

B. PEROCHE

## Complexité de l'arboricité linéaire d'un graphe II

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 19, n° 3 (1985),  
p. 293-300

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1985\\_\\_19\\_3\\_293\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1985__19_3_293_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## COMPLEXITÉ DE L'ARBORICITÉ LINÉAIRE D'UN GRAPHE II (\*)

par B. PEROCHE <sup>(1)</sup>

---

Résumé. — *G* étant un graphe de degré maximal  $2k$ , on montre que la détermination de son arboricité linéaire est un problème NP complet pour tout  $k \geq 2$  donné.

Mots clés : Arboricité linéaire; graphes; problèmes NP complets.

Abstract. — *Let G be a graph with maximum degree  $2k$ . We show it is NP complete to determine whether it is possible to partition the edge-set of G by  $k$  linear forests.*

Keywords: Linear arboricity; graphs; NP completeness.

### 1. INTRODUCTION

Une forêt linéaire est un graphe dont chaque composante connexe est une chaîne (élémentaire). Le concept d'arboricité linéaire d'un graphe  $G$ , dénoté  $la(G)$ , a été défini par Harary [5] comme le nombre minimal de forêts linéaires qui partitionnent les arêtes de  $G$ ; il a été introduit pour formaliser un problème de restauration des informations dans un fichier traité dans [6]. L'arboricité linéaire a été étudiée par divers auteurs et, en particulier, dans [1], [2], [3] et [10].

Le problème de la détermination de l'arboricité linéaire d'un graphe a été prouvé être NP complet dans [9]. Plus précisément, il a été montré que le problème suivant, noté  $LA$  :

données : Un graphe  $G$  de degré maximal 4;

question : A-t-on  $la(G) = 2$ ?

était NP complet.

Dans cet article, nous allons étudier une généralisation du problème précédent, généralisation notée  $LA(k)$ , et définie par :

données : Un entier  $k$  et un graphe  $G$  de degré maximal  $2k$ ;

question : A-t-on  $la(G) = k$ ?

---

(\*) Reçu mars 1984.

<sup>(1)</sup> Laboratoire de Recherche en Informatique, E.R.A. n° 452 du C.N.R.S.  
« Al Khowarizmi », Bât. 490, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.

Nous allons prouver le résultat suivant :

**THÉORÈME :** *Pour tout  $k \geq 2$ ,  $LA(k)$  est un problème NP complet.*

La terminologie et les résultats concernant la NP complexité sont donnés dans [4].

Il est clair que  $LA(k)$  est dans la classe NP. Pour prouver que  $LA(k)$  est NP complet, nous allons, comme dans [9], définir une transformation polynomiale à partir de 3-SAT, qui est connu pour être NP complet et qui est défini ainsi :

données : Des variables booléennes  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , une fonction booléenne sous forme canonique conjonctive des variables  $x_i$ ,  $C = C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_p$ , telle que  $\forall j, |C_j| = 3$ ;

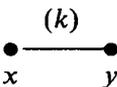
question : L'équation  $C = 1$  admet-elle une solution?

La réduction va fonctionner de la manière suivante : étant donnée une instance  $C$  du problème 3-SAT, on va lui associer un graphe  $G$  de degré maximal  $2k$  tel que  $la(G) = k$  si et seulement si  $C$  est satisfiable. Le graphe  $G$  sera construit à l'aide de trois types de composantes. Ces composantes seront décrites dans la section 2 et la preuve du théorème sera donnée dans la section 3.

Remarquons, pour terminer, que la méthode utilisée est assez proche de celle figurant dans [7] et [8].

## 2. DESCRIPTION DES COMPOSANTES

Nous utiliserons la notation suivante :

$(k)$   

 ● ——— ●  
 $x$        $y$

dénotera  $k$  arêtes parallèles entre  $x$  et  $y$ .

Dans tout l'article, une partition de  $G$  signifiera une partition de l'ensemble des arêtes de  $G$  par des forêts linéaires.

