 5 : Soient $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S_p et K_p la classe de k .

On a alors $K_p^{**} = K_p$. Plus précisément si $\underline{k}_p = \gamma_{X, P} k$ et $\bar{k}_p = \gamma_{Y, P} k$ alors $\forall m \in K_p^*$ (c'est-à-dire vérifiant $k_{p^*} \leq m \leq k_p^*$), on a : $m_p^* = \bar{k}_p$ et $m_{p^*} = \underline{k}_p$.

Preuve : Il suffit de prouver que

$$(k_{p^*})^* = k_p^{**} = \bar{k}_p \quad \text{et} \quad (k_p^*)_* = k_p^{**} = \underline{k}_p.$$

Soient $\psi_p = P_X \gamma_{Y, P} k$ et $\varphi_p = P_Y \theta \gamma_{X, P} k$. On a alors $\psi_p = P_X \bar{k}_p$ et $\varphi_p = P_Y \theta \underline{k}_p$. Comme

$$\underline{k} = \gamma_{X, P} k = \gamma_{X, P} \gamma_{Y, P} k = P_X \cdot P_X \gamma_{Y, P} k = P_X \cdot \psi_p$$

et

$$\bar{k}_p = \gamma_{Y, P} k = \gamma_{Y, P} \gamma_{X, P} k = \theta P_Y \cdot P_Y \theta \gamma_{X, P} k = \theta P_Y \cdot \varphi_p,$$

il s'ensuit que $\psi_p = P_X k$ et $\varphi_p = P_Y \theta k$ (cf. théorème 2), d'où $k_{p^*} = P_X \varphi_p$ et $k_p^* = \theta P_Y \psi_p$.

(i) En posant $\underline{m}_p = k_{p^*}$, on a :

$$\underline{m}_p^* = \theta P_Y \cdot P_X \cdot \underline{m}_p = \theta P_Y \cdot P_X \cdot P_X \varphi_p = \theta P_Y \cdot \varphi_p = k_p.$$

Si on pose $\bar{m}_p = k_p^*$, alors :

$$\bar{m}_p^* = \theta P_Y \cdot P_X \cdot \bar{m}_p = \theta P_Y \cdot P_X \cdot \theta P_Y \psi_p = \theta P_Y \cdot \varphi_p = \bar{k}_p.$$

Par conséquent $\forall m$ tel que $\underline{m}_p \leq m \leq \bar{m}_p$: $m_p^* = \bar{k}_p$.

(ii) $\bar{m}_{p^*} = P_X P_Y \cdot \theta \bar{m}_p = P_X \cdot P_Y \cdot \theta \theta P_Y \psi_p = P_X \cdot \psi_p = \underline{k}_p$. Enfin

$$\begin{aligned} \underline{m}_{p^*} &= P_X \cdot P_Y \cdot \theta \underline{m}_p \Rightarrow \underline{m}_{p^*} = P_X \cdot P_Y \cdot \theta P_X \varphi_p \\ &= P_X \cdot \psi_p = \underline{k}_p \Rightarrow \forall m : \underline{m}_p \leq m \leq \bar{m}_p, m_{p^*} = \underline{k}_p. \quad \textcircled{a} \end{aligned}$$

Application. Problème quasi-convexe quasi-concave

Soient $h \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ une fonction qcx-qcv et $(u', v') \in X' \times Y'$. Posons :

$$f(x) = \text{Max} [\text{Sup}_{y \in A(v')} h(x, y), \text{Sup}_{y \in B(v')} h(x, y)]$$

et

$$g(y) = \text{Min} [\text{Inf}_{x \in A(u')} h(x, y), \text{Inf}_{x \in B(u')} h(x, y)].$$

Prenons

$$(u', v') = (0, 0) : f(x) = \text{Max} [-\infty, \text{Sup}_{y \in Y} h(x, y)] = \text{Sup}_{y \in Y} h(x, y)$$

et

$$g(y) = \text{Min} [+\infty, \text{Inf}_{x \in X} h(x, y)] = \text{Inf}_{x \in X} h(x, y).$$

DÉFINITION 9 : Soit $h \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$. Au triplet $[h, X, Y]$ on associe les deux problèmes :

$$(P) \quad a = \text{Inf}_{x \in X} f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \text{Sup}_{y \in Y} h(x, y)$$

$$(Q) \quad b = \text{Sup}_{y \in Y} g(y) \quad \text{avec} \quad g(y) = \text{Inf}_{x \in X} h(x, y).$$

On conviendra d'appeler (P) le *problème primal* et (Q) le *problème dual*.

