RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

P. CHRÉTIENNE

Chemins extrémaux d'un graphe doublement valué

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 18, n° 3 (1984), p. 221-245
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_3_221_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 18, n° 3, août 1984, p. 221 à 245)

CHEMINS EXTRÉMAUX D'UN GRAPHE DOUBLEMENT VALUÉ (*)

par P. CHRÉTIENNE (1)

Résumé. — *On considère un graphe orienté dont chaque arc est valué à la fois par une hauteur entière et une valeur réelle. Nous présentons un algorithme pour la recherche de la valeur maximale d'un chemin de hauteur donnée puis nous résolvons le problème asymptotique lorsque la hauteur tend vers l'infini.*

Mots clés : Graphe; chemin; circuit; valuation; suite.

Abstract. — *We consider a directed graph each edge of which is weighted both by an integer height and a real value. First we give an algorithm to compute the optimal value of a fixed height path, then we solve the asymptotic problem when the height becomes infinite.*

Keywords: Graph; path; cycle; valuation; sequence.

INTRODUCTION

Étant donné un graphe pour lequel chaque arc est valué par une valeur réelle et une hauteur entière, on étudie, dans cet article la suite des valeurs maximales d'un chemin d'origine et d'extrémité fixées lorsque la hauteur croît. Ce problème est original car jusqu'à présent les recherches sur les chemins extrémaux en Recherche Opérationnelle portaient sur les chemins simples, et même le plus souvent élémentaires, d'un graphe valué. La nature même de notre problème montre qu'au contraire, les chemins que nous considérons sont non simples.

Dans la première partie, nous étudions la valeur de la suite lorsque la hauteur (i. e. indice de la suite) est fixée. Nous montrons que l'idée assez naturelle d'associer un graphe développé au graphe doublement valué initial permet de résoudre le problème au moyen des algorithmes classiques de recherche de chemins extrémaux sur un graphe simplement valué. Nous

(*) Reçu janvier 1983.
(1) Université Paris-VI, Institut de Programmation, Tour 55-65, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

étendons la méthode aux cas où l'une (ou les deux) extrémités du chemin sont libres.

Dans la deuxième partie, nous étudions le comportement asymptotique de la suite lorsque la hauteur croît vers plus l'infini. Ce problème original, plus difficile que le précédent, a nécessité l'introduction des concepts de suites K-périodiques au sens large et de circuits critiques. Le point fondamental de cette étude a été de montrer que, pour une valeur suffisamment grande de la hauteur, le chemin maximal passe nécessairement par l'un des circuits critiques. Comme les circuits critiques sont ceux qui correspondent à un « gain » marginal (i.e. par unité de hauteur) maximal, nous en avons déduit la structure asymptotique K-périodique de la suite étudiée.

I. DÉFINITION DU PROBLÈME, NOTATIONS, HYPOTHÈSES

DÉFINITION : Nous considérons un graphe orienté, fortement connexe, noté $G=(X, U)$ tel que $X=\{1, 2, \ldots, s\}$. A chaque arc (i, j) de U sont associées une hauteur h_{ij} entière non négative et une valeur v_{ij} réelle. Un chemin μ sera donc évalué par :

- sa hauteur $H(\mu)$ égale à la somme des hauteurs des arcs de μ;
- sa valeur $V(\mu)$ égale à la somme des valeurs des arcs de μ.

Soulignons que les chemins que nous considérons dans tout l'article ne sont pas nécessairement simples et que, par conséquent, pour chacune des deux valuations, chaque arc est compté avec son ordre de multiplicité.

Sur l'exemple de la figure (1), le chemin $\mu=(1, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 3)$ a comme hauteur 8.

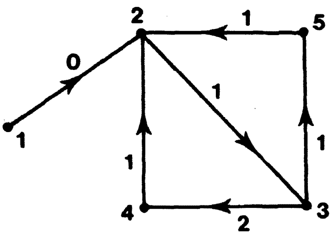

Figure 1. — Les arcs sont valués par une hauteur.

NOTATIONS : On se fixe deux sommets quelconques i_0 et j_0, et l'on note :

$C_n(i_0, j_0)$ l'ensemble des chemins de G d'origine i_0, d'extrémité j_0 et de hauteur n;

$\alpha_n(i_0, j_0)$ la valeur maximale d'un chemin de $C_n(i_0, j_0)$;

$C(i_0, j_0) = \bigcup_{n \geq 0} C_n(i_0, j_0)$.

Hypothèses préliminaires

Hypothèse H 1 : Nous supposons qu'il existe en chaque sommet une boucle de hauteur unité; cette hypothèse n'est pas indispensable pour le calcul de $\alpha_n(i_0, j_0)$, mais est nécessaire pour l'étude asymptotique; en effet, si n_0 est la hauteur minimale (calculable par un algorithme classique) d'un chemin de $C(i_0, j_0)$, nous avons grâce à cette hypothèse :

$$\forall n \geqq n_0, \qquad C_n(i_0, j_0) \neq \emptyset.$$

Hypothèse H 2 : Nous supposerons également que G ne possède pas de circuits de hauteur nulle et de valeur strictement positive; en effet si un tel circuit existe, nous avons :

$$\exists n_1 \in N, \quad \forall n \geqq n_1, \qquad \alpha_n(i_0, j_0) = +\infty.$$

En effet, supposons l'existence d'un tel circuit et soit k un sommet de ce circuit; G étant fortement connexe, il existe un chemin de i_0 à k de hauteur h_0 et un chemin de k à j_0 de hauteur h_1; il est alors clair que $n_1 = h_0 + h_1$ (voir *fig.* 2) satisfait la condition précédente.

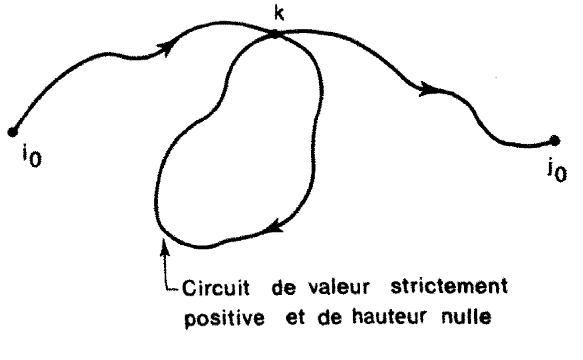

Figure 2

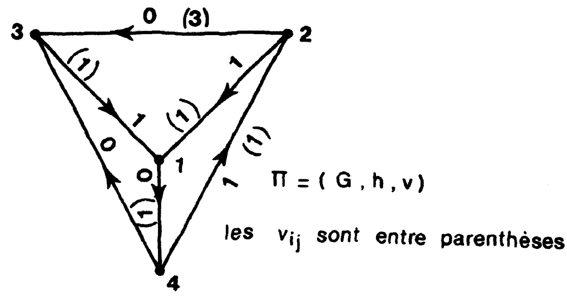

Figure 3 *a*

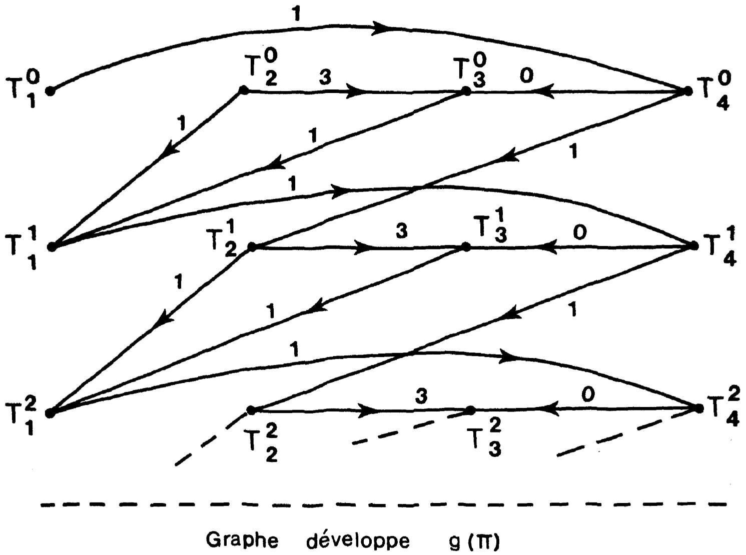

Figure 3 *b*

II. RECHERCHE D'UN CHEMIN DE VALEUR MAXIMALE DE HAUTEUR DONNÉE

A. Graphe développé

Nous associons au triplet $\pi=(G, h, v)$ le graphe développé $g(\pi)=(T, V)$ valué par la fonction w où T, V et w sont définis par :