### 2.1. La composante de négation

Considérons, pour  $k \geq 2$ , le graphe  $G_1(k)$  défini par la figure 1.

Il est facile de voir que  $la(G_1(k)) = k$ ; de plus, on a :

**LEMME 1 :** *Soit  $\mathcal{P} = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  une partition minimale de  $G_1(k)$ . Si la forêt linéaire qui couvre  $a = [1, 3]$  n'apparaît pas (resp. apparaît) parmi les forêts linéaires qui couvrent  $b = [2, 7]$ , alors il existe une forêt linéaire couvrant  $c = [12, 13]$  et  $d = [8, 14]$  (resp. toutes les forêts linéaires couvrant  $c$  et  $d$  sont différentes).*

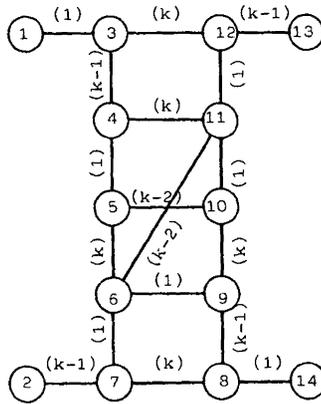


Figure 1

*Preuve* : 1<sup>er</sup> cas : Supposons que  $a$  soit couverte par  $f_1$  et  $b$  par  $\{f_2, \dots, f_k\}$ . Par construction,  $[3, 12]$ ,  $[4, 11]$ ,  $[5, 6]$ ,  $[9, 10]$  et  $[7, 8]$  sont couvertes par  $\{f_1, \dots, f_k\}$ . Comme  $a$  est couverte par  $f_1$ ,  $[3, 4]$  est couverte par  $\{f_2, \dots, f_k\}$ . Pour éviter la création de cycle dans  $f_j$ ,  $2 \leq j \leq k$ ,  $[12, 13]$  doit être couverte par  $\{f_2, \dots, f_k\}$  et  $[12, 11]$  par  $f_1$ ; de plus,  $[4, 5]$  et  $[6, 7]$  ne peuvent être couvertes que par  $f_1$ . Considérons l'arête  $[11, 10]$ . Elle ne peut être couverte que par une forêt choisie parmi  $\{f_2, \dots, f_k\}$ ; supposons que ce soit  $f_i$ . Alors  $[11, 6]$  est couverte par  $\{f_j / 2 \leq j \leq k, j \neq i\}$ , donc  $[6, 9]$  est couverte par  $f_i$ ,  $[8, 9]$  par  $\{f_j / 2 \leq j \leq k, j \neq i\}$  et donc  $d$  par  $f_i$ . Les arêtes couvertes par  $f_1$  sont donc celles représentées par la figure 2 (a) et ni  $c$  ni  $d$  ne sont couvertes par  $f_1$ , ce qui prouve le résultat annoncé (on peut remarquer que c'est la forêt linéaire  $f_i$  choisie pour couvrir  $[11, 10]$  qui couvre à la fois  $c$  et  $d$ ).

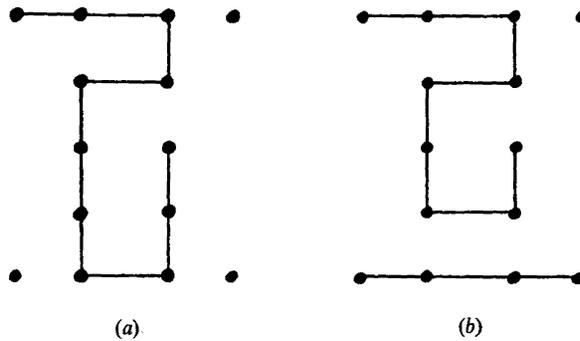


Figure 2

2<sup>e</sup> cas : On suppose cette fois-ci que  $a$  est couverte par  $f_1$  et  $b$  par  $\{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$ . Alors, avec un raisonnement similaire à celui du 1<sup>er</sup> cas, on montre que les arêtes de  $G_1(k)$  couvertes par  $f_1$  sont celles représentées figure 2(b), ce qui prouve le résultat (notons que, dans ce cas, il y a unicité de la partition).  $\square$

