RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

YVAN DUMAS
JACQUES DESROSIERS
FRANÇOIS SOUMIS

Minimisation d'une fonction convexe séparable avec contraintes de rapport entre les variables

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 23, n° 4 (1989), p. 305-317

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1989__23_4_305_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 23, n° 4, 1989, p. 305 à 317)

MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE SÉPARABLE AVEC CONTRAINTES DE RAPPORT ENTRE LES VARIABLES (*)

par Yvan DUMAS (1), Jacques DESROSIERS (1) et François SOUMIS (2)

Résumé. — *Nous présentons un algorithme dual pour le problème de minimisation d'une fonction convexe séparable avec contraintes de rapport entre les variables. Ce problème est rencontré lors de l'estimation des paramètres d'un modèle de régression où la variable dépendante est discrète. Nous montrons que la complexité de l'algorithme est linéaire en nombre de minimisation unidimensionnelles pour des fonctions convexes et en nombre d'opérations élémentaires pour des fonctions quadratiques ou linéaires.*

Mots clés : Optimisation convexe; contraintes de rapport; algorithme dual: régression discrète.

Abstract. — *We present a dual algorithm to minimize a separable convex function under ratio constraints between variables. This minimization problem occurs when the dependent variable of a regression model is discret. The algorithm's complexity is shown to be linear, in number of operations, for the quadratic and linear cases.*

Keywords : Convex optimization; ratio constraints; dual algorithm; discrete regression.

1. INTRODUCTION

Soient les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, l'ensemble $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ de leurs indices et les constantes $R_{i,i+1}>0$, $i=1, \ldots, n-1$. Pour chaque variable x_i, on représente le domaine des valeurs par $[a_i, b_i]$ et le coût par la fonction convexe $f_i(x_i)$.

(*) Reçu novembre 1988.
(1) École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada H3T 1V6.
(2) École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada H3C 3A7.

Le problème d'optimisation (P) est formulé de la façon suivante:

$$(P) \qquad \min \sum_{i \in N} f_i(x_i) \tag{1}$$

sujet à

$$x_i . R_{i, i+1} \leqq x_{i+1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1 \tag{2}$$

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

L'objectif (1) s'exprime comme une somme de fonctions convexes d'une variable, les contraintes liantes (2) exigent que les rapports x_{i+1}/x_i soient supérieurs ou égaux aux constantes positives $R_{i, i+1}$ et les contraintes (3) imposent des bornes aux valeurs des variables. Remarquons que si $R_{i, i+1} \geqq 1$ pour $i=1, \ldots, n$ alors $x_i \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$.

Pour permettre des analogies avec certains problèmes déjà étudiés, considérons un chemin de n nœuds et associons la variable x_i au nœud i et la i-ième contrainte liante à l'arc $(i, i+1)$. Si les contraintes liantes sont des contraintes d'écarts $(x_i + E_{i, i+1} \leqq x_{i+1})$, alors on obtient le problème d'optimisation de l'horaire d'un itinéraire. Ce problème a été traité par Dumas *et al.* (1988 *b*). L'algorithme de résolution proposé a une complexité de l'ordre de n minimisations de fonctions d'une variable et devient de l'ordre de n opérations dans le cas d'un objectif quadratique ou linéaire. Des algorithmes ayant une complexité de l'ordre de n opérations ont été présentés par Sexton et Bodin (1985) pour le cas d'un objectif linéaire et par Sexton et Choi (1986) pour le cas d'un objectif linéaire en trois morceaux. Dans le contexte d'un système de production et de distribution, le problème de la détermination des périodes de réapprovisionnement est formulé avec des contraintes d'écart sur un graphe sans circuit plutôt que sur un chemin. Un algorithme d'une complexité polynomiale, de l'ordre de n^4 opérations, est présenté par Maxwell et Muckstadt (1985) et Jackson *et al.* (1988). Toutefois, ces travaux considèrent un objectif convexe spécifique qui se minimise de façon analytique et considère des écarts nuls ($E_{i, i+1}=0$ ou $R_{i, i+1}=1$).

Le présent article propose, pour le problème (P), un algorithme ayant une complexité de l'ordre de n minimisations de fonctions d'une variable. La complexité est de l'ordre de n opérations élémentaires dans le cas d'un objectif quadratique ou linéaire.

