

P. TOLLA

**Amélioration de la stabilité numérique d'algorithmes  
de résolution de programmes linéaires à matrices  
de contraintes clairsemées**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 18, n° 1 (1984), p. 19-42

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1984\\_\\_18\\_1\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_1_19_0)

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## AMÉLIORATION DE LA STABILITÉ NUMÉRIQUE D'ALGORITHMES DE RÉOLUTION DE PROGRAMMES LINÉAIRES A MATRICES DE CONTRAINTES CLAIRSEMÉES (\*)

par P. TOLLA <sup>(1)</sup>

---

*Résumé. — La plupart des codes récents de résolution de programmes linéaires utilisent des décompositions triangulaires de la matrice de base dérivées des méthodes de Bartels et Golub ou Forrest et Tomlin. Les premières sont caractérisées par une bonne stabilité numérique et une exploitation rationnelle du faible pourcentage de coefficients non nuls de la matrice de base; les secondes permettent une assez bonne exploitation du creux de cette matrice et une mise en œuvre informatique simplifiée par rapport à la méthode de Bartels et Golub. Nous proposons, dans cet article, une méthode d'actualisation de la décomposition triangulaire de la matrice de base, proche de celle de Forrest et Tomlin, qui exploite de façon satisfaisante le creux de celle-ci tout en améliorant la précision des résultats.*

Mots clés : Programmation linéaire, méthodes LU, pivotage partiel.

*Abstract. — Most of the last linear programming codes use triangular decompositions of the basis matrix like those of Bartels and Golub or Forrest and Tomlin. The first methods take rationally advantage of the small rate of non-zero coefficients of the basis matrix and have a good numerical stability; the second methods take in consideration only the sparsity of the basis matrix by means of simple data structures. We suggest in this paper, a method, like the LU factorization of Forrest and Tomlin, which takes the best advantage of the sparsity of the basic matrix while having a better numerical stability.*

Keywords: Linear Programming, LU methods, partial pivoting.

### INTRODUCTION

Les premiers codes de résolution des programmes linéaires basés sur la méthode du simplexe de Dantzig [4] utilisaient essentiellement la forme produit de l'inverse (P.F.I.) qui consiste à conserver l'inverse de la matrice de base sous forme du produit des différentes matrices d'élimination de Gauss-Jordan construites successivement à partir des colonnes entrant dans la base. Les principaux inconvénients de cette méthode sont essentiellement une assez

---

(\*) Reçu juillet 1982.

(1) Institut de Programmation, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

mauvaise exploitation de la structure clairsemée de la matrice de base et une médiocre stabilité numérique due au fait que les différents pivots d'inversion sont choisis impérativement à l'aide du deuxième critère de Dantzig qui permet d'obtenir à chaque itération une solution de base réalisable.

L'apparition des méthodes  $LU$  qui fournissent à chaque itération une décomposition de la matrice de base en produit d'une matrice  $L$  et d'une matrice triangulaire supérieure  $U$ , a permis d'élaborer des codes plus rapides, exploitant de façon satisfaisante l'existence du faible nombre de coefficients non nuls de la matrice de base, et dotés, pour certains d'entre eux, d'une bonne stabilité numérique. La méthode d'actualisation de la décomposition  $LU$  de la matrice de base préconisée par Bartels et Golub [3] est considérée, à juste titre, comme la plus stable car elle utilise au cours de chaque itération une stratégie de pivotage partiel pour achever la triangularisation de la matrice de base. Les méthodes de Tomlin [10], Forrest et Tomlin [5] s'attachent, quant à elles, à utiliser au mieux la faible densité de coefficients non nuls de la matrice de base, sans se préoccuper de la stabilité numérique au niveau de chaque itération; la seconde est la plus souvent utilisée en raison, probablement, d'une mise en œuvre facilitée par une certaine simplicité de manipulation de la structure de données nécessaire à la conservation des différents termes de la factorisation.

Vignes a donné dans [11] des méthodes efficaces pour contrôler la stabilité numérique des logiciels de programmation mathématique.

Nous proposons, dans cet article, une nouvelle méthode, proche de celle de Forrest et Tomlin, qui exploite de façon significative le creux de la matrice des contraintes et doit bénéficier d'une stabilité numérique améliorée car elle autorise le choix du seul coefficient diagonal modifié de la matrice  $U$ .