$$T=\bigcup_{i \in x} T_i \quad \text{et} \quad T_i=\bigcup_{n \geq 0} T_i^n;$$

$$V=\bigcup_{(i,\, j) \in U} V_{ij} \quad \text{et} \quad V_{ij}=\bigcup_{n \geq 0} (T_i^n,\, T_j^{n+h_{ij}});$$

$$\forall n \geq 0, \quad \forall (i, j) \in U, \qquad w(T_i^n,\, T_j^{n+h_{ij}})=v_{ij}.$$

Les figures 3*a* et 3*b* montrent la correspondance entre le graphe doublement valué G et le graphe développé associé $g(\pi)$; tout arc (T_i^p, T_j^q) du graphe développé $g(\pi)$ est tel que : $q \geqq p$.

Le graphe $g(\pi)$ est un graphe infini dont la structure (au sens de sa topologie) est périodique. Dans la suite, nous noterons $W(\nu)$ la valeur d'un chemin ν de $g(\pi)$.

B. Propriétés du graphe $g(\pi)$

Les trois propriétés qui suivent permettent de montrer que le calcul, pour une hauteur n fixée, de la valeur maximale d'un chemin d'origine i_0 et d'extrémité j_0 se ramène au calcul d'un chemin maximal dans le graphe développé $g(\pi)$.

PROPRIÉTÉ 1 : *Il existe une bijection φ de $C_n(i_0, j_0)$ sur l'ensemble des chemins de $g(\pi)$ d'origine $T_{i_0}^0$ et d'extrémité $T_{j_0}^n$, de plus nous avons :*

$$\mu \in C_n(i_0, j_0) \quad \Rightarrow \quad V(\mu) = W(\varphi(\mu)).$$

Preuve : Soit $\mu = (k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}, k_p)$ un chemin de $C_n(i_0, j_0)$ ($k_0 = i_0$ et $k_p = j_0$), nous lui faisons correspondre par l'application φ le chemin ν de $g(\pi)$ défini par : $\nu = (T_{k_0}^{n_0}, T_{k_1}^{n_1}, \ldots, T_{k_p}^{n_p})$ où :

$$(a) \qquad n_0 = 0,$$

$$(b) \qquad n_q = n_{q-1} + h_{k_{q-1} k_q} \quad \text{pour} \quad 1 \leqq q \leqq p.$$

$\nu = \varphi(\mu)$ est bien un chemin d'après la définition des arcs du graphe développé. D'autre part (*a*) et (*b*) impliquent :

$$n_p = \sum_{q=1}^{p} h_{k_{q-1} k_q} = n \qquad [\text{puisque } \mu \in C_n(i_0, j_0)],$$

$\varphi(\mu)$ est donc bien un chemin d'origine $T_{i_0}^0$ et d'extrémité $T_{j_0}^n$ dans $g(\pi)$.

Considérons maintenant un chemin quelconque ν de $g(\pi)$ d'origine $T_{i_0}^0$ et d'extrémité $T_{j_0}^n$, notons $\nu = T_{k_0}^0 T_{k_1}^{n_1} \ldots T_{k_{p-1}}^{n_{p-1}} T_{k_p}^n$ ce chemin avec $k_0 = i_0$ et $k_p = j_0$. Par définition des arcs de $g(\pi)$ nous avons nécessairement : $n_1 = h_{k_0 k_1}$ et $n_q = n_{q-1} + k_{k_{q-1} k_q}$ $2 \leqq q \leqq p-1$; ν est l'image par φ du chemin $\mu = (k_0 k_1, \ldots, k_{p-1}, k_p)$ de G, donc φ est surjective; d'autre part, tout chemin μ' distinct de μ dans G a une image par φ distincte de ν donc φ est injective. Enfin, par définition de la valuation des arcs de $g(\pi)$ nous avons :

$$W(\varphi(\mu))=\sum_{q=1}^{p} w(T_{k_{q-1}}^{n_{q-1}} T_{k_q}^{n_q})=\sum_{q=1}^{p} v(k_{q-1} k_q)=V(\mu).$$

Sur notre exemple, au chemin $\mu=(1, 4, 2, 3)$ correspond le chemin $\varphi(\mu)=(T_1^0, T_4^0, T_2^1, T_3^1)$ de valeur commune 5 (*fig.* 3 *a* et 3 *b*).

PROPRIÉTÉ 2 : *Si* ψ *est un circuit de* $g(\pi)$, *nous avons :*

(*a*) $$H(\varphi^{-1}(\psi))=0;$$

(*b*) $$W(\psi)\leqq 0.$$

Preuve (*a*) : Soit $\psi=(T_{k_0}^{n_0}, T_{k_1}^{n_1}, \ldots, T_{k_p}^{n_p})$ un circuit de $g(\pi)$ ($n_p=n_0$ et $k_p=k_0$), nous avons par construction :

$$n_0\leqq n_1\leqq \ldots \leqq n_{p-1}\leqq n_p=n_0,$$

donc :

$$n_0=n_1=n_2=\ldots=n_p;$$

d'autre part, chaque arc $(T_{k_{q-1}}^{n_0}, T_{k_q}^{n_0})$ correspond à l'arc (k_{q-1}, k_q) de G, qui est de hauteur nulle.

Tout circuit de $g(\pi)$ est donc l'image d'un circuit de hauteur nulle de G.

La preuve de (*b*) résulte directement de l'hypothèse de non-existence de circuits de hauteur nulle et de valeur strictement positive dans G (hypothèse H 2). (*b*) exprime qu'aucun circuit de $g(\pi)$ n'est absorbant pour la recherche d'un chemin de valeur maximale.

PROPRIÉTÉ 3 : *Si* ν *est un chemin de valeur maximale de* $g(\pi)$, *d'origine* $T_{i_0}^0$ *d'extrémité* T_j^n, *d'une part* $\mu=\varphi^{-1}(\nu)$ *est un chemin de valeur maximale de* $C_n(i_0, j_0)$ *et d'autre part* $V(\mu)=W(\nu)$.

La propriété 3 résulte des propriétés 1 et 2.

Nous avons donc ramené le problème de la recherche d'un chemin de valeur maximale d'une hauteur donnée à celui de la recherche d'un chemin maximal sur un graphe ne possédant pas de circuits absorbants, nous pouvons alors résoudre ce dernier problème par l'un des algorithmes classiques (Ford, Dijsktra, ...) [1]. Remarquons que pour une hauteur donnée n, il suffira de considérer le sous-graphe de $g(\pi)$ engendré par $\bigcup_{0\leqq k\leqq n} \{T_i^k, i\in X\}$.