2. APPLICATION

Avant de présenter l'algorithme de résolution, nous donnons une application dans laquelle ce problème a été rencontré (Dumas, 1988 *a*). Il s'agit d'une régression où la variable dépendante est discrète. Dans un système de transport de porte à porte sur demande (transport de personnes à mobilité réduite), les procédures d'opération demandent que l'on estime le temps de déplacement entre deux adresses par une valeur qui est un multiple de 5 minutes. Un réseau géocodé permet de calculer la distance D de chaque déplacement. On doit définir une fonction $T(D)$ donnant une estimation du temps en fonction de la distance. On détermine la fonction $T(.)$ qui minimise, pour un échantillon d'observations $\{(T_k, D_k) \mid k \in K\}$, la somme

$$\sum_{k \in K} (T_k - T(D_k))^2. \tag{4}$$

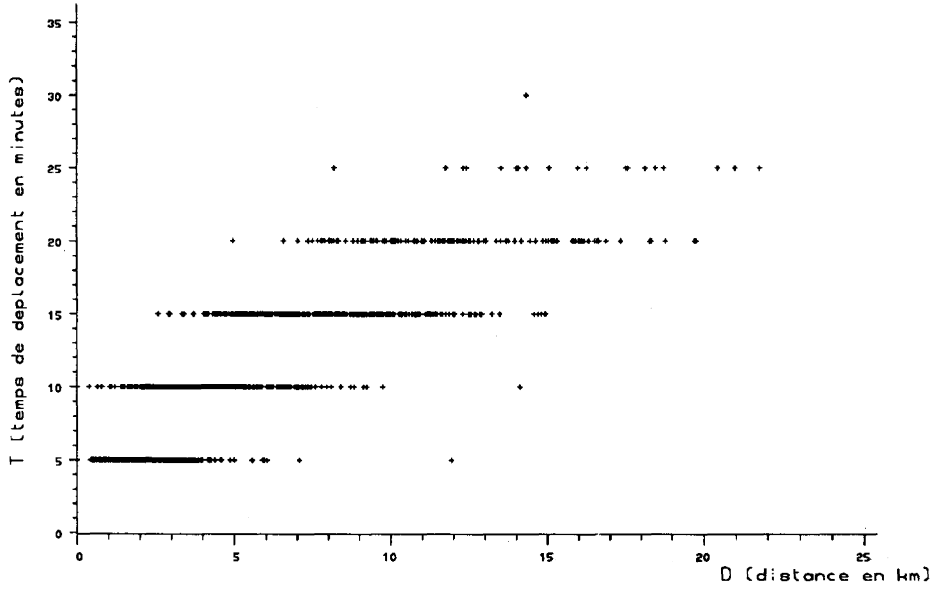

Figure 1. — Distribution des temps de déplacement en fonction de la distance.

La figure 1 présente la distribution du temps de déplacement en fonction de la distance pour l'échantillon de 3 028 points considéré dans cette étude. Les résultats obtenus en utilisant une régression linéaire avec une procédure d'arrondie ne sont pas satisfaisants; il faut considérer une fonction plus générale. On obtient de meilleurs résultats en considérant une fonction quelconque avec les seules contraintes que $T(.)$ soit croissante et que la vitesse croisse avec la distance.

Sans perte de généralité, comme l'échantillon est fini, on considère que $T(.)$ est bornée. Toute fonction discrète croissante, où l'unité de base est la constante entière α, s'écrit en fonction de paramètres β_i correspondant aux points de discontinuité comme suit :

$$T(D)=\alpha . i \quad \text{si} \quad \beta_{i-1}<D \leqq \beta_i, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{5}$$

Pour un temps donné $\alpha . i$, la vitesse varie donc de $\beta_{i-1}/(\alpha . i)$ à $\beta_i/(\alpha . i)$. Si la contrainte de vitesse croissante porte sur la vitesse maximale alors, elle s'écrit comme

$$\frac{\beta_i}{\alpha . i} \leqq \frac{\beta_{i+1}}{\alpha .(i+1)} \tag{6}$$

qui se réécrit comme $\beta_i . R_{i, i+1} \leqq \beta_{i+1}$ avec $R_{i, i+1}=(i+1)/i$.