Dans la suite, nous utiliserons les conventions suivantes : la paire d'arêtes  $\{a, b\}$  (resp.  $\{c, d\}$ ) sera appelée une entrée (resp. une sortie) de  $G_1(k)$ . Une entrée-sortie  $\{x, y\}$  sera dite « vraie » si toutes les forêts linéaires couvrant  $x \cup y$  sont différentes et « fausse » si une forêt linéaire apparaît à la fois sur  $x$  et sur  $y$ .

Avec cette convention,  $G_1(k)$  peut être considéré comme une composante de négation.

**2.2. La composante associée aux variables**

On définit le graphe  $G_2(k)$  par la figure 3.

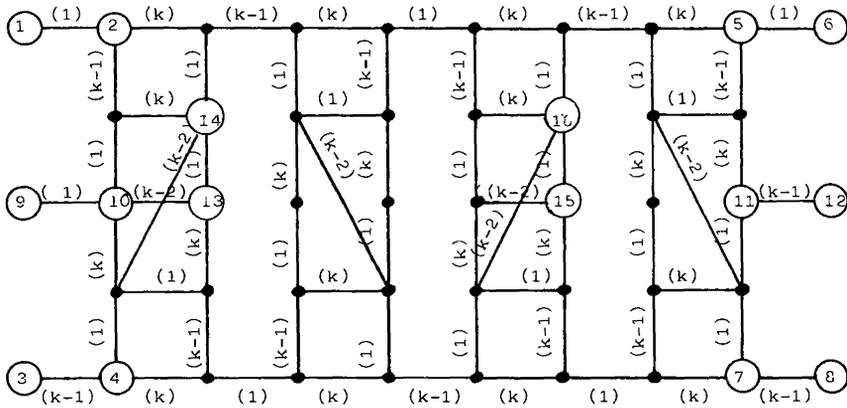


Figure 3

Soient  $a=[1, 2]$ ,  $b=[3, 4]$ ,  $c=[5, 6]$ ,  $d=[7, 8]$ ,  $e=[9, 10]$  et  $f=[11, 12]$  des arêtes de  $G_2(k)$ . Avec ces notations,  $G_2(k)$  a trois sorties :  $s=\{a, b\}$ ,  $s'=\{c, d\}$  et  $s''=\{e, f\}$ .

LEMME 2 :  $la(G_2(k))=k$  et dans toute partition minimale de  $G_2(k)$  les trois sorties sont toutes vraies ou toutes fausses.

Preuve : Nous allons montrer que si on se donne la valeur de vérité d'une sortie,  $\{a, b\}$  par exemple, la valeur de vérité des deux autres sorties est alors déterminée de manière unique.

1<sup>er</sup> cas : On suppose  $\{a, b\}$  fausse. Appellons  $f_1$  la forêt linéaire couvrant  $a$ ,  $f_1, \dots, f_{k-1}$  celles couvrant  $b$ . Avec un raisonnement similaire à celui développé dans la preuve du lemme 1, on montre que les arêtes couvertes par  $f_1$  sont celles indiquées figure 4(a). Comme  $f_1$  couvre  $c$  et  $d$ ,  $\{c, d\}$  est fausse. D'autre part,  $f$  est couverte par  $\{f_2, \dots, f_k\}$  et  $e$  par une forêt linéaire parmi  $\{f_2, \dots, f_k\}$ , donc  $\{e, f\}$  est fausse.