Sur notre exemple, recherchons le chemin de valeur maximale de $C_2(1, 3)$; $g(\pi)$ étant ici sans circuits, l'algorithme de Bellman fournit rapidement la solution :

$$\nu=(T_1^0,\ T_4^0,\ T_3^0,\ T_1^1,\ T_4^1,\ T_2^2,\ T_3^2) \qquad \text{et} \qquad W(\nu)=7$$

et dans G :

$$\mu=\varphi^{-1}(\nu)=(T_1,\ T_4,\ T_3,\ T_1,\ T_4,\ T_2,\ T_3) \qquad \text{et} \qquad V(\mu)=7.$$

C. Extensions

Notons $C_n(.\,, j_0)$, $C_n(i_0,\ .)$ et $C_n(.\,,\ .)$ l'ensemble des chemins de G, de hauteur n, et respectivement :

- d'extrémité j_0, d'origine quelconque;
- d'origine i_0, d'extrémité quelconque;
- d'origine et d'extrémité quelconques.

A l'ensemble $C_n(.\,, j_0)$ correspond le problème de la recherche d'un chemin de valeur maximale de hauteur n et d'extrémité terminale j_0. Les problèmes associés aux deux autres ensembles sont définis de manière analogue. Pour $C_n(.\,, j_0)$, nous créons dans G un sommet 0 lié à tout sommet i par un arc $(0, i)$ de hauteur et de valeur nulles et dans $g(\pi)$ un sommet T_0^0 lié à tout sommet T_i^0 par un arc $(T_0^0,\ T_i^0)$ de valuation nulle, il faut alors déterminer un chemin maximal dans $g(\pi)$ d'origine T_0^0 et d'extrémité $T_{j_0}^n$. Pour $C_n(i_0,\ .)$ nous créons dans G un sommet ω, lié à tout sommet i par un arc (i, ω) de hauteur et de valeur nulles et dans $g(\pi)$ un sommet T_ω^∞, lié à tout sommet T_i^n par un arc $(T_i^n,\ T_\omega^\infty)$ de valuation nulle; il faut alors déterminer un chemin maximal dans $g(\pi)$ d'origine $T_{i_0}^0$ et d'extrémité T_ω^∞. Pour $C_n(.\,,\ .)$, on crée dans G les sommets 0 et ω et les arcs correspondants, et dans $g(\pi)$ les sommets T_0^0 et T_ω^∞ et les arcs correspondants et l'on détermine dans $g(\pi)$ un chemin de valeur maximale de T_0^0 à T_ω^∞.

Illustrons ces résultats par le calcul de $C_2(.\,,\ .)$ pour l'exemple des figures 3 *a* et 3 *b*.

Le graphe associé est celui de la figure 4 ci-après; nous créons les sommets T_0^0 et T_ω^∞ et nous cherchons un chemin maximal d'origine T_0^0 et d'extrémité T_ω^∞.

Le chemin de valeur maximale de hauteur égale à 2 est donc le chemin $(T_2\, T_3\, T_1\, T_4\, T_2\, T_3)$ de G; sa valeur est égale à 9. Remarquons que ce chemin n'est pas simple dans G mais que dans $g(\pi)$, il existe un chemin élémentaire de même valeur.

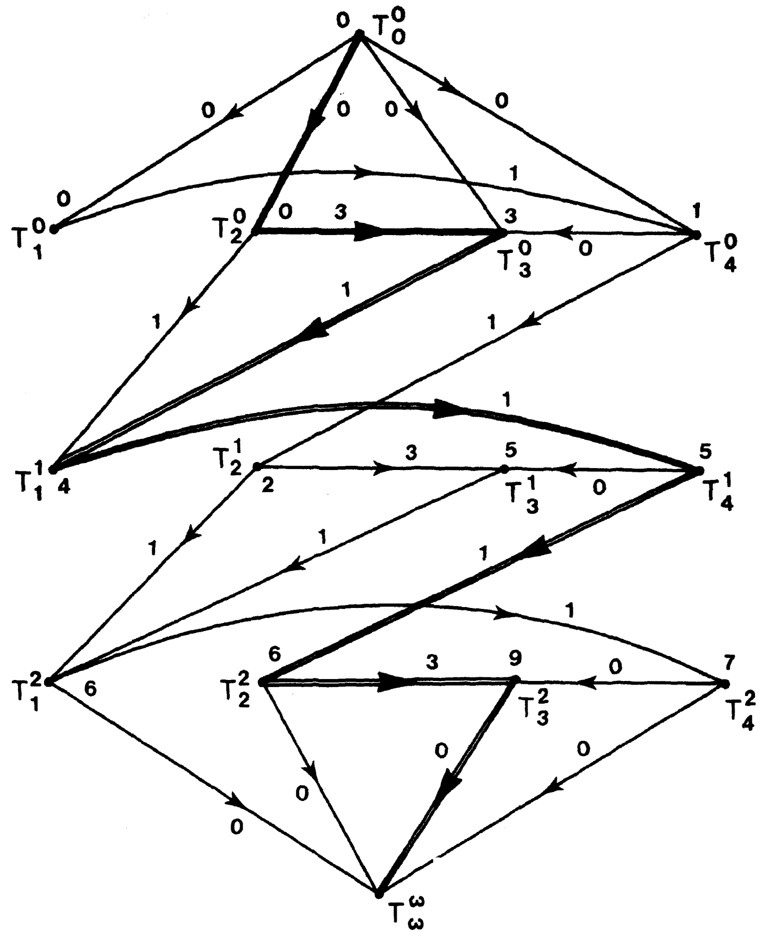

Figure 4

REMARQUE : Dans cette première partie, il n'a pas été nécessaire de supposer l'existence d'une boucle de hauteur unité en chaque sommet; les exemples que nous avons choisis n'en comportent d'ailleurs pas.

III. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE POUR UN GRAPHE FORTEMENT CONNEXE

A. Suite *K* périodique au sens large

L'objet de cette étude est de montrer que la suite $\alpha_n(i_0, j_0)$ possède une structure « asymptotiquement périodique »; nous appellerons ce type de suite : suite *K-périodique au sens large*, et nous les définissons comme suit.

U_n est une suite K-périodique au sens large s'il existe un entier N_0 et un couple (K, ω) tel que :

$$\forall n \geqq N_0 \left\{ \begin{array}{l} n-N_0=Kq+r \\ 0 \leqq r<K \end{array} \right. \Rightarrow \quad U_n=U_{N_0+r}+q\omega.$$

K sera appelé le facteur de périodicité de la suite; ω est la période de la suite U_n et nous notons $f=K/\omega$ la fréquence de la suite U_n.

La terminologie que nous avons adoptée ne correspond pas à celles des fonctions périodiques en mathématique. Par exemple, si K est égal à 1, la suite u_0 est une progression arithmétique de raison ω et non une suite périodique au sens classique. Nous avons malgré tout conservé ces notations par souci d'unification avec le langage couramment employé dans les applications aux réseaux de Petri.

Nous supposerons ici qu'il existe un circuit de valeur strictement positive. Dans le cas contraire, notons $\beta(i_0, j_0)$ la valeur maximale d'un chemin (élémentaire puisqu'il n'existe pas de circuit absorbant) de $C(i_0, j_0)$, et h_0 sa hauteur; nous avons alors la relation suivante :

$$\forall n \geqq h_0, \quad \alpha_n(i_0, j_0)=\beta(i_0, j_0);$$

la suite $\alpha_n(i_0, j_0)$ est donc constante à partir de l'indice h_0; c'est un cas particulier de suite 1-périodique au sens large avec $N_0=h_0$ et $\omega=0$.