L'objectif (4) de minimiser la somme du carré des erreurs s'écrit en fonction des β_i en utilisant les fonctions $g_j(D)$. Ces fonctions donnent le nombre de couples (temps, distance) de l'échantillon où, dans un temps $\alpha . j$, on observe un déplacement d'une distance d'au plus D. On obtient alors que minimiser (4) est équivalent à minimiser

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha^2 .(j-i)^2 .(g_j(\beta_i)-g_j(\beta_{i-1})) \tag{7}$$

qui devient, à une constante et un facteur près, en regroupant les termes en β_i,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} (2j-2i-1) . g_j(\beta_i). \tag{8}$$

Cette fonction est séparable et s'écrit comme une somme de fonctions $f_i(.)$ d'une seule variable où

$$f_i(\beta_i)=\sum_{j=1}^{n} (2j-2i-1) . g_j(\beta_i), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{9}$$

Les fonctions $f_i(.)$ de l'étude précédente (Dumas, 1988 *a*) sont présentées à la figure 2. L'échelle des valeurs des fonctions a été standardisée pour permettre de bien visualiser les cinq courbes sur un même graphique. L'étude

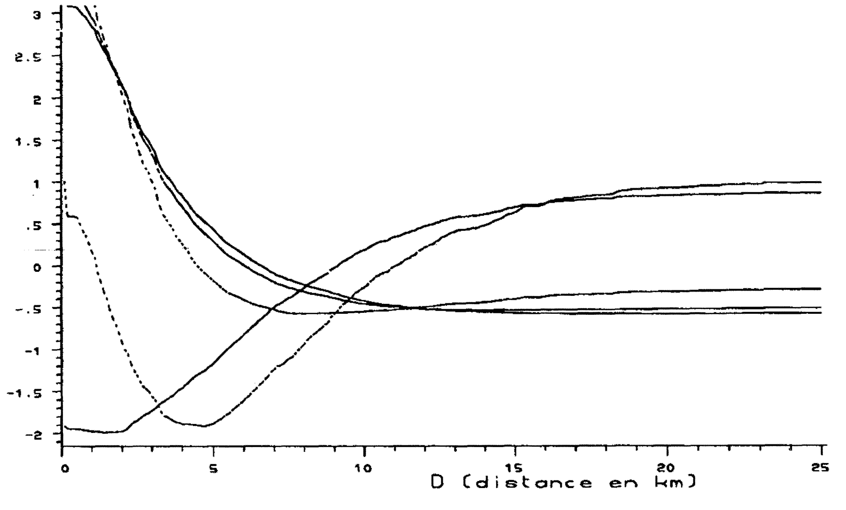

Figure 2. — Fonctions d'une variable $f_i(D)$, $i=1, \ldots, 5$.

des figures 1 et 2 permet de voir que ces fonctions sont convexes dans des intervalles $[a_i, b_i]$ contenant sûrement les valeurs optimales β_i des paramètres de la régression.

Le problème d'optimisation permettant d'estimer les paramètres de la régression s'écrit donc

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i(\beta_i) \tag{10}$$

sujet à

$$\beta_i \cdot R_{i,\, i+1} \leqq \beta_{i+1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

$$a_i \leqq \beta_i \leqq b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Les modèles de régression minimisant la somme des écarts absolus ou le nombre d'écarts non nuls conduisent également à des objectifs séparables (Dumas, 1988 *a*). Des problèmes d'optimisation semblables ont également été obtenus pour estimer les paramètres de modèles de régression avec deux variables explicatives.

3. PRÉ-TRAITEMENT

Le pré-traitement consiste à modifier les données du problème afin d'obtenir un problème équivalent respectant les propriétés suivantes :

$$a_i \,.\, R_{i,\,i+1} \leqq a_{i+1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1 \tag{13}$$

$$b_i \,.\, R_{i,\,i+1} \leqq b_{i+1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1. \tag{14}$$