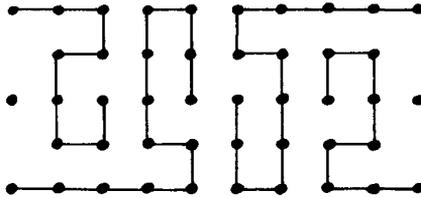


Figure 4(a)

2<sup>e</sup> cas : On suppose que  $\{a, b\}$  est vraie,  $a$  étant couverte par  $f_1$  et  $b$  par  $f_2, \dots, f_k$ . Sur la figure 4(b), on donne les deux configurations possibles pour les arêtes couvertes par  $f_1$  (et que l'on peut obtenir comme dans la preuve du lemme 1). Dans le premier sous-cas, on a choisi de couvrir l'arête  $[15, 16]$  par  $f_1$  et l'arête  $[13, 14]$  par une forêt  $f_i, 2 \leq i \leq k$ . On voit alors facilement que  $e$  est couverte par  $f_i$  et  $f$  par  $\{f_j | 1 \leq j \leq k, i \neq j\}$ ;  $\{e, f\}$  est donc vraie.

Dans le second sous-cas, on a choisi de couvrir  $[13, 14]$  par une forêt  $f_i, 2 \leq i \leq k$  et  $[15, 16]$  par une forêt  $f_j, 2 \leq j \leq k, j \neq i$ . Dans ce cas,  $e$  est couverte par  $f_i, f$  par  $\{f_j | 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$  et on a donc le résultat annoncé.

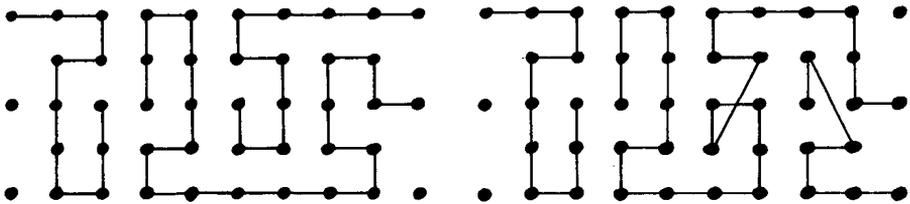


Figure 4(b)

Remarquons enfin le fait suivant : dans toute partition minimale de  $G_2(k)$ , aucune chaîne d'une forêt linéaire ne peut avoir ses deux arêtes terminales parmi les arêtes des sorties. Ceci évitera la possibilité de créer des cycles lors de la réduction.  $\square$

Maintenant, nous allons pouvoir associer une composante  $G(i)$  à chaque variable  $x_i$ .

Soit  $x_i$  une variable; nous noterons  $q(i)$  le nombre d'occurrences de  $x_i$  ou de  $\bar{x}_i$  dans  $C$ .

- (i) Si  $q(i) = 1$ , on prend  $G(i) = G_1(k) - \{c, d\}$ .
  - (ii) Si  $q(i) \geq 2$ ,  $G(i)$  est obtenu en raccordant  $q(i)$  graphes  $G_2^j(k)$  isomorphes à  $G_2(k)$  de la manière suivante : si les sorties de  $G_2^j(k)$  sont notées  $s_j, s'_j$  et  $s''_j$ , on identifie  $s'_j$  et  $s''_{j+1}$  pour  $1 \leq j \leq q(i)$  [les indices étant pris modulo  $q(i)$ ].
- $G(i)$  a alors  $q(i)$  sorties et dans toute partition minimale, toutes ses sorties ont même valeur de vérité d'après le lemme 2.

**2.3. La composante associée aux clauses**

Considérons le graphe  $H(k)$  décrit figure 5.

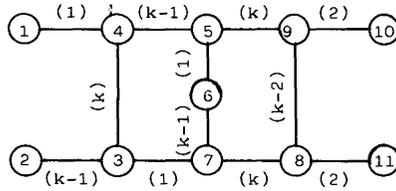


Figure 5

On a  $la(H(k)) = k$  et :

LEMME 3 : Soit  $\mathcal{P} = \{f_1, \dots, f_k\}$  une partition minimale de  $H(k)$ .