A partir de maintenant, P_X représentera uniquement l'opération B_X et $P(x)$ l'ensemble $B(x)$. De même, on écrira $(k, S, \varphi, \psi, \dots)$ au lieu de $(k_P, S_P, \varphi_P, \psi_P, \dots)$.

THÉORÈME 6 : Soient les fonctions $\varphi, \psi, \underline{k}$ et \bar{k} vérifiant les hypothèses du théorème (2). Alors toutes les fonctions $qcx-qcy$ k vérifiant $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, ont les mêmes problèmes primal et dual associés.

Preuve : Soit k arbitraire vérifiant $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$. On a :

$$f(x) = \text{Sup} \{ k(x, y) / y \in Y \} = P_Y \theta k(x, 0_{Y'}).$$

En effet :

$$P_Y \theta k(x, 0_{Y'}) = - \text{Inf} \{ -k(x, y) / y \in P(0_{Y'}) \}.$$

Comme $P(0_{Y'}) = Y$, il s'ensuit que $f(x) = P_Y \theta k(x, 0_{Y'}) = \varphi(x, 0_{Y'})$. De même $\theta P_X k(0_{X'}, y) = \text{Inf} \{ k(x, y) / x \in P(0_{X'}) \}$. Comme $P(0_{X'}) = X$, il s'ensuit que $g(y) = \theta P_X k(0_{X'}, y) = -\psi(0_{X'}, y)$.

On constate que pour tout k vérifiant $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, on a les mêmes fonctions f en g , donc les mêmes problèmes primal et dual. @

DÉFINITION 10 : On dit que le triplet $[h, X, Y]$ a une valeur v si l'on a l'égalité suivante :

$$v = \text{Sup}_{y \in Y} \text{Inf}_{x \in X} h(x, y) = \text{Inf}_{x \in X} \text{Sup}_{y \in Y} h(x, y).$$

THÉORÈME 7 : Soient $k \in \bar{\mathbb{R}}^{X \times Y}$ de type S et K la classe de k . Le triplet $[k, X, Y]$ a une valeur v si et seulement si $k_*(0_{X'}, 0_{Y'}) = k^*(0_{X'}, 0_{Y'})$ c'est-à-dire que toutes les fonctions $m \in K^*$ prennent la même valeur en $(0_{X'}, 0_{Y'}) \in X' \times Y'$.

Preuve : On a : $k^* = \theta P_Y P_X k$ et $k_* = P_X P_Y \theta k$, c'est-à-dire :

$$k_*(0_{X'}, 0_{Y'}) = - \text{Inf} \{ \text{Sup} \{ k(x, y) / y \in Y \} / x \in P(0_{X'}) \} \\ = - \text{Inf}_{x \in X} \text{Sup}_{y \in Y} k(x, y) = -a$$

$$k^*(0_{X'}, 0_{Y'}) = \text{Inf} \{ - \text{Inf} \{ k(x, y) / x \in X \} / y \in P(0_{Y'}) \} \\ = - \text{Sup}_{y \in Y} \text{Inf}_{x \in X} k(x, y) = -b. \quad @.$$

Remarque 4 : On ne peut trouver de résultats pareils si on remplace P_X par A_X et l'ensemble $P(x)$ par $A(x)$ car $A(0_{X'}) = A(0_{Y'}) = \emptyset$.