En vue de satisfaire ces propriétés, on modifie les données récursivement, dans l'ordre indiqué, à l'aide des deux relations suivantes :

$$a_{i+1} := \max\{a_{i+1}, a_i \,.\, R_{i,\,i+1}\} \qquad \text{pour} \quad i=1, 2, \ldots, n-1 \tag{15}$$

$$b_i := \min\{b_i, b_{i+1}/R_{i,\,i+1}\} \qquad \text{pour} \quad i=n-1,\ n-2, \ldots, 1. \tag{16}$$

Les relations (15) et (16) réduisent les intervalles des variables pour éliminer les parties inutiles. Notons que la complexité de ce pré-traitement est de l'ordre du nombre de variables n. Le problème est irréalisable si après le pré-traitement il existe un indice i tel que $a_i > b_i$. Pour la suite de l'article, nous supposerons que les données ont été pré-traitées et que le problème est réalisable.

4. RÉDUCTION DU PROBLÈME

Dans l'approche de résolution décrite à la section suivante, les contraintes de liaison (2) sont d'abord relaxées, puis réintroduites au besoin sous forme d'égalité. Pour $n \geqq 2$, soit $C \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ l'ensemble des contraintes d'égalité. On formule le problème (P_C) comme suit :

$$(P_C) \qquad \min \sum_{i \in N} f_i(x_i) \tag{1}$$

sujet à

$$x_i \,.\, R_{i,\,i+1} = x_{i+1}, \qquad i \in C \tag{17}$$

$$x_i \,.\, R_{i,\,i+1} \leqq x_{i+1}, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} - C \tag{18}$$

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Ce problème est identique au problème original (P) si $C = \varnothing$. Pour $C \neq \varnothing$ et $i \in C$, x_i est lié à x_{i+1} par la contrainte $x_i \,.\, R_{i,\,i+1} = x_{i+1}$; on peut alors effectuer un changement de variable et éliminer la variable x_i. En éliminant ainsi toutes les variables x_i pour $i \in C$ et en modifiant légèrement la notation, on obtient une formulation plus compacte avec $n - |C|$ variables.

Introduisons maintenant la notation pour écrire cette formulation. Soit I_C l'ensemble des couples d'indices des variables adjacentes non éliminées; C représente l'ensemble des indices des variables éliminées. Par exemple, $I_{\varnothing} = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\}$ et $I_{\{k\}} = \{(1,2), (2,3), \ldots, (k-2, \ k-1), (k-1, k+1), \ (k+1, k+2), \ldots, (n-1, n)\}$. Nous représentons par $R_{i,j}$, $(i,j) \in I_C$, le rapport entre les variables x_j et x_i. Les fonctions f_i et les constantes b_i sont indicées par C pour indiquer une différence possible par rapport aux définitions initiales. La formulation plus compacte (Q_C) obtenue est la suivante:

$$(Q_C) \qquad \min \sum_{i \in N-C} f_i^C(x_i) \tag{19}$$

sujet à

$$x_i \, . \, R_{i,j} \leqq x_j, \qquad (i,j) \in I_C \tag{20}$$

$$a_i \leqq x_i \leqq b_i^C, \qquad i \in N-C. \tag{21}$$

Les nouveaux rapports sont calculés comme suit:

$$R_{i,j} := \prod_{k=i}^{j-1} R_{k,k+1}, \qquad (i,j) \in I_C. \tag{22}$$

Pour la fonction f_i^C et la constante b_i^C, il faut d'abord définir l'indice l_i. Pour $i \in N-C$ tel que $i-1 \in C$, soit l_i tel que $l_i - 1 \notin C$ et $\{l_i, l_i+1, \ldots, i-1\} \subseteq C$ (c'est-à-dire que le couple $(l_i - 1, i)$ appartient à I_C si $l_i > 1$). Alors pour $i \in N-C$, f_i^C et b_i^C sont définies comme suit:

$$f_i^C(x_i) := \begin{cases} f_i(x_i) & \text{si } \ i-1 \notin C \\ \displaystyle\sum_{k=l_i}^{i} f_k(x_i / R_{k,i}) & \text{sinon}; \end{cases} \tag{23}$$

$$b_i^C := \begin{cases} b_i & \text{si } \ i-1 \notin C \\ b_{l_i} \, . \, R_{l_i, i} & \text{sinon}. \end{cases} \tag{24}$$

Il est intéressant de noter les propriétés suivantes:

Propriété 1: Les rapports sont tels que $R_{i,j} > 0$, $\forall (i,j) \in I_C$.

