RAIRO. Recherche opérationnelle

Y. Cherruault

Sur la convergence de la méthode d'Adomian

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 22, nº 3 (1988), p. 291-299

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1988__22_3_291_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 22, n° 3, 1988, p. 291 à 299)

SUR LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE D'ADOMIAN (*)

par Y. CHERRUAULT (¹)

Résumé. — *Dans ce travail, on se propose de donner des conditions assez générales permettant de démontrer la convergence de la méthode d'Adomian pour la résolution numérique d'équations fonctionnelles non linéaires d'une ou plusieurs variables.*

Mots clés : Équations non linéaires; méthode d'Adomian; techniques de décomposition.

Abstract. — *In this paper, we propose general conditions for proving the convergence of Adomian's method for the numerical resolution of nonlinear fonctional equations depending on one or several variables.*

Keywords : Nonlinear equations; Adomian's method; decomposition methods.

1. INTRODUCTION

Dans de très nombreux papiers [1, 2, 3], Adomian propose l'utilisation d'une technique numérique basée sur l'utilisation de polynômes qui portent son nom. Cette technique a l'avantage de l'élégance et surtout de la facilité d'utilisation. La solution est donnée sous la forme d'une série dont chaque terme est calculable facilement à l'aide de polynômes d'Adomian adaptés à la non linéarité [5, 6].

Des applications à différents types d'équations fonctionnelles sont données par Adomian. En particulier on peut utiliser cette méthode :

— pour la résolution numérique d'équations algébriques non linéaires [2];

— pour la résolution d'équations différentielles [6] ayant éventuellement des retards [4];

(*) Reçu février 1988.
(¹) Université Paris-6, Medimat, 15, rue de l'École de Médecine, 75270 Paris Cedex.

– pour l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles [12] non linéaires.

Dans toutes ces applications le nombre de variables n'est pas un inconvénient car l'obtention de la série solution n'en dépend pas explicitement.

Par contre, Adomian *et al.*, consacrent très peu de place à la convergence numérique de cette méthode. Il n'y a guère qu'un papier [9] consacré à cette importante question et quelques remarques dans un livre [12] en collaboration avec R. Bellman. La démonstration [10], au demeurant fort laborieuse et peu convaincante, est faite dans un cas très particulier et sans présenter la méthode sous sa forme essentielle.

Dans le présent travail, nous nous proposons de ramener cette technique à des relations fonctionnelles récurrentes connues et partant de là nous rattacherons la convergence à des théorèmes plus ou moins classiques (point fixe. . .).

L'intérêt d'une telle méthode numérique est évident. En particulier, son utilisation dans les problèmes de la biomédecine [14] conduisant à des modèles mathématiques semble particulièrement bien adaptée car elle permet de trouver des solutions physiquement plus réalistes en ce sens que l'on ne cherchera pas à linéariser des équations par essence non linéaires [11].

2. LA MÉTHODE D'ADOMIAN POUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Soit l'équation fonctionnelle générale

$$y-\mathrm{N}(y)=f \tag{2.1}$$

où N est un opérateur non linéaire d'un Hilbert H sur lui-même. f est une fonction de H donnée et l'on cherche $y \in H$ solution de (2.1). Nous supposerons que (2.1) admet une solution unique. Nous verrons plus tard des hypothèses [17] qui assureront cette condition.

La technique d'Adomian [7] consiste à représenter y sous forme d'une série

$$y=\sum_{i=0}^{\infty} y_i \tag{2.2}$$

et à décomposer l'opérateur N sous la forme

$$N(y)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.3}$$

où les A_n sont des fonctions (polynômes d'Adomian) de $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que l'on obtient en écrivant

$$\left.\begin{array}{l} z=\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i, \qquad N(\sum \lambda^i y_i)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \\ \text{et en remarquant que} \\ n!\, A_n=\dfrac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum \lambda^i y_i)]_{\lambda=0}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

La forme de N permet généralement d'écrire analytiquement A_n en fonction de $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Sans se préoccuper pour le moment de problèmes de convergence des séries $\{y_n\}$ et $\{A_n\}$ donnons le principe de la méthode tel qu'il résulte des publications d'Adomian [1, 3, 8].