## 1. MÉTHODES D'ACTUALISATION DE LA DÉCOMPOSITION $LU$ DE LA MATRICE DE BASE

### 1.1. Notations

Soit le programme linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = c \cdot x, \\ \text{avec } A \cdot x = b, \\ x \geq 0, \end{array} \right.$$

où  $c'$  et  $x$  sont des vecteurs de  $R^n$ ,  $b$  un vecteur de  $R^m$  et  $A$  une matrice réelle à  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

Soit  $B^{(k)}$  la matrice de base de la  $k$ -ième itération :

$$B^{(k)} = \{ A^{v_1}, A^{v_2}, \dots, A^{v_m} \},$$

où  $v_1, v_2, \dots, v_m$  sont les indices des variables de base.

Supposons que la colonne  $A^{v_{s_k}}$  de  $A$  sorte de la base et que  $A^{e_k}$  y entre. L'indice de ligne du pivot imposé par la seconde règle de Dantzig est  $s_k$ . Considérons une décomposition de  $B^{(k)}$  en  $L^{(k)}$  et  $U^{(k)}$ , matrices respectivement triangulaires inférieure et supérieure :

$$B^{(k)} = L^{(k)} \cdot U^{(k)},$$

$$L^{(k)} = \{ l_{ij}^k \}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}} \quad \text{avec} \quad l_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

$$U^{(k)} = \{ u_{ij}^k \}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}} \quad \text{avec} \quad u_{ij}^k = 0 \quad \text{si } i > j.$$

Remarquons que  $u_{ii}^k$  n'est pas nul pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, m\}$ , sinon  $B^{(k)}$  ne serait pas inversible.

Notons, de plus,  $U^{(k)} = \{ U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \dots, U_m^{(k)} \}$  où  $U_i^{(k)}$  est la  $i$ -ième colonne de  $U^{(k)}$ .

### 1.2. La décomposition $LU$ de Bartels et Golub [3]

La matrice de base  $B^{(k+1)}$  de la  $(k+1)$ -ième itération est constituée à partir de la matrice de base  $B^{(k)}$  de la  $k$ -ième itération en otant de celle-ci la colonne sortante  $A^{v_{s_k}}$  en décalant d'une position vers la gauche les colonnes d'indice  $s_k + 1$  à  $m$  et en mettant en dernière position la colonne entrante  $A^{e_k}$  :

$$B^{(k+1)} = \{ A^{v_1^k}, \dots, A^{v_{s_k-1}^k}, A^{v_{s_k+1}^k}, \dots, A^{v_m^k}, A^{e_k} \}.$$

Soit :

$$H^{(k+1)} = [L^{(k)}]^{-1} \cdot B^{(k+1)}.$$

Alors :

$$H^{(k+1)} = \{ U_1^{(k)}, \dots, U_{s_k-1}^{(k)}, U_{s_k+1}^{(k)}, \dots, U_m^{(k)}, [L^{(k)}]^{-1} \cdot A^{e_k} \}.$$

La forme de  $H^{(k+1)}$  est donnée par la figure 1.

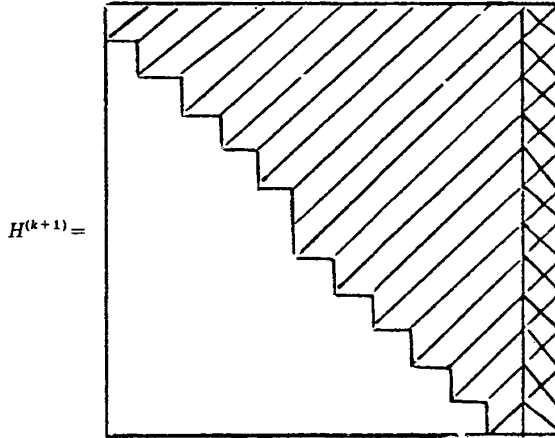


Figure 1

$H^{(k+1)}$  est une matrice supérieure d'Hessenberg; pour la triangulariser il suffit de la multiplier successivement à gauche par des matrices d'élimination de Gauss  $\Gamma_i^{(k)} = \{\gamma_{ij}^k\}_{j=1, \dots, m}$  qui sont, dans ce cas, la matrice identité avec un seul coefficient non nul sous la diagonale,  $\gamma_{i+1, i}^k$ . A chaque étape de la triangularisation, l'élément diagonal  $h_{ii}$  ou l'élément sous-diagonal  $h_{i+1, i}$  de la matrice obtenue à partir de  $H^{(k+1)}$  peuvent être choisis comme pivot; on aura par exemple :

$$\gamma_{i+1, i}^k = \begin{cases} -h_{i+1, i}/h_{i, i} & \text{si } |h_{ii}| \geq |h_{i+1, i}|, \\ -h_{i, i}/h_{i+1, i} & \text{si } |h_{ii}| < |h_{i+1, i}|. \end{cases}$$

D'où :

$$U^{(k+1)} = \Gamma_{m-1}^k \Pi_{m-1}^k \dots \Gamma_{s_k}^k \Pi_{s_k}^k H^{(k+1)},$$

où la matrice  $\Pi_i^k$  est la matrice de permutation des lignes d'indices  $i$  et  $i+1$ , ou la matrice identité suivant le choix du pivot.