Propriété 2: Les fonctions f_i^C sont convexes comme somme des fonctions convexes f_i.

PROPRIÉTÉ 3 : Les intervalles $[a_i, b_i^C]$, $i \in N-C$ satisfont les propriétés découlant du pré-traitement.

PROPRIÉTÉ 4 : Le problème (Q_C) a la même forme que le problème original (P) mais avec seulement $n-|C|$ variables.

PROPRIÉTÉ 5 : Il existe une bijection entre les solutions des problèmes (P_C) et (Q_C). Ainsi, on obtient facilement une solution optimale du problème (P_C) à partir d'une solution optimale du problème (Q_C) en posant, pour $i=n, n-1, \ldots, 1$:

$$x_i := \begin{cases} x_i & \text{si } i \notin C \\ x_{i+1}/R_{i,\,i+1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{25}$$

Dans la suite de l'article, on note par $(\bar{P})$ le problème (P) pour lequel on a relaxé les contraintes de liaison (2) et par $(\bar{Q}_C)$ le problème (Q_C) pour lequel on a relaxé les contraintes de liaison (20). Le problème relaxé $(\bar{Q}_C)$ se résout beaucoup plus facilement que le problème Q_C puisqu'il se décompose en une suite de problèmes unidimensionnels convexes.

5. APPROCHE DE RÉSOLUTION

L'approche proposée est duale. Elle consiste, à partir du problème relaxé $(\bar{P})$, à réintroduire une à une les contraintes violées jusqu'à ce qu'elles soient toutes respectées. La structure du problème fait qu'il est possible de réintroduire en même temps plusieurs des contraintes violées en remplaçant les inégalités par des égalités. Toutefois, en introduisant une seule contrainte d'égalité à chaque itération, notre approche génère les solutions optimales de la suite des problèmes relaxés

$$(\bar{Q}_{C^0}), (\bar{Q}_{C^1}), \ldots, (\bar{Q}_{C^r}), \qquad r \leqq n-1$$

où l'indice r représente le nombre de contraintes à égalité dans le problème original, avec $C^0 \subset C^1 \subset \ldots \subset C^r$. Le premier problème $(\bar{Q}_{C^0})$ correspond à $(\bar{P})$ alors que le dernier problème $(\bar{Q}_{C^r})$ admet une solution optimale qui satisfait également toutes les contraintes relaxées du problème (Q_{C^r}). Le problème (Q_{C^r}) étant une formulation compacte du problème équivalent (P_{C^r}), on déduit facilement une solution optimale de ce dernier problème (propriété 5). Les résultats suivants montrent que cette solution optimale du problème (P_{C^r}) est également optimale pour le problème original (P).

LEMME : *Soit le problème* (Q_C) *avec* $0 \leqq |C| \leqq n-2$, *et* $f_i^C(x_i)$ convexe sur l'intervalle $[a_i, b_i^C]$, *pour* $i \in N-C$. *Soit* $\bar{X}=(\bar{x}_i \mid i \in N-C)$, *une solution optimale du problème relaxé* $(\bar{Q}_C)$. *Si* $\bar{x}_k . R_{k,l} > \bar{x}_l$, $(k, l) \in I_C$ *alors il existe une solution optimale* $X^*=(x_i^* \mid i \in N-C)$ *au problème* (Q_C) *tel que* $x_k^* . R_{k,l}=x_l^*$.

Preuve: Soit $(k, l) \in I_C$ tel que $\bar{x}_k . R_{k,l} > \bar{x}_l$ et soit $X^*=(\ldots, x_k^*, x_l^*, \ldots)$ une solution optimale du problème (Q_C) tel que $x_l^*-x_k^* . R_{k,l}$ est minimum. Puisque X^* satisfait les contraintes (20) alors $x_l^*-x_k^* . R_{k,l} \geqq 0$. Supposons $x_l^*-x_k^* . R_{k,l}>0$ et montrons, par contradiction, que $x_l^*-x_k^* . R_{k,l}=0$.