- (i) Si  $a = [1, 4]$  est couverte par  $f_1$  et  $[2, 3]$  par  $f_1, \dots, f_{k-1}$ ,  $c = [9, 10]$  et  $d = [8, 11]$  sont couvertes par une même chaîne de  $f_1$  et une même chaîne de  $f_k$ .
- (ii) Si  $\{a, b\}$  est vraie, on peut choisir arbitrairement les deux forêts linéaires couvrant  $c$  et  $d$ ; de plus,  $c$  et  $d$  ne peuvent appartenir à une même chaîne.

Preuve : (i) Les arêtes de  $H(k)$  couvertes par  $f_1$  (resp.  $f_k$ ) sont indiquées figure 6(a) [resp. figure 6(b)].

(ii) Si on suppose  $a$  couverte par  $f_1$  et  $b$  par  $f_2, \dots, f_k$ , il est facilement de voir que nécessairement  $[3, 7]$  et  $[5, 6]$  sont couvertes par  $f_1$ ,  $[4, 5]$  et  $[6, 7]$  par  $f_2, \dots, f_k$ ; mais on peut faire n'importe quel choix pour les arêtes  $[8, 9]$ ,  $c$  et  $d$ .  $\square$

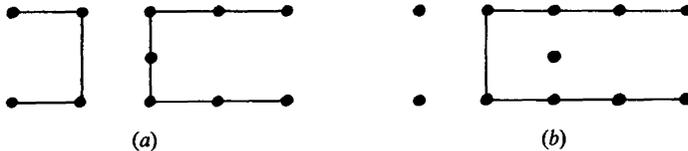


Figure 6

Maintenant, avec trois graphes isomorphes à  $H(k)$ , on va construire un graphe  $G_3(k)$  (voir fig. 7) qui sera associé aux clauses dans la réduction.

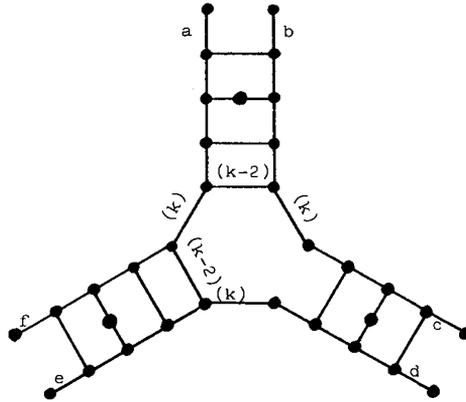


Figure 7

LEMME 4 :  $la(G_3(k)) = k$  et :

(i) Dans toute partition de  $G_3(k)$ , les trois entrées de  $G_3(k)$  ne peuvent être toutes fausses.

(ii) Toute couverture des entrées de  $G_3(k)$  par  $k$  forêts linéaires satisfaisant (i) peut être étendue en une partition de  $G_3(k)$  par  $k$  forêts linéaires.

Preuve : (i) Supposons les trois entrées fausses, avec  $a$  et  $b$  couvertes par  $f_{i_1}$ ,  $c$  et  $d$  par  $f_{i_2}$  et  $e$  et  $f$  par  $f_{i_3}$ . D'après le lemme 3, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , il existe une chaîne  $[1, 2, \dots, 3, 4, \dots, 5]$  appartenant à  $f_i$ . Donc, il existe une chaîne de  $f_{i_2}$  joignant 4 et 5 dans le sous-graphe isomorphe à  $H(k)$  contenant  $c$  et  $d$ . La forêt linéaire  $f_{i_2}$  contiendrait donc un cycle, ce qui est impossible.

(ii) Évident.  $\square$

### 3. PREUVE DU THÉORÈME

On va maintenant définir une réduction de 3-SAT vers  $LA(k)$ .

Soit  $C$  une donnée de 3-SAT.

A chaque variable  $x_i$ , on associe une composante  $G(i)$  isomorphe à  $G_2(k)$ .

A chaque clause  $C_j$ , on associe une composante  $H(j)$  isomorphe à  $G_3(k)$ .