Dans la suite, nous substituerons la notation α_n à $\alpha_n(i_0, j_0)$.

B. Circuit critique de G

Définition : Nous associons à tout circuit ρ de G l'indice $\alpha(\rho)$ défini par :

$$\alpha(\rho)=V(\rho)/H(\rho) \qquad (\alpha(\rho)=-\infty \text{ si } \mathrm{H}(\rho)=0);$$

Définition : Si $CE(G)$ désigne l'ensemble des circuits élémentaires de G, nous appelons indice maximal le nombre réel défini par :

$$\alpha=\max_{CE(G)} \alpha(\rho);$$

Définition : Un circuit ρ est dit critique si $\alpha(\rho)=\alpha$.

Remarquons que l'existence d'un circuit de valeur strictement positive et de hauteur non nulle (hypothèse H 2) implique que l'indice maximale α de G est strictement positif.

Commentaire sur l'hypothèse H 1 : Pour l'étude asymptotique de la suite α_n, l'existence d'une boucle de hauteur unité en chaque sommet est essentielle.

En effet, dans le cas contraire, il peut exister des sous-suites infinies de valeurs de n pour lesquelles l'ensemble $C_n(i_0, j_0)$ est vide.

Cependant, il est suffisant de supposer que le graphe G possède une boucle de hauteur non nulle en chaque sommet. En effet, si G possède une boucle au sommet i de hauteur $h_{ii}(\geqq 1)$ et de valeur v_{ii}, on peut sans modifier les valeurs de la suite $\alpha_n(i_0, j_0)$ la remplacer par une boucle de hauteur unité et de valeur v_{ii}/h_{ii}.

Dans la suite, nous serons amenés à considérer la décomposition d'un chemin de G en un chemin élémentaire et un sous-ensembles de circuits élémentaires empruntés au moins une fois.

Le lemme suivant montre pourquoi l'indice maximal α du graphe G peut se calculer sur l'ensemble fini des circuits élémentaires de G.

LEMME 1 : *Si ρ est un circuit critique, tous les circuits élémentaires de la décomposition de ρ sont critiques.*

Preuve : Considérons un circuit critique ρ de G; d'après le lemme de Koenig [1], ρ est décomposable en circuits élémentaires $\rho_i\,(i=1, 2, \ldots, p)$ où chaque circuit ρ_i est emprunté n_i fois par $\rho\,(n_i \in \mathbb{N})$.

Soient $V(\rho_i)$ et $H(\rho_i)$ la valeur et la hauteur du circuit ρ_i, nous avons :

$$H(\rho)=\sum_{1}^{p} n_i \times H(\rho_i)$$

et :

$$V(\rho)=\sum_{1}^{p} n_i \times V(\rho_i).$$

Supposons que l'un des circuits élémentaires ρ_{i_0} soit tel que :

$$\alpha(\rho_{i_0})<\alpha;$$

nous avons alors : $V(\rho_{i_0})<\alpha H(\rho_{i_0})$ alors que, par définition de α, tous les autres vérifient :

$$\forall i \neq i_0, \quad V(\rho_i) \leqq \alpha H(\rho_i).$$

En multipliant par n_i et en sommant sur l'ensemble des circuits élémentaires, il vient :

$$V(\rho)<\alpha H(\rho),$$

ce qui contredit l'hypothèse que ρ est un circuit critique. Il en résulte que tous les circuits de la décomposition de ρ en circuits élémentaires sont critiques. ■

L'étude du comportement asymptotique de la suite α_n va maintenant être développée en deux étapes.

Dans la première partie, nous analysons le cas où il n'existe qu'un seul circuit critique; l'étude de ce cas met en évidence les idées essentielles pour résoudre le problème, à savoir l'examen de sous-suites bien choisies puis l'espace d'interpolation dû à la présence des boucles de hauteur unitaire en chaque sommet.

Dans la deuxième partie, nous montrons par une démarche assez voisine que tous les circuits critiques « se valent » d'une certaine manière vis-à-vis du critère et qu'il est ainsi possible d'aboutir à une conclusion de même nature que dans le cas précédent.

C. Cas d'un circuit critique unique

Nous notons ρ^* le circuit élémentaire critique unique et k_0 un sommet de ce circuit. G étant fortement connexe, il existe (cf. *fig.* 5) :

– un chemin μ d'origine i_0 et d'extrémité k_0 (notons h_1 sa hauteur et Δ_1 sa valeur);

– un chemin ν d'origine k_0 et d'extrémité j_0 (notons h_2 sa hauteur et Δ_2 sa valeur).

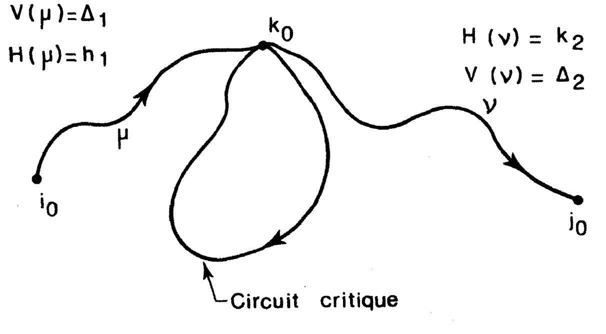

Figure 5

Remarquons que, pour tout entier k, le chemin $\mu(\rho^*)^k\nu$ (obtenu par concaténation du chemin μ, de k « parcours » du circuit ρ^* et du chemin ν) a comme hauteur $h_1+h_2+kH(\rho^*)$ et comme valeur $\Delta_1+\Delta_2+kV(\rho^*)$. Dans la suite nous noterons s_k la suite définie par :

$$s_k=h_1+h_2+kH(\rho^*), \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Nous nous intéressons alors à la sous-suite β_k de la suite α_n définie par :

$$\beta_k = \alpha_{k_1 + k_2 + k H(\rho^*)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Nous démontrons alors deux lemmes.

LEMME 2 : *Il existe un entier K_0 tel que, pour tout entier $k \geqq K_0$, le chemin de valeur maximale de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ passe par le circuit critique ρ^*.*

Preuve : Nous notons $\{\rho_i,\ i=1, 2, \ldots, p\}$ l'ensemble fini des circuits élémentaires de G qui ne sont pas critiques, et nous posons :

$$\forall i, \quad 1 \leqq i \leqq p, \qquad \alpha(\rho_i) = \alpha_i = \alpha - \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i > 0$$

et :

$$\varepsilon = \min_{i=1,\, p} \{\varepsilon_i\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Considérons alors un chemin ψ de G appartenant à $C_{s_k}(i_0, j_0)$ et n'empruntant aucun circuit élémentaire critique. D'après le lemme 1, ψ n'emprunte aucun circuit critique. D'après le lemme de Koenig, ψ est composé :

– d'un chemin élémentaire ψ' de hauteur h et de valeur Δ;

– des circuits élémentaires non critiques ρ_i empruntés n_i fois $(i=1, 2, \ldots, p;\ n_i \in \mathbb{N})$.

Nous déterminons une majoration de la valeur de ψ.