(i) $\bar{x}_k \leqq x_k^*$:

Autrement, si $\bar{x}_k > x_k^*$ alors $X'=(\ldots, x_k^* . \varepsilon_1, x_l^*, \ldots)$, obtenue de X^* en remplaçant x_k^* par $x_k^* . \varepsilon_1$ où $\varepsilon_1=\min(x_l^*/(x_k^* . R_{k,l}), \bar{x}_k/x_k^*)>1$, est réalisable (*i. e.* $x_k^* . \varepsilon_1 . R_{k,l} \leqq x_l^*$, optimal (*i. e.* $f_k^C(x_k^*) \geqq f_k^C(x_k^* . \varepsilon_1) \geqq f_k^C(\bar{x}_k)$ par définition de $\bar{x}_k$ et la convexité de f_k^C) et contredit le fait que $x_l^*-x_k^* . R_{k,l}$ est minimum (*i. e.* $x_l^*-x_k^* . R_{k,l} > x_l^*-x_k^* . \varepsilon_1 . R_{k,l}$).

(ii) $\bar{x}_l \geqq x_l^*$:

Autrement, si $\bar{x}_l < x_l^*$ alors $X'=(\ldots, x_k^*, x_l^*/\varepsilon_2, \ldots)$, obtenue de X^* en remplaçant x_l^* par x_l^*/ε_2 où $\varepsilon_2=\min(x_l^*/(x_k^* . R_{k,l}), x_l^*/\bar{x}_l)>1$, est réalisable (*i. e.* $x_k^* . R_{k,l} \leqq x_l^*/\varepsilon_2$), optimal (*i. e.* $f_l^C(\bar{x}_l) \leqq f_l^C(x_l^*/\varepsilon_2) \leqq f_l^C(x_l^*)$ par définition de $\bar{x}_l$ et la convexité de f_l^C) et contredit le fait que $x_l^*-x_k^* . R_{k,l}$ est minimum (*i. e.* $x_l^*-x_k^* . R_{k,l} > x_l^*/\varepsilon_2-x_k^* . R_{k,l}$).

Combinant $\bar{x}_k \leqq x_k^*$, $\bar{x}_l \geqq x_l^*$ et $x_l^*-x_k^* . R_{k,l}>0$ on obtient:

$$\bar{x}_l-\bar{x}_k . R_{k,l} \geqq x_l^*-x_k^* . R_{k,l}>0$$

ce qui contredit $\bar{x}_k . R_{k,l} > \bar{x}_l$. Donc $x_k^* . R_{k,l}=x_l^*$ et le lemme est démontré. □

Le lemme 1 s'applique directement au problème original (P). Ainsi, si la solution du problème relaxé $(\bar{P})=(\bar{Q}_{C^0})$ ne satisfait pas toutes les contraintes de (P), on pose $C^1=\{k\}$, où $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Du lemme, on obtient qu'une solution optimale du problème (P_{C^1}) est également optimale pour le problème original (P). Or, la solution du problème (P_{C^1}) peut être déduite (propriété 5) de la solution du problème réduit (Q_{C^1}) qui conserve les propriétés de convexité des fonctions et du pré-traitement. Par induction sur le nombre de contraintes à égalité, on montre ainsi qu'une solution optimale du problème (P_{C^r}) avec $C^r=C^{r-1} \cup \{k\}$, où $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}-C^r$, est également optimale pour le problème original (P). Puisqu'il existe une bijection entre les solutions des problèmes (P_{C^r}) et (Q_{C^r}), nous obtenons le théorème 1.

THÉORÈME 1 : *Soit* (Q_{C^r}), $r \leqq n-1$, *le problème réduit obtenu du problème* (P) *par transformations successives suite à l'introduction de contraintes à égalité. Soit* $\bar{X} = (\bar{x}_i \mid i \in N - C^r)$, *une solution optimale du problème relaxé* $(\bar{Q}_{C^r})$ *satisfaisant toutes les contraintes de* (Q_{C^r}). *Une solution optimale* $X^* = (x_i^* \mid i \in N)$ *du problème original* (P) *est alors définie comme suit: pour* $i = n, n-1, \ldots, 1$, *on pose*

$$x_i^* := \begin{cases} \bar{x}_i & si \quad i \in N - C^r \\ x_i^* / R_{i,\, i+1} & sinon. \end{cases} \tag{26}$$

Afin de compléter la théorie permettant d'élaborer un algorithme efficace résolvant le problème (P), nous démontrons le lemme suivant.