DÉFINITION 11 : On dit que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ est un *point de selle* du triplet $[h, X, Y]$ si l'on a : $h(\tilde{x}, y) \leq h(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq h(x, \tilde{y}) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$ c'est-à-dire : $\text{Sup}_{y \in Y} h(\tilde{x}, y) = h(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{Inf}_{x \in X} h(x, \tilde{y})$.

THÉORÈME 8 : Soient $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S , $\varphi = P_X \theta k \in S(X \times Y')$ et $\psi = P_X k \in S(X' \times Y)$. Le couple $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ est *point de selle* de $[k, X, Y]$ si et seulement si $\varphi(\tilde{x}, 0_{Y'}) + \psi(0_{X'}, \tilde{y}) = 0$.

Preuve. - D'après la définition du point de selle, on a :

$$f(\tilde{x}) = \text{Sup}_{y \in Y} k(\tilde{x}, y) = k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{Inf}_{x \in X} k(x, \tilde{y}) = g(\tilde{y}).$$

Or

$$g(\tilde{y}) = \theta P_X k(0_{X'}, \tilde{y}) = -\psi(0_{X'}, \tilde{y})$$

et

$$f(\tilde{x}) = P_Y \theta k(\tilde{x}, 0_{Y'}) = \varphi(\tilde{x}, 0_{Y'}),$$

d'où le résultat suivant : $\varphi(\tilde{x}, 0_{Y'}) + \psi(0_{X'}, \tilde{y}) = 0. \quad @$

De nombreux auteurs se sont intéressés à la recherche de conditions suffisantes caractérisant les points de selle (cf. [3], [5], [6], [7], ...).

4. SOUS-DIFFERENTIEL D'UNE FONCTION QCX-QCV

Soit $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S . Pour chaque y fixé dans Y , la fonction : $x \mapsto k(x, y)$ est qcx. On notera $\partial_X k(x, y)$ son sous-différentiel en x . C'est une partie (éventuellement vide) de X' . De même, pour chaque x fixé dans X , la fonction : $y \mapsto -k(x, y)$ est qcx. On notera $\partial_Y k(x, y)$ son sous-différentiel en y . C'est une partie (éventuellement vide) de Y' .

DÉFINITION 12 : Soit $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S .

L'ensemble $\partial k(x, y) = \partial_X k(x, y) \times \partial_Y k(x, y)$ est appelé le *sous-différentiel* de k au point (x, y) . C'est une partie éventuellement vide de $X' \times Y'$.

THÉORÈME 9 : Soient $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S , $\varphi = P_Y \theta k$ et $\psi = P_X k$.
 $(x', y') \in \partial k(x, y) \Leftrightarrow \varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0$ et $(x', y') \in P(x) \times P(y)$.

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition (4). En effet :

$$\begin{aligned} x' \in \partial_X k(x, y) &\Leftrightarrow x' \in P(x) \quad \text{et} \quad P_X k(x', y) + k(x, y) = 0 \\ y' \in \partial_Y k(x, y) &\Leftrightarrow y' \in P(y) \quad \text{et} \quad P_Y \theta k(x, y') + \theta k(x, y) = 0. \\ k \text{ est de type } S &\Rightarrow \varphi \in S(X \times Y') \quad \text{et} \quad \psi \in S(X' \times Y). \end{aligned}$$

Ainsi

$$(x', y') \in \partial k(x, y) \Rightarrow (x', y') \in P(x) \times P(y)$$

et

$$P_Y \theta k(x, y') + P_X k(x', y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x', y') \in \partial k(x, y) \Rightarrow (x', y') \in P(x) \times P(y)$$

et

$$\varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0. \tag{5}$$

Inversement supposons que

$$\varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x', y') \in P(x) \times P(y).$$

Par définition,

$$-\psi(x', y) = \text{Inf} \{ k(u, y) / u \in P(x') \}.$$

Comme $x' \in P(x) \Rightarrow x \in P(x')$ on déduit l'inégalité suivante :
 $\psi(x', y) + k(x, y) \geq 0$.