Nous avons par définition :

$$V(\psi) = \Delta + \sum_{i=1}^{p} n_i V(\rho_i) = \Delta + \sum_{i=1}^{p} n_i \alpha_i H(\rho_i)$$

$$= \Delta + \sum_{i=1}^{p} n_i (\alpha - \varepsilon_i)\, H(\rho_i) = \Delta + \alpha \sum_{i=1}^{p} n_i H(\rho_i) - \sum_{i=1}^{p} n_i \varepsilon_i H(\rho_i).$$

Par définition de ε, nous avons :

$$V(\psi) \leqq \Delta + (\alpha - \varepsilon)\, H(\psi);$$

et comme ψ appartient à $C_{s_k}(i_0, j_0)$:

$$V(\psi) \leqq \Delta + (\alpha - \varepsilon)\, (h_1 + h_2 + k H(\rho^*))$$

et :

$$V(\psi) \leqq k(\alpha - \varepsilon)\, H(\rho^*) + c$$

(où c est une constante indépendante de k et de ψ).

Or, pour toute valeur de k, nous savons que le chemin $\mu(\rho^*)^k\nu$ de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ a comme valeur $k\alpha H(\rho^*)+\Delta_1+\Delta_2$, il en résulte donc qu'il existe un entier K_0 tel que (voir *fig.* 6) :

$$\forall k \geqq K_0, \quad k(\alpha-\varepsilon) H(\rho^*)+c<k\alpha H(\rho^*)+\Delta_1+\Delta_2.$$

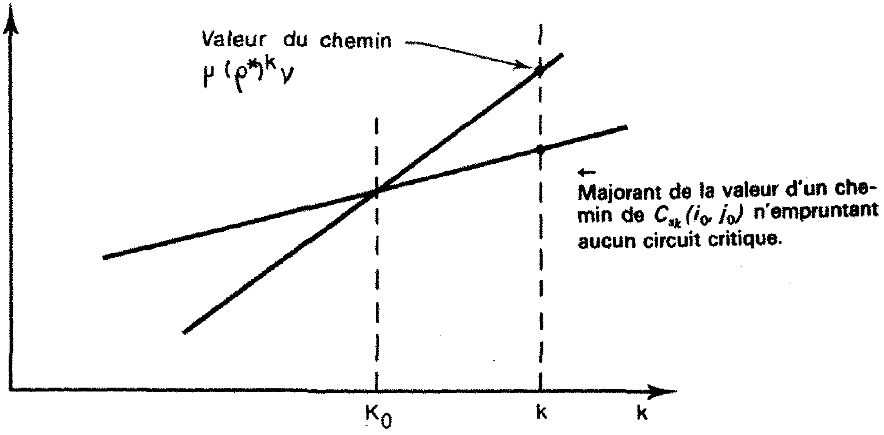

Figure 6

Nous en concluons donc que, pour $k \geqq K_0$, le chemin de valeur maximale de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ passe par le circuit critique ρ^*. ■

Le lemme suivant montre qu'à partir du rang K_0, les chemins de valeur maximale de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ s'obtiennent à partir de l'un quelconque d'entre eux par un « parcours supplémentaire » du circuit critique ρ^*.

Si K_0 est l'entier défini par le lemme 2, nous avons le :

Lemme 3 : *Si, pour une valeur de* $k(\geqq K_0)$, $\mu_1\rho^*\nu_1$ *est le chemin de valeur maximale de* $C_{s_k}(i_0, j_0)$ *alors* $\forall p \geqq 0$, $\mu_1(\rho^*)^{p+1}\nu_1$ *est un chemin de valeur maximale de* $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$.

Preuve : Nous raisonnons par récurrence sur p.

Soit $k \geqq K_0$ et $\mu_1\rho^*\nu_1$ un chemin de valeur maximale de $C_{s_k}(i_0, j_0)$; nous savons qu'un tel chemin existe d'après le lemme 2 (soulignons que la notation employée n'implique pas que les chemins μ_1 et ν_1 n'empruntent pas le circuit ρ^*; nous « isolons » seulement un parcours de ρ^* par le chemin optimal).

1. La propriété est vraie pour $p=0$ d'après le lemme 2.

2. Supposons la propriété vraie pour $p-1$ ($p \geqq 1$). Soit alors $\mu_2 \rho^* \nu_2$ un chemin de valeur maximale de $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$; le sous-chemin $\mu_2 \nu_2$ a comme hauteur s_{k+p-1}, par conséquent d'après l'hypothèse de récurrence nous avons :

$$V(\mu_2 \nu_2) \leqq V(\mu_1 (\rho^*)^p \nu_1).$$

Mais par construction, le chemin $\mu_1 (\rho^*)^{p+1} \nu_1$ est un chemin de $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$, il en résulte que :

$$V(\mu_2 \rho^* \nu_2) \geqq V(\mu_1 (\rho^*)^{p+1} \nu_1),$$

soit :

$$V(\mu_2 \nu_2) + V(\rho^*) \geqq V(\mu_1 (\rho^*)^p \nu_1) + V(\rho^*)$$

et :

$$V(\mu_2 \nu_2) \geqq V(\mu_1 (\rho^*)^p \nu_1).$$

On a donc :

$$V(\mu_2 \nu_2) = V(\mu_1 (\rho^*)^p \nu_1)$$

et :

$$V(\mu_2 \rho^* \nu_2) = V(\mu_1 (\rho^*)^{p+1} \nu_1);$$

le chemin $\mu_1 (\rho^*)^{p+1} \nu_1$ est donc de valeur maximale dans $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$. ■

COROLLAIRE : *D'après le lemme* 3, *nous constatons que la suite* α_{s_k} *est* 1-*périodique au sens large et de période* $V(\rho^*)$.

Comme nous avons supposé l'existence d'une boucle de hauteur unité en chaque sommet de G, nous avons la propriété suivante :

LEMME 4 : *Soit k un sommet du circuit critique ρ^*; pour tout entier r tel que :*

$$0 \leqq r < H(\rho^*),$$

il existe :

— *un chemin μ d'origine i_0, d'extrémité k et de hauteur $H(\mu)$ $(=h_1+r)$;*

— *un chemin ν d'origine k, d'extrémité j_0 et de hauteur $H(\nu)$ $(=h_2)$;*

tels que :

$$H(\mu) + H(\nu) = h_1 + h_2 + r.$$

Notons s_k^r la sous-suite définie par :

$$s_k^r = h_1 + h_2 + r + k\,H(\rho^*), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme 3 précédent, les $H(\rho^*)$ sous-suites α_{s_k} sont 1-périodiques au sens large et de période $V(\rho^*)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le :

THÉORÈME 1 : *Soit α_n la valeur d'un chemin maximal de $C_n(i_0, j_0)$, la suite α_n est K-périodique au sens large, de période ω, et l'on a :*

$$K = H(\rho^*) \qquad et \qquad \omega = V(\rho^*).$$

La fréquence de α_n est alors égale à $1/\alpha$.

Preuve : A chaque valeur de r, le lemme 2 associe un entier K_r et nous définissons alors l'entier K^* par :

$$K^* = \max_{r=1,\ H(\rho^*)} \{K_r\}$$

et nous lui associons l'entier N^* défini par :

$$N^* = h_1 + h_2 + K^* H(\rho^*).$$

Considérons alors un entier n tel que :

$$(a) \qquad n - (h_1 + h_2) = k\, H(\rho^*) + r,$$

avec :

$$0 \leqq r < H(\rho^*) \qquad \text{et} \qquad k \geqq K^*.$$

Nous avons par définition : $n = s_k^r$ et d'après le lemme 3 précédent, nous pouvons écrire :

$$\alpha_{s_k^r} = \alpha_{s_{K^*}^r} + (k - K^*)\ V(\rho^*).$$

Or, par définition des entiers K^* et N^* :

$$(n - N^*) = (k - K^*)\ H(\rho^*) + r$$

et :

$$s_{K^*}^r = h_1 + h_2 + K^* H(\rho^*) + r = N^* + r;$$

il en résulte que :

$$\alpha_n = \alpha_{s_k^r} = \alpha_{N^* + r} + q\, V(\rho^*),$$

où :

$$(n - N^*) = q\, H(\rho^*) + r, \qquad 0 \leqq r < H(\rho^*).$$

Or, pour tout $n \geqq N^*$, n peut être mis sous la forme (a). La suite α_n est donc K-périodique au sens large. ■

REMARQUE : A chaque valeur de r, le lemme 3 associe également un chemin μ_r et un chemin ν_r tels que, à partir d'un certain rang, le chemin $\mu_r(\rho^*)^k \nu_r$ soit le chemin optimal de $C_{h_1+h_2+r+k H(\rho^*)}(i_0, j_0)$.