LEMME2 : *Soit* $0 \leqq |C| \leqq n-2$ *et* $\bar{X} = (\bar{x}_i \mid i \in N - C)$ *une solution optimale du problème relaxé* $(\bar{Q}_C)$ *avec* $\bar{x}_k . R_{k,\, l} > \bar{x}_l$, $(k, l) \in I_C$. *L'obtention d'une solution optimale du problème* $(\bar{Q}_{C \cup \{k\}})$ *ne nécessite qu'une seule minimisation unidimensionnelle.*

Preuve : Puisque les problèmes relaxés $(\bar{Q}_C)$ et $(\bar{Q}_{C \cup \{k\}})$ ne possèdent aucune contrainte liante entre les variables, ils se décomposent respectivement en $n - |C|$ et $n - |C| - 1$ sous-problèmes unidimensionnels indépendants dont $n - |C| - 2$ sont identiques entre les deux problèmes. On obtient alors la solution du problème $(\bar{Q}_{C \cup \{k\}})$ à partir de celle du problème $(\bar{Q}_C)$ en gardant la même solution pour les variables $i \in N - C - \{k, l\}$ et en résolvant seulement le sous-problème unidimensionnel associé à x_l, soit

$$\min_{a_l \leqq x_l \leqq b_k^C . R_{k,\, l}} f_l^C(x_l) + f_k^C(x_l / R_{k,\, l}). \quad \square$$

6. ALGORITHME

Nous présentons, dans cette section, l'algorithme pour obtneir une solution optimale du problème (P). Un théorème énonce que la complexité de l'algorithme est linéaire en nombre de minimisations unidimensionnelles pour des fonctions convexes.

L'algorithme est le suivant :

Étape 0 : *Initialisation*

- Pré-traiter les données.
- Soit $\bar{X}=\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ une solution optimale du problème relaxé $(\bar{P})$.
- Initialiser $I_{\varnothing}:=\{(1,2),(2,3), \ldots, (n-1, n)\}$.
- Poser $C:=\varnothing$ et $l:=2$.

Étape 1 : *Test de faisabilité sur le couple (k, l), où $(k, l)\in I_C$*

- S'il existe k tel que $(k, l)\in I_C$ et $\bar{x}_k . R_{k,l} > \bar{x}_l$,
  alors aller à l'étape 3,
  sinon aller à l'étape 2.

Étape 2 : *Avancement d'un indice*

- $l:=l+1$.
- Si $l>n$ alors aller à l'étape 5, sinon aller à l'étape 1.

Étape 3 : *Construction du problème réduit $(Q_{C\cup\{k\}})$*

- $f_l^{C\cup\{k\}}(x_l)=f_t^C(x_l)+f_k^C(x_l/R_{k,l})$.
- $b_l^{C\cup\{k\}}=b_k^C . R_{k,l}$.
- S'il existe j tel que $(j, k)\in I_C$
  alors $I_{C\cup\{k\}}=I_C\cup\{(j, l)\}-\{(j, k),(k, l)\}$,
  $R_{j,l}=R_{j,k} . R_{k,l}$
  sinon $I_{C\cup k}=I_C-\{k, l\}$.

Étape 4 : *Solution optimale du problème $(\bar{Q}_{C\cup\{k\}})$*

- Soit $\bar{x}_l$ une solution optimale du problème :

$$\min_{a_l\leq x\leq b_l^{C\cup\{k\}}} f_l^{C\cup\{k\}}(x),$$

- $C:=C\cup\{k\}$.
- Aller à l'étape 1.

Étape 5 : *Solution optimale de (P)*

- Pour $i=n, n-1, \ldots, 1$:

$$x_i^*=\begin{cases}\bar{x}_i & \text{si} \quad i\in N-C\\ x_{i+1}^*/R_{i,i+1} & \text{si} \quad i\in C.\end{cases}$$

L'algorithme procède vers l'avant pour satisfaire les contraintes de liaison (2). En tout temps au cours de l'algorithme, les contraintes (2), pour $i<l$, sont satisfaites. En effet, à chaque itération seule la variable x_l change de valeur.