Soit :

$$H^{(k+1)} = \Gamma_i^k \Pi_i^k \dots \Gamma_{s_k}^k \Pi_{s_k}^k H^{(k+1)}.$$

La multiplication à gauche de  $H^{(k+1)}$  par  $\Gamma_{i+1}^k$  modifie seulement la ligne d'indice  $i+1$  de cette matrice.

**1.3. La méthode LU de Forrest et Tomlin [5]**

La matrice de base  $B^{(k+1)}$  est identique à celle qui est utilisée dans la méthode de Bartels et Golub, de même que la matrice  $H^{(k+1)}$ . La méthode consiste à annuler dans  $H^{(k+1)} = \{h_{ij}^{k+1}\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, m}$  les coefficients  $h_{s_k, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k, m-1}^{k+1}$ .

Soit  $u_k^t = \{0, \dots, 0, u_{s_k, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k, m}^k\}$ .

Considérons le vecteur  $r_k$  solution de :

$$r_k^t U^{(k)} = u_k^t$$

et :

$$R_k = I + e_{s_k} \cdot r_k^t,$$

où  $e_{s_k}$  est le vecteur canonique ayant 1 comme composante d'indice  $s_k$  et  $I$  la matrice identité.

La matrice inverse de  $R_k$  est :

$$[R_k]^{-1} = I - e_{s_k} \cdot r_k^t.$$

D'où :

$$[R_k]^{-1} U^{(k)} = (I - e_{s_k} \cdot r_k^t) U^{(k)} = U^{(k)} - e_{s_k} u_k^t.$$

La matrice ainsi obtenue n'est autre que  $U^{(k)}$  dans laquelle on a annulé les coefficients  $u_{s_k, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k, m}^k$ .

Soit  $H'^{(k+1)} = [R_k]^{-1} H^{(k+1)}$ ; étant donné la remarque précédente,  $H'^{(k+1)}$  est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle ont été annulés les coefficients  $h_{s_k, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k, m-1}^{k+1}$ .  $H'^{(k+1)}$  est représentée par la figure 2.

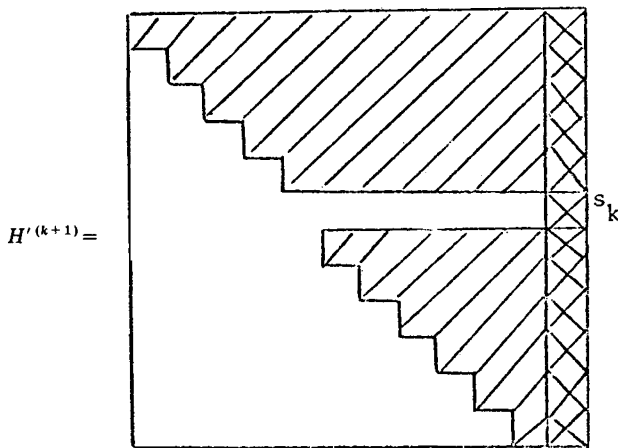


Figure 2

Pour triangulariser  $H^{(k+1)}$ , il suffira de remonter d'une position ses lignes d'indices  $s_k + 1$  à  $m$  et de mettre en dernière position la ligne d'indice  $s_k$ .

**2. AMÉLIORATION DES MÉTHODES LU DANS LE CAS DE MATRICES DE CONTRAINTES TRÈS CLAIRSEMÉES**

**2.1. Propriété**

Soit une décomposition triangulaire de la matrice de base  $B^{(k)}$  en  $L^{(k)}$  et  $U^{(k)}$ ,  $A^{e_i}$  la colonne entrant dans la base,  $A^{v_{s_k}}$  la colonne qui en sort, et  $Z^{(k)}$  définie par :

$$Z^{(k)} = [L^{(k)}]^{-1} \cdot A^{e_i}$$

Notons  $l_k$  l'indice du dernier coefficient non nul de  $Z^{(k)}$ . Alors  $l_k \geq s_k$ .

En effet si la matrice de base  $B^{(k+1)}$  de la  $(k+1)$ -ième itération est :

$$B^{(k+1)} = \{ A^{v_1}, \dots, A^{v_{s_k-1}}, A^{e_i}, A^{v_{s_k+1}}, \dots, A^{v_m} \},$$

posons :

$$H^{(k+1)} = [L^{(k)}]^{-1} \cdot B^{(k+1)}$$

Si  $l_k < s_k$ ,  $H^{(k+1)}$  est triangulaire supérieure, comme l'indique la figure 3.