On reporte (2.2) et (2.3) dans l'équation initiale (2.1) ce qui donne

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i-\sum_{i=0}^{\infty} A_i=f. \tag{2.5}$$

et l'on identifie les y_i et les A_i grâce aux relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} y_o=f \\ y_1 \;=A_0 \\ \vdots \\ y_n=A_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

On déterminera ainsi de proche en proche $y_0, y_1, \ldots, y_n$. En effet $y_1=A_0$ et A_0 ne dépend que de y_0 déjà connu. Puis $y_2=A_1$ avec A_1 calculable analytiquement et ne dépendant que de y_0 et y_1 déjà calculés. De proche en proche on peut donc déterminer n'importe quel élément de la série $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$.

Mais sous cette forme la méthode pose des problèmes difficilement solubles. En particulier :

— à quelles conditions $\sum y_i$ et $\sum A_i$ convergent-elles ?

— $\sum y_i$ est-elle solution de l'équation (2.1) du départ ?

Pour palier à ces difficultés nous allons proposer une forme structurelle de la méthode qui sera mieux adaptée à une étude de la convergence.

3. CONVERGENCE DE LA TECHNIQUE

Pour toute série *convergente* $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ on définit $N(y)$ par

$$N(y)=\sum_{i=0}^{\infty} A_i(y_0, \ldots, y_i) \tag{3.1}$$

les A_i de (3.1) étant déterminés à l'aide des relations (2.4). Nous verrons plus loin sous quelles conditions la série $\{A_i\}$ est susceptible de converger.

Pour toute suite $U_n=\sum_{i=0}^{n} y_i$ on définit $N(U_n)$ par :

$$N(U_n)=\sum_{i=0}^{n} A_i(y_0, \ldots, y_i). \tag{3.2}$$

La méthode d'Adomian revient alors à déterminer la suite

$$S_n=y_1+y_2+\ldots+y_n \tag{3.3}$$

à l'aide du schéma itératif suivant :

$$S_{n+1}=N(y_0+S_n), \qquad S_0=0. \tag{3.4}$$

En effet

$$y_1=S_1=N(y_0)=A_0.$$

Puis, $S_2=y_1+y_2=N(y_0+y_1)=A_0+A_1$.

Mais $y_1=A_0$ d'où il résulte $y_2=A_1$, etc.

De proche en proche, la relation itérative (3.4) permet de retrouver *toutes* les relations initiales d'Adomian (2.6). Il y a donc équivalence de la technique d'Adomian et du schéma (3.4).

Or, le schéma (3.4) correspond à la résolution de l'équation

$$N(y_0+S)=S. \tag{3.5}$$

Pour cela, on dispose de résultats correspondant au théorème du point fixe [13, 15]. On sait, en particulier, que si N est une application contractante ($\|N\|<1$) alors la suite S_n définie par (3.4) *converge* vers l'*unique* solution S de l'équation (3.5). De plus les $y_n=S_n-S_{n-1}$ tendent vers 0 lorsque $n\to\infty$.

Remarque: Revenons sur la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)$ lorsque $\sum \lambda^i y_i$ converge. Si $N(y)$ peut être approché par un polynôme en y (hypothèse assez faible en pratique) alors $N(y)=N(\sum \lambda^i y_i)$ peut être développé en série entière $\sum \lambda^n A_n$ dont les A_n sont donnés par la formule (2.4) faisant intervenir les dérivées n-ième de N. Si le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 on peut utiliser les formules d'Adomian ($\lambda=1$).

L'inconvénient de cette approche est la condition restrictive sur N (contraction). On peut s'en débarrasser en modifiant le schéma.

4. CONVERGENCE DANS UN CADRE PLUS GÉNÉRAL

Dans un travail de 1968 [16, 17], M. Sibony a proposé une technique itérative pour la résolution d'inéquations variationnelles non linéaires. Cette approche peut être utilisée pour étendre la technique d'Adomian à des opérateurs N qui ne seraient pas des contractions.

Pour ce faire, plaçons nous dans un espace de Hilbert V de dual V'. Notons $\|.\|$ la norme de V et désignons par (,) le produit scalaire.

Soit alors à résoudre le problème

$$y-N(y)=f \tag{4.1}$$

où f est donné dans V'.