L'étape 0 effectue le pré-traitement des données et le calcul de la solution initiale du problème relaxé. L'étape 1 vérifie si la contrainte associée au couple (k, l) est violée (*i. e.* si $\bar{x}_k . R_{k,l} > \bar{x}_l$). Lorsque la contrainte n'est pas violée, l'étape 2 augmente l pour passer à la prochaine contrainte. Lorsque la contrainte est violée le problème est réduit à l'étape 3. L'étape 4 procède à la mise à jour de la solution en réévaluant seulement $\bar{x}_l$ (lemme 2). Finalement, la dernière étape de l'algorithme procède au calcul des valeurs des variables éliminées par les réductions. L'ensemble C contient l'ensemble des variables éliminées au cours de l'algorithme.

THÉORÈME 2 : *La complexité de l'algorithme est de l'ordre de n minimisations unidimentionnelles.*

Preuve: L'étape 0 nécessite n minimisations unidimensionnelles, puisque le problème $(\bar{P})$ se décompose naturellement en n sous-problèmes indépendants. Puisque l est compris entre 2 et n et qu'il ne décroît jamais, alors les étapes 2 n'impliquent que de l'ordre de n opérations élémentaires. A chaque exécution des étapes 3 et 4, la cardinalité de l'ensemble C augmente d'une unité. Puisque la cardinalité $|C|$ est compris entre 1 et $n-1$ et qu'elle ne diminue jamais, alors chacune des étapes 3 et 4 est exécutée au plus $n-1$ fois. L'étape 3 n'implique que des opérations élémentaires et l'étape 4 implique une seule minimisation unidimensionnelle. A chaque itération, soit que l augmente ou que $|C|$ augmente. L'étape 1 est donc exécutée au plus $2.(n-1)$ fois et n'implique que des opérations élémentaires. Finalement, l'étape 5 implique au plus n opérations élémentaires. □

COROLLAIRE 1 : *La complexité de l'algorithme est de l'ordre de n opérations pour des fonctions quadratiques ou linéaire.*

Preuve: Les fonctions linéaires et quadratiques se minimisent de façon analytique. Puisqu'on minimise de l'ordre de n fonctions et que chacune ne demande que quelques opérations élémentaires, alors la complexité de l'algorithme est de l'ordre de n opérations. □

7. CONCLUSION

Nous avons présenté un algorithme efficace pour la minimisation d'une somme de fonctions convexes d'une variable avec contraintes de rapport entre les variables. Ce type de problème intervient lors de l'estimation des paramètres d'un modèle de régression où la variable dépendante est discrète.

L'approche présentée est une méthode duale. A partir du problème relaxant les contraintes de rapport, elle consiste à réintroduire une à une les contraintes violés sous forme d'égalité. L'approche génère une suite de problèmes relaxés conduisant à une solution admissible optimale. Nous avons montré que la complexité de l'algorithme est linéaire en nombre de minimisations unidimensionnelles pour des fonctions convexes.

BIBLIOGRAPHIE

Y. Dumas, *Confection d'itinéraires de véhicules pour le transport adapté*, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Dept. Mathématiques Appliquées, Montréal, Canada H3C 3A7, 1988 *a*.

Y. Dumas, F. Soumis et J. Desrosiers, *Optimisation de l'horaire d'un itinéraire, avec coûts convexes*, Cahiers du GERAD G-88-22 (20 pages), École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada H3T 1V6, 1988 *b*.

P. L. Jackson, W. L. Maxwell et J. A. Muckstadt, *Determining Optimal Reorder Intervals in Capacited Production Distribution Systems*, Management Science, vol. 34, 1988, p. 938-958.

W. L. Maxwell et J. A. Muckstadt, *Establishing Consistent and Realistic Reorder Intervals in Production-Distribution Systems*, Operations Research, vol. 33, 1985, p. 1316-1341.

T. Sexton et L. Bodin, *Optimizing Single Vehicle Many-to-Many Operations with Desired Delivery Times: I. Scheduling*, Transportation Science, vol. 19, 1985, p. 378-410.

T. Sexton et Y. Choi, *Pick-up and Delivery of Partial Loads with Time Windows*, The American Journal of Mathematical and Management Sciences, vol. 6, 1986, p. 369-398.