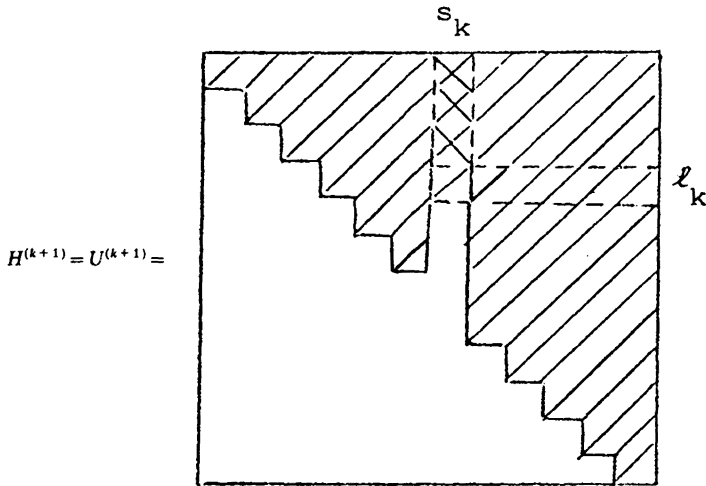


Figure 3

Dans ce cas  $U^{(k+1)}$  n'est pas inversible de même que  $B^{(k+1)}$ , ce qui est contraire au fait qu'une matrice de base est théoriquement toujours inversible.

**2.2. Méthode de Bartels et Golub modifiée**

Le résultat présenté au paragraphe 2.1 a été utilisé par Saunders, [8], Goldfarb, [6] puis plus récemment par Reid [7] pour améliorer l'exploitation du creux de la matrice  $H^{(k+1)}$ .

Constituons la matrice  $H^{(k+1)}$  à partir de  $U^{(k)}$  de la manière suivante : onots de  $U^{(k)}$  sa colonne d'indice  $s_k$ , décalons d'une position vers la gauche les colonnes d'indices  $s_k + 1$  à  $l_k$ , et mettons en  $l_k$ -ième position la colonne  $Z^{(k)}$  définie au paragraphe 2.1 :

$$H^{(k+1)} = \{ U_1^{(k)}, \dots, U_{s_k-1}^{(k)}, U_{s_k+1}^{(k)}, \dots, U_{l_k}^{(k)} Z^{(k)}, U_{l_k+1}^{(k)}, \dots, U_m^{(k)} \},$$

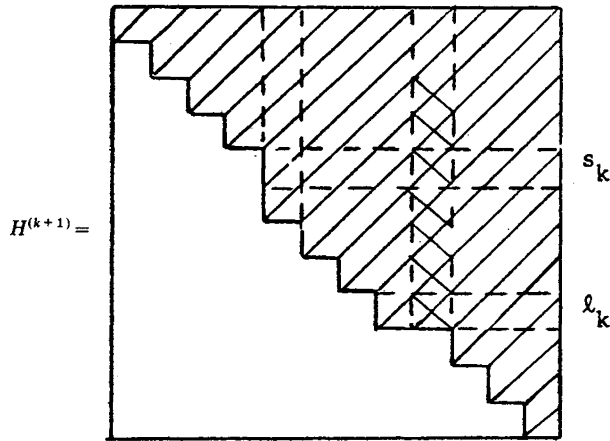


Figure 4

$H^{(k+1)}$  est une matrice supérieure d'Hessenberg; on la triangularisera en la prémultipliant par les matrices de permutation  $\Pi_i$  et les matrices d'élimination de Gauss  $\Gamma_i$  telles que celles utilisées dans la méthode de Bartels et Golub, mais, dans ce cas, seules les lignes d'indices  $s_k + 1$  à  $l_k$  de  $H^{(k+1)}$  seront modifiées.

$$U^{(k+1)} = \Gamma_{l_k}^k \Pi_{l_k}^k \dots \Gamma_{s_k}^k \Pi_{s_k}^k \cdot H^{(k+1)}.$$



### 2.3. Modifications de la méthode de Forrest et Tomlin

Nous utiliserons dans ce paragraphe la matrice  $H^{(k+1)}$  que nous avons définie au paragraphe 2.2 :

$$H^{(k+1)} = \{ h_{i,j}^{k+1} \}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}}$$