On *supposera* que l'opérateur

$$R(y)=N(y)-y \quad \text{est semi-continu} \tag{4.2}$$

[la restriction de $(N-I)$ aux segments de V est continue dans V' faible] et vérifie

$$(Ru-Rv, u-v) \geqq k\|u-v\|^2, \qquad u, \quad v\in V; \quad k>0. \tag{4.3}$$

Quel que soit $N>0$, il existe une constante $C(N)>0$ telle que, pour tout $u, v \in V$ avec $\|u\| \leqq N$, $\|v\| \leqq N$ on a :

$$(Ru-Rv, w) \leqq C(N)\|u-v\| \, \|w\| \quad \text{pour tout } w \in V.$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1 : 1° *Pour tout $f \in V'$ de norme bornée, il existe $y \in V$ de norme bornée tel que :*

$$y - N(y) = f.$$

2° *La suite (y_n) définie par*

$$y_{n+1} = y_n - \rho(N(y_0+y_n)-y_n) \tag{4.4}$$

converge fortement dans V vers la solution de

$$y = N(y_0+y) \text{ pour } \rho \text{ bien choisi.} \tag{4.5}$$

Il en résultera évidemment que $u=y_0+y$, avec $y_0=f$, est solution de (4.1) $u=f+N(u)$.

La première partie de ce théorème est jusitifiée dans [17]. Pour la seconde partie on introduit :

$$\varepsilon_{n+1} = y_{n+1} - y$$

où y est la solution de (4.1). Il vient :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}\|^2 = \|y_n - \rho(N(y_0+y_n) - (y - \rho(N(y_0+y)-y))\|^2 \\ = \|\varepsilon_n\|^2 - 2\rho(R(y_n)-R(y), \varepsilon_n) \\ + \rho^2(Ry_n - Ry, Ry_n - Ru)\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R(y) = N(y_0+y) - y.$$

On obtient la majoration

$$\|\varepsilon_{n+1}\|^2 \leqq \|\varepsilon_n\|^2 - 2\rho(Ry_n - Ry, \varepsilon_n) + \rho^2\|Ry_n - Ru\|^2. \tag{4.6}$$

Soit alors N_0 tel que $\|y\| \leqq N_0/2$. Faisons l'hypothèse de récurrence

$$\|\varepsilon_n\| = \|y_n - y\| \leqq N_0/2 \tag{4.7}$$

qui entraîne en particulier $\|y_n\| \leqq N_0$.

Avec les hypothèses précédentes on tire:

$$\| R y_n - R y \|^2 \leqq C(N_0) \| R y_n - R y \| . \| \varepsilon_n \|.$$

D'où il résulte

$$\| R y_n - R y / \| \leqq C(N_0) . \| \varepsilon_n \|$$

et par suite

$$\| \varepsilon_{n+1} \|^2 \leqq (1 - 2 \rho k + \rho^2 C^2) \| \varepsilon_n \|^2 = \theta \| \varepsilon_n \|^2. \tag{4.8}$$

Si l'on choisit $\rho > 0$ de telle sorte que $\theta < 1$ l'hypothèse de récurrence sera vérifiée. Il en résulte que $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ ce qui achève la justification.

La relation (4.4) que nous rappelons:

$$y_{n+1} = y_n - \rho (N(y_0 + y_n) - y_n)$$

permet de trouver par récurrence la solution du problème (4.1). En fait, on se ramène à résoudre $N(y_0 + y) = y$ aussi si l'on souhaite faire le rapprochement vers le paragraphe précédent on peut prendre $y_n = S_n$ et écrire (4.4) sous la forme

$$\left. \begin{array}{c} S_{n+1} = S_n - \rho (N(y_0 + S_n) - S_n), \qquad S_0 = 0, \\ y_0 = f, \\ S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \end{array} \right\} \tag{4.9}$$

où les y_i sont ceux introduits par Adomian.

Cette méthode itérative est très proche de celle introduite par Adomian [1] car on remarque que lorsque $n \to \infty$

$$(N(y_0 + S_n) - S_{n+1}) = (N(y_0 + S_n) - S_n) + (S_n - S_{n+1})$$

tend vers 0. Il en résulte que

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n = y_{n+1} \simeq N(y_0 + S_n) - N(y_0 + S_{n-1}) \\ = A_0 + \ldots + A_n - A_0 - A_1 - \ldots - A_{n-1} = A_n. \end{aligned}$$

Quand n est grand on retrouve les formules originelles d'Adomian

$$y_{n+1} = A_n. \tag{4.10}$$

Mais dans ce cas elles ne sont valables qu'à la limite. C'est une différence importante avec la technique d'Adomian [1] qui les utilise *quel que soit* l'opérateur non linéaire N.