Il en résulte que, pour n suffisamment grand, si nous appelons μ_r et ν_r les pré et post chemins optimaux, la suite des pré (resp. post) chemins optimaux de $C_n(i_0, j_0)$, $C_{n+1}(i_0, j_0) \ldots C_{n+H(\rho^*)}(i_0, j_0)$ est une permutation des μ_r ($r=1, 2, \ldots, H(\rho^*)$) [respectivement des ν_r ($r=1, 2, \ldots, H(\rho^*)$)].

Exemple 1 : Nous illustrons le théorème précédent par un exemple.

Considérons le graphe G de la figure 7 a ci-après; les boucles de hauteur unité ne sont pas représentées et nous supposons qu'elles ont une valeur nulle. Les hauteurs des arcs sont entourées d'un rectangle, les valeurs sont entourées d'un cercle. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la suite $\alpha_n(2, 3)$.

En dehors des boucles en chaque sommet dont l'indice est nul, G possède les trois circuits élémentaires suivants :

$$\psi_1=(1, 4, 2, 1) \quad \text{tel que} \quad V(\psi_1)=3 \quad \text{et} \quad H(\psi_1)=2,$$

$$\psi_2=(1, 4, 3, 1) \quad \text{tel que} \quad V(\psi_2)=2 \quad \text{et} \quad H(\psi_2)=1,$$

et :

$$\psi_3=(1, 4, 2, 3, 1) \quad \text{tel que} \quad V(\psi_3)=6 \quad \text{et} \quad H(\psi_3)=2.$$

ψ_3 est alors l'unique circuit critique de G et son indice est égal à $\alpha=3$. D'après le théorème 1, la suite $\alpha_n(2, 3)$ doit être 2-périodique au sens large. La figure 7 b représente le graphe développé associé au graphe doublement valué G. Les valeurs associées à chaque sommet sont les valeurs maximales d'un chemin d'origine T_2^0 et d'extrémité ce sommet; nous vérifions alors que le chemin associé aux arcs représentés par des traits épais sur la figure 7 b correspond au circuit critique de G; de plus, pour $n \geqq 3$, le chemin critique (i. e. de valeur maximale) d'origine T_2^0 et d'extrémité T_3^n est obtenu en prolongeant le chemin critique d'origine T_2^0 et d'extrémité T_3^{n-2} par les arcs du circuit critique (3, 1, 4, 2, 3); il en résulte que, puisque nous avons :

$$\alpha_0(2, 3)=3 \quad \text{et} \quad \alpha_1(2, 3)=5,$$

d'une part les sous-suites $\alpha_{2n}(2, 3)$ et $\alpha_{2n+1}(2, 3)$ satisfont :

$$\alpha_{2n}(2, 3)=3+6n, \qquad \alpha_{2n+1}(2, 3)=5+6n \qquad (n \geqq 1)$$

et d'autre part la suite $\alpha_n(2, 3)$ est 2-périodique de période 6. La fréquence de α_n est égale à 1/3.

D. Cas d'un nombre quelconque de circuits élémentaires critiques

Nous notons $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_c\}$ l'ensemble des circuits élémentaires critiques et :

$$P = \prod_{i=1}^{c} H(\rho_i).$$

Le lemme suivant est alors nécessaire à la suite du raisonnement :

LEMME 5 : *Étant donnés c nombres entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_c$ et P leur produit, pour toute solution entière $(q_i, 1 \leqq i \leqq c)$ de :*

(i) $$\sum_{i=1}^{c} q_i a_i \geqq cP,$$

il existe une solution entière $(\lambda_i, 1 \leqq i \leqq c)$ de :

(ii) $$\sum_{i=1}^{c} \lambda_i a_i = P,$$

telle que :

$$\forall i = 1, 2, \ldots, c, \ q_i \geqq \lambda_i.$$

Preuve : Nous notons $I = \{1, 2, \ldots, c\}$ et, pour tout élément de I, nous définissons P_i par :

$$P_i = \prod_{j \in I - \{i\}} a_i;$$

nous appelons solution canonique de (ii) la solution définie par :

$$\forall j \in I - \{i\}, \quad \lambda_j = 0, \qquad \lambda_i = P_i;$$

nous montrons alors que toute solution de (i) « domine » l'une des c solutions canoniques de (ii).

Considérons une solution q de (i), nous avons :

$$\sum_I q_i a_i \geqq cP;$$

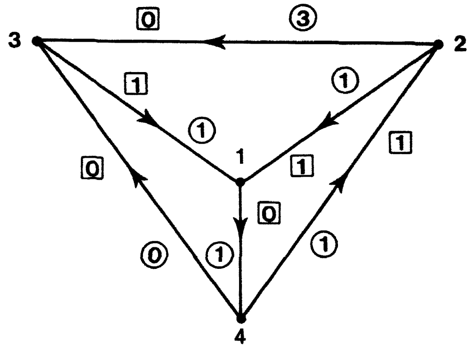

Figure 7 *a*

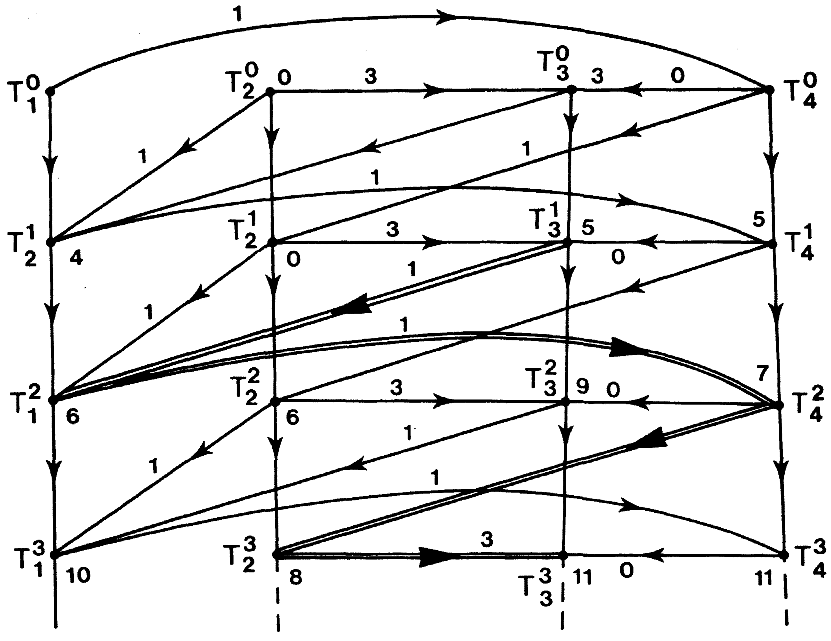

Figure 7 *b*

supposons que :

$$\forall i \in I, \quad q_i < P_i;$$

il en résulte que :

$$\sum_I q_i a_i < \sum_I a_i P_i = cP,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Il existe donc un élément i_0 de I tel que :

$$q_{i_0} \geqq P_{i_0};$$

et le vecteur q est plus grand que la solution canonique de (ii) associée à l'élément i_0. ■

Notre démarche est alors analogue à celle du cas précédent (circuit critique unique).