#### 2.3.1. Première modification

Soit :

$$u_k^t = \{ 0, \dots, 0, h_{s_k, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k, l_k-1}^{k+1}, 0, \dots, 0 \},$$

ou :

$$u_k^t = \{ 0, \dots, 0, u_{s_k, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k, l_k}^k, 0, \dots, 0 \}.$$

Considérons la matrice :

$$\hat{U}^{(k)} = \{ \hat{u}_{ij}^k \}_{\substack{i=1, \dots, l_k - s_k \\ j=1, \dots, l_k - s_k}}$$

avec  $\hat{u}_{ij}^k = u_{s_k+i, s_k+j}^k$  pour  $i=1, \dots, l_k - s_k$  et  $j=1, \dots, l_k - s_k$ , et les vecteurs :

$$\hat{u}^k = \begin{bmatrix} u_{s_k, s_k+1}^k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{s_k, l_k}^k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{r}^k = \begin{bmatrix} r_1^k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{l_k - s_k}^k \end{bmatrix}$$

où  $\hat{r}^k$  est solution du système linéaire triangulaire :

$$(\hat{r}^k)^t \hat{U}^{(k)} = (\hat{u}^k)^t.$$

Soit le vecteur  $r^k$  de composantes  $r_i^k$  définies par :

$$r_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq s_k, \\ 0 & \text{si } i > l_k, \\ r_{i-s_k}^k & \text{autrement,} \end{cases}$$

$$r^k = (0, \dots, 0, r_1^k, \dots, r_{l_k - s_k}^k, 0, \dots, 0)^t.$$

Définissons la matrice  $R'_k = I + c_{s_k}(r^k)^t$ .

La matrice inverse de  $R'_k$  est :

$$[R'_k]^{-1} = I - e_{s_k}(r^k)^t.$$

Soit :

$$U'^{(k)} = [R'_k]^{-1} U^{(k)} = \{ u'_{ij} \}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_{ij} = u_{ij}^k \quad \text{si } i \neq s_k, \\ u'_{s_k j} = 0 \quad \text{si } j \neq s_k \text{ et } j < l_k, \\ u'_{s_k j} = u_{s_k j}^k - \sum_{t=s_k+1}^{l_k} r_t^k u_{ij}^k \quad \text{si } j \geq l_k, \\ u'_{s_k s_k} = u_{s_k s_k}^k. \end{array} \right.$$

De même si :

$$H'^{(k+1)} = [R'_k]^{-1} H^{(k+1)},$$

$H'^{(k+1)}$  est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle les coefficients  $h_{s_k s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k l_k-1}^{k+1}$  ont été annulés et :

$$h_{s_k j}^{k+1} = h_{s_k j}^{k+1} - \sum_{t=s_k+1}^{l_k} r_t^k h_{ij}^{k+1} \quad \text{si } j \geq l_k.$$

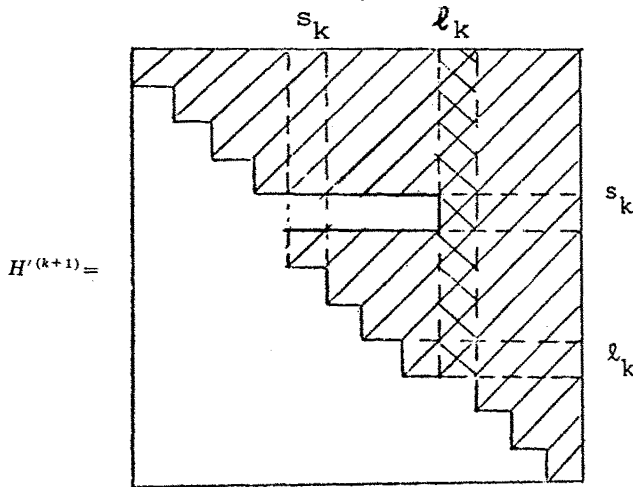


Figure 5

Pour la triangulariser, il suffira de décaler d'une position vers le haut les lignes d'indices  $s_k + 1$  à  $l_k$  et de mettre en  $l_k$ -ième position la ligne d'indice  $s_k$ .

2.3.2. Deuxième modification

Considérons la matrice  $R_k$  définie au paragraphe 1.3. Nous avons vu que le produit de  $[R_k]^{-1}$  et  $U^{(k)}$  donne une matrice dont les coefficients sont les mêmes que ceux de  $U^{(k)}$ , en dehors de  $u_{s_k, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k, m}^k$  qui sont annulés.

Soit la matrice  $H''^{(k+1)} = [R_k]^{-1} H^{(k+1)}$ .

$H''^{(k+1)}$  n'est autre que la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle tous les coefficients de la ligne d'indice  $s_k$  sont nuls en dehors du coefficient d'indice  $l_k$ .