De même,

$$-\varphi(x, y') = \text{Inf} \{ -k(x, v) / v \in P(y') \}.$$

Comme $y' \in P(y) \Rightarrow y \in P(y')$, on déduit l'inégalité suivante :

$$\varphi(x, y') + \theta k(x, y) \geq 0.$$

Et d'après (5), on déduit que :

$$\psi(x', y) + k(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y') + \theta k(x, y) = 0. \quad @$$

THÉORÈME 10 : Soient $k \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ de type S , K la classe de k et $m \in M = K^*$. Alors $(x', y') \in \partial k(x, y) \Leftrightarrow (x, y) \in \partial m(x', y')$.

Preuve : Soit

$$m \in M. \underline{m} \leq m \leq \bar{m} \Rightarrow \theta \bar{m} \leq \theta m \leq \theta \underline{m} \Rightarrow P_Y. \theta \underline{m} \leq P_Y. \theta m \leq P_Y. \theta \bar{m}$$

$$(\text{resp. } P_X. \bar{m} \leq P_X. m \leq P_X. \underline{m}).$$

Comme

$$P_Y. \theta \bar{m} = P_Y. \theta \theta P_Y. \psi = P_Y. P_Y. \psi = \psi \quad \text{et} \quad P_Y. \theta \underline{m} = P_Y. \theta P_X. \varphi = \varphi$$

$$(\text{resp. } P_X. \bar{m} = P_X. \theta P_Y. \psi = \varphi \text{ et } P_X. \underline{m} = P_X. P_X. \varphi = \varphi),$$

on déduit que $P_Y. \theta m = \psi \in S(X' \times Y)$ (resp. $P_X. m = \varphi \in S(X \times Y')$). Il suffit d'appliquer le théorème précédent et la définition (4) à m :

$$(x', y') \in \partial k(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x, y') + \psi(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x', y') \in P(x) \times P(y).$$

$$\Leftrightarrow P_X. m(x, y') + P_Y. \theta m(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad (x, y) \in P(x') \times P(y').$$

Or

$$P_X. m(x, y') + m(x', y) + \theta m(x', y) + P_Y. \theta m(x', y)$$

$$= P_X. m(x, y') + P_Y. \theta m(x', y) = 0$$

et comme on a toujours

$$P_X. m(x, y') + m(x', y) \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta m(x', y) + P_Y. \theta m(x', y) \geq 0$$

on déduit que

$$P_X. m(x, y') + m(x', y) = 0 \quad \text{et} \quad \theta m(x', y) + P_Y. \theta m(x', y) = 0$$

ce qui est équivalent à $(x, y) \in \partial m(x', y')$. @

BIBLIOGRAPHIE

1. M. ATTEIA et A. ELQORTOBI, Quasi-Convex Duality, *Lectures Notes in Control and Inform. Sci. Optimization and Optimal Control*, 1980, 30, p. 16-22.
2. A. ELQORTOBI, Thèse de 3^e cycle, N^o d'ordre 2312, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1980.
3. P. J. LAURENT, Fonctions convexes et problèmes de Minimax. *Séminaire d'Analyse Numérique*, Grenoble, 1972.
4. P. J. LAURENT, Approximation et Optimization, *Hermann*, Paris.
5. L. MCLINDEN, A Minimax Theorem, *Math. Op. Res.*, nov. 1984, 9, n^o 4.
6. H. NIKAIKO, On Von Neumann's Minimax Theorem, *Pacific J. Math.*, 1954, 4, p. 65-72.
7. U. PASSY et E. Z. PRISMAN, Saddle-functions and min-max problem. The Quasi-Convexe Quasi-Concave Case, Mimeograph series n^o 299, *Faculty of Industrial Engineering and Management*, Technio, Haifa, Israel, 1981.
8. R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton, 1970.
9. M. SION, On General Minimax Theorems, *Pacific J. Math.*, 1958, 8, p. 171-176.
10. M. VOLLE, Conjugaison par tranches, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1985, IV, 139, p. 279-312.