Nous montrons d'abord que tout chemin dont la hauteur « sur les circuits critiques » est bornée ne peut être de valeur maximale à partir d'un certain rang.

Nous montrons ensuite que les chemins de valeur maximale s'obtiennent, pour une hauteur suffisamment grande, par des parcours supplémentaires d'un circuit critique quelconque.

Nous en concluons enfin que la suite α_n est K-périodique au sens large.

Dans la suite nous notons :

I l'ensemble des circuits élémentaires critiques;

$\bar{I}$ l'ensemble des circuits élémentaires non critiques;

$P = \prod_{i \in I} H(\rho_i)$ le produit des hauteurs des circuits élémentaires critiques.

Soit ρ^* un circuit élémentaire critique et k l'un de ses sommets. G étant fortement connexe il existe :

— un chemin μ de hauteur h_1, d'origine i_0 et d'extrémité k; nous notons Δ_1 sa valeur;

— un chemin ν de hauteur h_2, d'origine k et d'extrémité j_0; nous notons Δ_2 sa valeur.

Nous définissons alors la suite s_k par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad s_k = h_1 + h_2 + kP$$

et nous remarquons que le chemin $\mu(\rho^*)^{kP/H(\rho^*)}\nu$ a comme hauteur s_k et comme valeur :

$$\Delta_1 + \Delta_2 + k\alpha P, \qquad (k \geqq 0)$$

(rappelons que : $\forall i \in I$, $\alpha = V(\rho_i)/H(\rho_i)$).

Nous montrons alors le :

LEMME 6 : *Il existe un entier K_0 tel que, pour tout entier k supérieur ou égal à K_0, le chemin de valeur maximale de $C_{h_1+h_2+kP}(i_0, j_0)$ vérifie :*

$$\sum_{i=1}^{c} n_i H(\rho_i) \geqq cP,$$

où n_i est le nombre de passages du chemin optimal par le circuit critique ρ_i.

Preuve : Soit ψ un chemin de $C_{s_k}(i_0, j_0)$.

D'après le lemme de Koenig, ψ est composé :

— d'un chemin élémentaire ψ' de hauteur h' et de valeur Δ';

— des circuits élémentaires ρ_i, empruntés n_i fois ($n_i \geqq 0$ et $i \in I \cup \bar{I}$).

Nous allons montrer qu'il existe un entier K_0 tel que, pour tout entier k supérieur ou égal à K_0, tout chemin ψ de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ vérifiant :

(i) $$\sum_I n_i H(\rho_i) \leqq cP \qquad (c = \mathrm{Card}(I))$$

n'est pas un chemin de valeur maximale dans $C_{s_k}(i_0, j_0)$.

La valeur du chemin ψ est égale à :

$$V(\psi) = \sum_I n_i V(\rho_i) + \sum_{\bar{I}} n_i V(\rho_i) + \Delta'.$$

Pour tout circuit non critique, nous avons :

$$\alpha(\rho_i) = \alpha_i = \alpha - \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i > 0$$

et nous notons $\varepsilon = \min \{\varepsilon_i\}$.

L'ensemble $\bar{I}$ étant fini, nous avons : $\varepsilon > 0$.

Comme pour tout circuit critique, nous avons $\alpha(\rho_i) = \alpha$ nous obtenons :

$$V(\psi) = \alpha \sum_I n_i H(\rho_i) + \sum_{\bar{I}} n_i (\alpha - \varepsilon_i) H(\rho_i) + \Delta',$$

d'où la majoration de $V(\psi)$, en utilisant l'hypothèse :

$$V(\psi) \leqq \alpha cP + (\alpha - \varepsilon) \sum_{\bar{I}} n_i H(\rho_i) + \Delta'$$

et puisque $H(\psi) = s_k = h_1 + h_2 + kP \geqq \sum_{\bar{I}} n_i H(\rho_i)$ il vient :

$$V(\psi) \leqq (\alpha - \varepsilon)\, kP + \gamma,$$

où γ est une constante qui ne dépend ni de k ni de ψ.

Considérons maintenant le chemin $\mu(\rho^*)^{kP/H(\rho^*)}\nu$, il appartient à $C_{s_k}(i_0, j_0)$ et sa valeur est égale à :

$$\alpha kP + \Delta_1 + \Delta_2.$$

Comme ε est strictement positif, il existe un entier K_0 tel que :

$$\forall k \geqq K_0 \, \alpha k P + \Delta_1 + \Delta_2 > (\alpha - \varepsilon) k P + \gamma$$

et le chemin $\mu(\rho^*)^{kP/H(\rho^*)}\nu$ « domine » tous les chemins ψ de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ vérifiant (i). ■

Le lemme 7 qui suit nous donne le moyen de passer d'un chemin de valeur maximale de $C_{s_k}(i_0, j_0)$ à un chemin de valeur maximale de $C_{s_{k+1}}(i_0, j_0)$ en parcourant « $P/H(\rho^*)$ fois de plus » l'un quelconque des circuits critiques ρ^* emprunté par le chemin optimal de $C_{s_k}(i_0, j_0)$.

LEMME 7 : *Si $\mu_1 \rho^* \nu_1$ est un chemin de valeur maximale de $C_{s_k}(i_0, j_0)$, $(k \geqq K_0)$ nous avons :*

$\forall p \geqq 0$, le chemin $\mu_1 (\rho^*)^{1+pP/H(\rho)} \nu_1$ est un chemin de valeur maximale de $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$.

Preuve : Nous raisonnons par récurrence sur p.

1. La propriété est vraie pour $p=0$ par construction.

2. Supposons la propriété vraie pour $p-1$ et soit ψ un chemin de valeur maximale de $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$.

D'après le lemme 6, si q_i désigne le nombre de passages de ψ par le circuit critique $\rho_i (i \in I)$ nous avons :

$$\sum_{i \in I} q_i H(\rho_i) \geqq cP.$$

D'après le lemme 5, il existe des entiers λ_i tels que :

(a) $$\Sigma \lambda_i H(\rho_i) = P$$

et :

(b) $$q_i \geqq \lambda_i.$$

Si nous posons :

$$\forall i \in I, \quad q'_i = q_i - \lambda_i,$$

nous pouvons faire correspondre au chemin ψ, le chemin ψ' qui ne diffère de ψ que par le nombre $(q'_i \, i \in I)$ de parcours des circuits critiques empruntés par ψ.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$V(\psi') \leqq V(\mu_1 (\rho^*)^{1+(p-1)P/H(\rho^*)} \nu_1),$$

en effet :

$$H(\psi')=H(\psi)-P=s_{k+p}-P=h_1+h_2+(k+p-1)\,P=s_{k+p-1}.$$

D'autre part, nous avons :

$$(a)\qquad V(\psi)=V(\psi')+\sum_I \alpha_i \lambda_i H(\rho_i)=V(\psi')+\alpha P$$

et puisque ψ est optimal dans $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$ qui contient le chemin $\mu_1(\rho^*)^{1+pP/H(\rho_*)}\nu_1$, nous avons :

$$V(\psi)\geqq V(\mu_1(\rho^*)^{1+pP/H(\rho^*)}\nu_1),$$

ce qui entraîne d'après (a) :

$$V(\psi')\geqq V(\mu_1(\rho^*)^{1+(p-1)P/H(\rho^*)}\nu_1.$$

Nous obtenons donc :

$$V(\psi)=V(\mu_1(\rho^*)^{1+pP/H(\rho^*)}\nu_1);$$

le chemin $\mu_1(\rho^*)^{pP/H(\rho_*)}\nu_1$ est donc optimal dans $C_{s_{k+p}}(i_0, j_0)$. ■

Il résulte de ce lemme que la sous-suite α_{s_k} est 1-périodique au sens large et de période αP.