On raccorde entre eux les différents graphes créés de la manière suivante :

Soit  $C_j = u_{j1} + u_{j2} + u_{j3}$  une clause.

Si  $u_{jk} = x_i$ , on identifie une sortie non encore utilisée de  $G(i)$  avec une entrée non encore utilisée de  $H(j)$ .

Si  $u_{jk} = \bar{x}_i$ , on insère une composante de négation entre une sortie de  $G(i)$  et une entrée de  $H(j)$  non encore utilisées.

A partir de  $C$ , on obtient donc un graphe  $G$  de degré maximal  $2k$ , et cette construction est polynomiale.

Montrons que  $la(G) = k$  si et seulement si  $C$  est satisfiable.

Supposons d'abord que l'on ait une solution de l'équation  $C = 1$ . Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , on peut partitionner  $G(i)$  par  $k$  forêts linéaires de telle sorte que les sorties de  $G(i)$  soient vraies (resp. fausses) si la valeur de vérité de la variable  $x_i$  est 1 (resp. 0). Comme  $C = 1$  a une solution, toute clause  $C_j$  a pour valeur de vérité 1, donc pour  $1 \leq j \leq n$ , on ne peut avoir les entrées de  $H(j)$  toutes fausses, donc, pour tout  $j$ ,  $H(j)$  peut être partitionné par  $k$  forêts linéaires, donc  $la(G) = k$ .

Inversement, supposons que  $C$  n'ait pas de solution. Pour une valeur de vérité donnée des variables, il existe donc au moins une clause  $C_j$  valant 0; les entrées du graphe  $H(j)$  associé sont donc toutes fausses, donc  $k + 1$  forêts linéaires sont nécessaires pour partitionner  $H(j)$ , donc  $la(G) \geq k + 1$ .  $\square$

*Remarque* : Il est possible de ne travailler tout au long de cet article qu'avec des graphes simples : il suffit de remplacer  $n$  arêtes parallèles entre  $x$  et  $y$  par le graphe suivant, noté  $K(n)$ , ayant pour ensemble de sommets  $\{x, y, 1, 2, \dots, 2n\}$  : le sous-graphe de  $K(n)$  engendré par  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  est  $K_{2n}$  et on ajoute les arêtes  $[x, i]$  et  $[n + i, y]$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

## BIBLIOGRAPHIE

1. J. AKIYAMA, G. EXOO et F. HARARY, *Covering and Packing in Graphs III: Cyclic and Acyclic Invariants*, Math. Slovaca, vol. 30, 1980, p. 405-417.
2. J. AKIYAMA, G. EXOO et F. HARARY, *Covering and Packing in Graphs IV: Linear Arboricity*, Networks, vol. 11, 1981, p. 69-72.
3. H. ENOMOTO et B. PEROCHE, *The Linear Arboricity of Some Regular Graphs*, J. Graph Theory, vol. 8, 1984, p. 309-324.
4. M. R. GAREY et D. S. JOHNSON, *Computers and Intractability*, Freeman, San Francisco, 1979.
5. F. HARARY, *Covering and Packing in Graphs I*, Ann. New York Acad. Sc., vol. 175, 1970, p. 198-205.
6. F. HARARY et D. HSAIO, *A Formal System for Information Eetrieval from Files*, Comm. A.C.M., vol. 13, 1970, p. 67-73.
7. I. J. HOLYER, *The NPcompleteness of Edge Coloring*, S.I.A.M. J. Comp., vol. 10, 1981, p. 718-720.
8. D. LEVEN et Z. GALIL, *NPcompleteness of Finding the Chromatic Index of Regular Graphs*, J. of Algorithms, vol. 4, 1983, p. 35-44.
9. B. PEROCHE, *Complexité de l'arboricité linéaire d'un graphe*, R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle, vol. 16, 1982, p. 125-129.
10. P. TOMASTA, *Note on Linear Arboricity*, Math. Slovaca, vol. 32, 1982, p. 239-242.