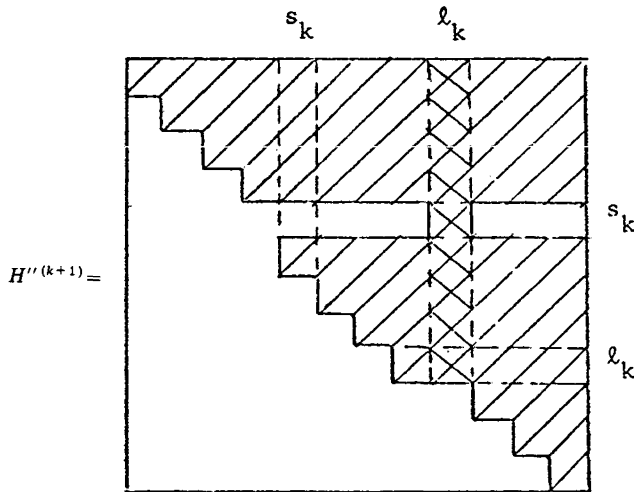


Figure 6

Comme pour  $H'^{(k+1)}$  dans le paragraphe précédent,  $H''^{(k+1)}$  sera triangularisée en remontant d'une position les lignes d'indices  $s_k + 1$  à  $l_k$  et en mettant en  $l_k$ -ième position la ligne d'indice  $s_k$ .

Cette variante fournit une matrice  $U^{(k+1)}$  semblable à la matrice triangulaire supérieure calculée à l'aide de la méthode de Forrest et Tomlin à une permutation des lignes et des colonnes près; la matrice  $U^{(k+1)}$  correspondante possède un singleton sur la ligne d'indice  $s_k$ , ce qui en facilite le stockage et simplifie la résolution des systèmes triangulaires dont elle fait partie.

2.3.3. Calcul de l'élément  $u_{l_k, l_k}^{k+1}$  de  $U^{(k+1)}$

Forrest et Tomlin ont montré dans [5] que le dernier élément de la diagonale principale de  $U^{(k+1)}$  est pour leur méthode :

$$u_{mm}^{k+1} = u_{s_k s_k}^k e_{s_k}^t [U^{(k)}]^{-1} [L^{(k)}]^{-1} A^{l_k},$$

où  $A^{e_k}$  est la colonne entrante, ou :

$$u_{mm}^{k+1} = u_{s_k s_k}^k e_{s_k}^t [B^{(k)}]^{-1} A^{e_k}.$$

Or  $y^{(k)} = [B^{(k)}]^{-1} A^{e_k}$  est l'expression de la colonne entrante sur la base.

$y_{s_k}^{(k)} = e_{s_k}^t y^{(k)}$ , composante d'indice  $s_k$  de  $y^{(k)}$  n'est autre que l'élément pivot imposé par la 2<sup>e</sup> règle de Dantzig.

On retrouve une propriété analogue dans la deuxième variante que nous proposons au paragraphe 2.3.2 puisque la matrice  $U^{(k+1)}$  est déduite de la matrice triangulaire supérieure proposée par Forrest et Tomlin par une simple permutation des lignes et des colonnes de celle-ci. Nous aurons alors :

$$u_{l_k l_k}^{k+1} = u_{s_k s_k}^k \cdot y_{s_k}^{(k)}$$

La variante décrite au paragraphe 2.3.1 possède la même propriété. En effet :

$$\begin{aligned} H'^{(k+1)} &= [R'_k]^{-1} H^{(k+1)} \\ &= [I - e_{s_k} (r^k)^t] \{ U^{(k)} - U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t + [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t \} \Pi^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de ce produit de matrices est la matrice  $U^{(k)}$  dont on a ôté la colonne d'indice  $s_k$  que l'on a remplacée par  $[L^{(k)}]^{-1} A^{e_k}$ . La matrice  $\Pi^{(k+1)}$  est une matrice de permutation des colonnes de la matrice précédente qui décale d'une position vers la gauche ses colonnes d'indices  $s_k + 1$  à  $l_k$  et met en  $l_k$ -ième position la colonne d'indice  $s_k$ .

$$\begin{aligned} H'^{(k+1)} &= [I - e_{s_k} (r^k)^t] [U^{(k)} - U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t] \Pi^{(k+1)} \\ &\quad + [I - e_{s_k} (r^k)^t] [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t \Pi^{(k+1)} \\ &= \mathcal{A}_k \Pi^{(k+1)} + \mathcal{B}_k \Pi^{(k+1)}, \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_k$  est la matrice  $U^{(k)}$  dont on a ôté la colonne d'indice  $s_k$  et annulé les coefficients  $u_{s_k, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k, l_k}^k$ .