En reprenant le même raisonnement que pour le cas d'un circuit critique unique, nous pouvons, puisque chaque sommet comporte une boucle de hauteur unité, « faire varier » les chemins μ_1 et ν_1 de telle sorte que :

$$H(\mu_1)+H(\nu_1)=h_1+h_2+r,\qquad 0\leqq r<P;$$

les P sous-suites ainsi construites sont 1-périodiques et nous pouvons démontrer le :

THÉORÈME 2 : *Soit α_n la valeur d'un chemin maximal de $C_n(i_0, j_0)$, la suite α_n est P-périodique au sens large, de période αP, où : P est le produit des hauteurs des circuits élémentaires critiques, α est l'indice maximal du graphe.*

Remarque importante : Si une suite u_n est K-périodique au sens large, de période ω, elle peut, pour tout entier k ($\geqq 1$) être considérée comme une suite K'-périodique au sens large, de période ω' où $K'=kK$ et $\omega'=k\,\omega$.

Il en résulte que, même si le théorème 2 nous assure que la suite α_n est P-périodique au sens large, il peut exister un entier p, diviseur de P, tel que la suite α_n soit également p-périodique au sens large. Nous illustrerons cette remarque dans l'exemple 2 ci-dessous.

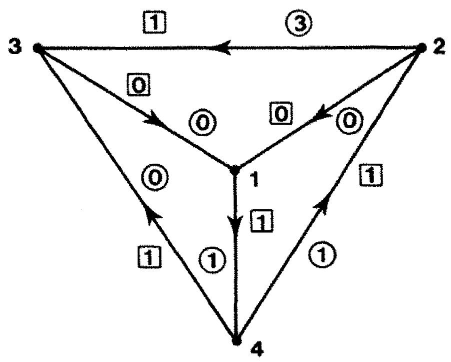

Figure 8 *a*

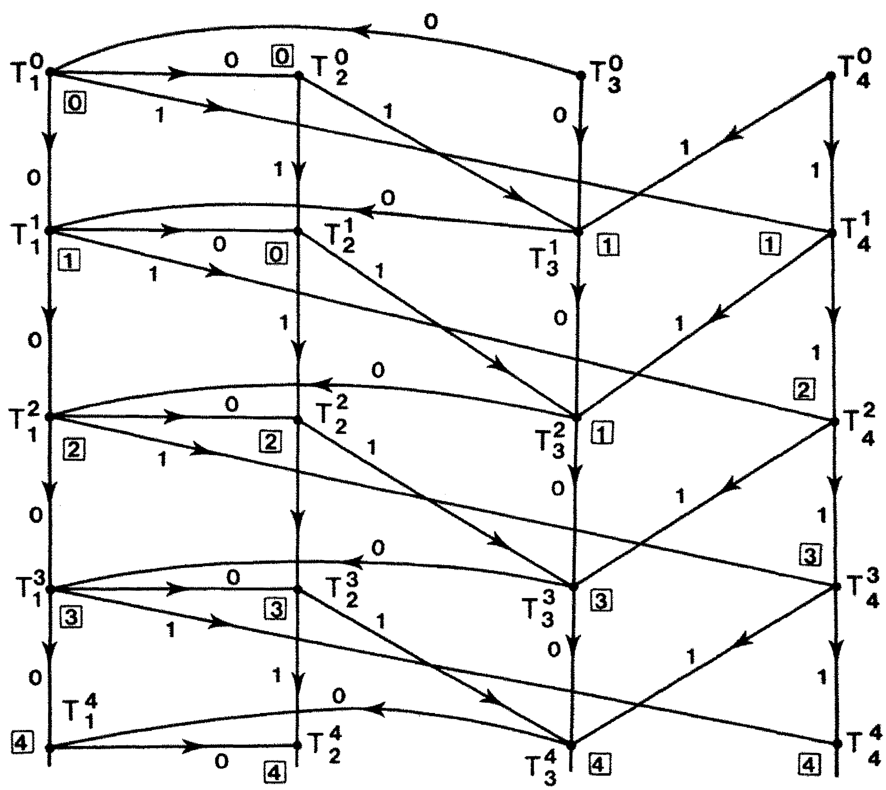

Figure 8 *b*. — Les valeurs entourées d'un carré sont les $\alpha_n(2, k)$; si une telle valeur ne figure pas, le sommet T_k^n correspondant n'est pas accessible dans le graphe développé à partir de T_2^0.

Exemple 2 : Nous illustrons le théorème 2 par un exemple. Nous considérons le même graphe que celui de la figure 7 *a* mais les hauteurs et les valeurs sont celles de la figure 8 *a* ci-après. Nous supposons toujours que les boucles de hauteur unité en chaque sommet ont une valeur nulle.

Le graphe possède les trois circuits élémentaires (en dehors des boucles d'indice nul) ψ_1, ψ_2, ψ_3 dont les indices sont respectivement égaux à 1, 1/2 et 1; ψ_1 et ψ_3 sont donc critiques et l'indice maximal est égal à $\alpha=1$. Le théorème 2 nous indique que la suite $\alpha_n(2, 3)$ que nous étudions (comme pour l'exemple 1) est une suite P-périodique au sens large de période P. Ici, nous avons $P=H(\psi_1)\,H(\psi_3)=2\times 3=6$. Si nous considérons le graphe développé associé à G, et si nous calculons les valeurs des chemins maximaux de T_2^0 à T_3^n, nous constatons qu'à partir de $n=3$, nous avons (voir *fig.* 8 *b*) :

$$\alpha_n(2, 3)=n, \qquad n\geqq 3.$$

La suite $\alpha_n(2, 3)$ est donc également 1-périodique de période 1 (ce qui ne contredit pas le théorème 2, d'après la remarque précédente) et sa fréquence est égale à 1.

CONCLUSION

Ces résultats ont été obtenus pour les graphes fortement connexes, nous les avons généralisé dans [3] au cas des graphes simplement connexes en élaborant un algorithme simple de calcul des fréquences pour les sommets des diverses composantes fortement connexes.

Les développements de nature théorique de cet article trouvent une application importante dans l'étude du fonctionnement « au plus tôt » des graphes d'événements temporisés. Ils nous permettent en effet d'une part de montrer que le comportement de chaque sous-réseau est « périodique » et d'autre part de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le marquage du réseau reste borné lors de l'exécution contrôlée au plus tôt [3].

Bien entendu, des résultats similaires peuvent être obtenus pour le cas des chemins minimaux, nous n'avons pas voulu, pour la clarté de l'exposé, les donner en parallèle. Soulignons également que les résultats de cet article sont encore vrais dans le cas d'un multigraphe doublement valué.

Nous avons également montré dans [3] que ces résultats contribuent à la résolution de certains problèmes d'ordonnancement avec recyclage [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. M. GONDRAN et M. MINOUX, *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, 1979.
2. J. CARLIER et P. CHRÉTIENNE, *Un domaine très ouvert : les problèmes d'ordonnancement*, R.A.I.R.O., V., vol. 16, n° 3, août 1982.
3. P. CHRÉTIENNE, *Les réseaux de Petri temporisés*, Thèse d'état, Université Paris-VI, juin 1983.