En résumé on peut dire :

– que la méthode d'Adomian peut être utilisée *stricto sensu* si l'on peut appliquer le théorème du point fixe à l'opérateur non linéaire N. Dans ce cas, la méthode converge sous des hypothèses pratiquement toujours vérifiées;

– que là où le théorème du point fixe n'est pas applicable, on peut néanmoins proposer un schéma itératif assez voisin qui tend à la limite vers les formules d'Adomian.

5. CONCLUSIONS

La méthode que nous avons examinée est puissante et simple à mettre en œuvre. C'est au départ une méthode itérative mais qui est considérablement améliorée par la décomposition de l'opérateur non linéaire sous forme d'une série dont les éléments sont les polynômes d'Adomian. En ramenant cette méthode à des structures itératives, nous avons pu en démontrer la convergence. On peut aussi étendre la technique dans le cas où l'opérateur non linéaire n'est pas une contraction. Le tout forme un outil intéressant pour la résolution numérique d'équations fonctionnelles dépendant d'une ou plusieurs variables. Il est incontestablement plus attrayant que la plupart des méthodes qui ont cours sur le marché de l'analyse numérique et de l'algorithmique. En particulier, on évite d'avoir à linéariser des phénomènes par essence non linéaires. La généralisation à des équations fonctionnelles du type $Ly-Ny=f$, où L est un opérateur *linéaire* et inversible ne pose pas de difficultés particulières. Il suffira d'envisager la résolution de l'équation $y-L^{-1}\,Ny=L^{-1}f$.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Adomian et G. E. Adomian, A Global Method for Solution of Complex Systems, Math. Modelling, vol. 5, 1984, p. 251-263.
2. G. Adomian et R. Rach, *On the Solution of Algebraic Equations by the Decomposition Method*, Math. Analysis and Applications, vol. 105, n° 1, 1985, p. 141-166.
3. G. Adomian, R. Rach et D. Sarafyan, *On the Solution of Equations Containing Radicals by the Decomposition Method*, Journal of Math. Anal. and Applications, vol. 111, n° 2, 1985, p. 423-426.
4. G. Adomian et R. Rach, *Nonlinear Stochastic Differential Delay Equations*, J. of Math. Anal. and applications, vol. 91, n° 1, 1983.

5. G. ADOMIAN et R. RACH, *Inversion of Nonlinear Stochastic Operators*, J. of Math. Anal. and Applic., vol. 91, n° 1, 1983.
6. G. ADOMIAN et D. SARAFYAN, *Numerical Solution of Differential Equations* in the Deterministic Limit of Stochastic Theory, Applied Math. and Computation, vol. 8, 1981, p. 111-119.
7. G. ADOMIAN, *Nonlinear Stochastic Dynamical Systems in Physical Problems*, J. of Math. Anal. and Applications, vol. 111, n° 1, 1985.
8. G. ADOMIAN et R. RACH, *Polynomial Nonlinearities in Differential Equations*, J. of Math. Anal. and Ap., vol. 109, n° 1, 1985.
9. G. ADOMIAN, *Convergent Series Solution of Nonlinear Equations*, Journal of Comput. and Ap. Math., 11, 1984, p. 225-230.
10. G. ADOMIAN, *On the Convergence Region for Decomposition Solutions*, Journal of Comp. and Ap. Math., vol. 11, 1984, p. 379-380.
11. G. ADOMIAN, G. E. ADOMIAN et R. E. BELLMAN, *Biological System Interactions*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., vol. 81, 1984, p. 2938-2940.
12. R. BELLMAN et G. ADOMIAN, *Partial Differential Equations*, Reidel, 1985.
13. L. CHAMBADAL, *Dictionnaire de Mathématiques*, Hachette, 1981.
14. Y. CHERRUAULT, *Mathematical Modelling in Biomedicine. Optimal Control of Biomedical Systems*, Reidel, 1986.
15. T. L. SAATY et J. BRAM, *Nonlinear Mathematics*, McGraw Hill, 1964.
16. M. SIBONY, *Une méthode itérative pour les inéquations variationnelles non linéaires*, Rapport I.N.R.I.A., 1968.
17. M. SIBONY, *Méthodes d'approximation pour les équations et inéquations non linéaires de type monotone*, Rapport I.N.R.I.A., 1968.