$\mathcal{B}_k$  peut s'écrire :

$$\mathcal{B}_k = [I - e_{s_k} (r^k)^t] U^{(k)} [U^{(k)}]^{-1} [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t = [I - e_{s_k} (r^k)^t] U^{(k)} y^{(k)} e_{s_k}^t$$

$[I - e_{s_k} (r^k)] U^{(k)}$  est la matrice  $U^{(k)}$  dans laquelle les coefficients  $u_{s_k, s_k+1}, \dots, u_{s_k, l_k}^k$  ont été annulés, et  $y^{(k)} e_{s_k}^t$  une matrice dont toutes les colonnes ont leurs coefficients nuls en dehors de la colonne d'indice  $s_k$  qui n'est autre que  $y^{(k)}$ .

Comme  $[L^{(k)}]^{-1} A^k$  a ses composantes d'indices  $l_k + 1$  à  $m$  nulles, et  $U^{(k)}$  est triangulaire supérieure, il en est de même pour  $y^{(k)}$ .

Le coefficient diagonal d'indice  $s_k$  de  $\mathcal{B}_k$  qui n'est autre que  $u_{l_k, l_k}^{k+1}$  vaut  $u_{s_k, s_k}^k y_{s_k}^{(k)}$ .

### 3. STABILISATION NUMÉRIQUE DES MÉTHODES LU

#### 3.1. Méthode de Forrest et Tomlin

##### 3.1.1. Choix en colonne de l'élément diagonal $u_{mm}^{k+1}$

Considérons la matrice  $H^{(k+1)}$  définie au paragraphe 1.3.

Soit :

$$u_k^t = e_{s_k+1}^t U^{(k)} = (0, \dots, u_{s_k+1, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k+1, m}^k).$$

Nous avons :

$$h_{s_k+1, j}^{k+1} = u_{s_k+1, j+1}^k \quad \text{pour } j = s_k, \dots, m-1.$$

Dans la méthode classique de Forrest et Tomlin, les coefficients  $h_{s_k, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k, m-1}^{k+1}$  sont annulés; nous allons ici annuler  $h_{s_k+1, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k+1, m-1}^{k+1}$ , de la façon suivante :

Soit la matrice :

$$W^{(k)} = U^k (I - e_{s_k} e_{s_k}^t) + e_{s_k+1} e_{s_k}^t,$$

$W^{(k)}$  n'est autre que la matrice  $U^{(k)}$  dont la colonne d'indice  $s_k$  a été remplacée par la colonne canonique  $e_{s_k+1}$ .

Considérons le vecteur  $r'_k$  solution du système linéaire :

$$r_k'^t W^{(k)} = u_k'^t.$$

Si l'on permute les lignes d'indices  $s_k$  et  $s_k+1$  de  $W^{(k)}$ , la matrice résultante est triangulaire supérieure; d'autre part les  $s_k$  premières composantes de  $u'_k$  sont nulles; on en déduit que les  $s_k-1$  premières composantes et la  $(s_k+1)$ -ième composante de  $r'_k$  sont nulles; de plus, la composante d'indice  $s_k$  de  $r'_k$  vaut :

$$\frac{u_{s_k+1, s_k+1}^k}{u_{s_k, s_k+1}^k}.$$

Le système  $r_k'^t W^{(k)} = u_k'^t$  ne peut donc être résolu que si  $u_{s_k, s_k+1}^k$  est différent de zéro. Il peut s'écrire :

$$r_k'^t \{ U^{(k)}(I - e_{s_k} e_{s_k}^t) + e_{s_k+1} e_{s_k}^t \} = e_{s_k+1}^t U^{(k)}$$

ou :

$$r_k'^t U^{(k)} - r_k'^t U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t + r_k'^t e_{s_k+1} e_{s_k}^t = e_{s_k+1}^t U^{(k)}.$$

Mais  $e_{s_k+1} e_{s_k}^t$  est la matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de celui qui se trouve à l'intersection de la ligne d'indice  $s_k + 1$  et de la colonne d'indice  $s_k$  et qui vaut 1. Comme la composante d'indice  $s_k + 1$  de  $r_k'$  est nulle, le vecteur ligne  $r_k'^t e_{s_k+1} e_{s_k}^t$  a toutes ses composantes nulles.

Donc :

$$r_k'^t U^{(k)} = e_{s_k+1}^t U^{(k)} + r_k'^t U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t.$$

Comme  $e_{s_k} e_{s_k}^t$  est la matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de celui qui se trouve à l'intersection de la ligne et de la colonne d'indices  $s_k$ , et la  $s_k$ -ième composante de  $r_k'$  vaut  $u_{s_k+1, s_k+1}^k / u_{s_k, s_k+1}^k$ , nous aurons :

$$r_k'^t U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t = \frac{u_{s_k, s_k}^k u_{s_k+1, s_k+1}^k}{u_{s_k, s_k+1}^k} e_{s_k}^t.$$

Si nous posons :

$$\delta_{s_k} = \frac{u_{s_k, s_k}^k u_{s_k+1, s_k+1}^k}{u_{s_k, s_k+1}^k},$$

alors :

$$r_k'^t U^{(k)} = e_{s_k+1}^t U^{(k)} + \delta_{s_k} e_{s_k}^t,$$

ou :

$$r_k'^t = e_{s_k+1}^t + \delta_{s_k} e_{s_k}^t [U^{(k)}]^{-1}.$$

Soit  $R_k' = \Pi + e_{s_k+1} r_k'^t$  alors :

$$[R_k']^{-1} = I - e_{s_k+1} r_k'^t = I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t - e_{s_k+1} \delta_{s_k} e_{s_k}^t [U^{(k)}]^{-1}.$$

Posons :

$$H^{(k+1)} = [R_k']^{-1} H^{(k+1)} = [R_k']^{-1} \{ U^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] + [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t \} \Pi^{(k+1)},$$

où  $\Pi^{(k+1)}$  est la matrice de permutation de colonnes qui décale les colonnes d'indice  $s_k + 1$  à  $m$  d'une position vers la gauche et met en dernière position la colonne d'indice  $s_k$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit } H^{(k+1)} &= [R'_k]^{-1} \{ U^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] + [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t \} \\ &= [R'_k]^{-1} U^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] + [R'_k]^{-1} [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t, \\ H''^{(k+1)} &= \{ I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t [U^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] \\ &+ \{ I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t [U^{(k)}]^{-1} \} [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k} e_{s_k}^t \} \\ &= U^{(k)} - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t U^{(k)} - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t - U^{(k)} \dot{e}_{s_k} e_{s_k}^t \\ &+ e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t + \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t + U^{(k)} y^{(k)} e_{s_k}^t \\ &- e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t U^{(k)} y^{(k)} e_{s_k}^t - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t y^{(k)} e_{s_k}^t, \end{aligned}$$

où :

$$y^{(k)} = [B^{(k)}]^{-1} A^{e_k} = [U^{(k)}]^{-1} [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k}.$$

Après transformation, on obtient :

$$\begin{aligned} H''^{(k+1)} &= [I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t] U^{(k)} - U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t + U^{(k)} y^{(k)} e_{s_k}^t \\ &- e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t U^{(k)} y^{(k)} e_{s_k}^t - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t y^{(k)} e_{s_k}^t. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette somme représentent la matrice  $U^{(k)}$  dont on a annulé la ligne d'indice  $s_k + 1$  et la colonne d'indice  $s_k$ . Les trois termes suivants ne sont autres que la matrice ayant pour seule colonne non nulle la  $s_k$ -ième colonne qui est le vecteur  $Z^{(k)} = U^{(k)} y^{(k)} = [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k}$  dont on a remplacé la composante d'indice  $s_k + 1$  par  $-\delta_{s_k} y_{s_k}^{(k)}$ .

$H^{(k+1)} = H''^{(k+1)} \Pi^{(k+1)}$  est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle on a annulé les coefficients  $h_{s_k+1, s_k}^{k+1}$  à  $h_{s_k+1, m-1}^{k+1}$  (fig. 7); de plus :

$$h_{s_k+1, m} = -\delta_{s_k} y_{s_k}^{(k)}.$$

Pour triangulariser  $H^{(k+1)}$ , on remontera d'une position les lignes d'indices  $s_k + 2$  à  $m$  et on mettra en dernière position la ligne d'indice  $s_k + 1$ . La valeur de  $u_{mm}^{k+1}$  sera l'opposé du produit de  $\delta_{s_k}$  par le pivot imposé par le deuxième critère de Dantzig  $y_{s_k}^{(k)}$  (fig. 7).

### 3.1.2. Choix en ligne de l'élément diagonal $u_{mm}^{(k+1)}$

Soit  $Z^{(k)} = [L^{(k)}]^{-1} A^{e_k}$  de composantes  $z_i^k$  pour  $i = 1, \dots, m$ .  $Z^{(k)}$  est la dernière colonne de la matrice  $H^{(k+1)}$  définie au paragraphe 1.3. Nous allons ici annuler les coefficients  $h_{s_k, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k, m-2}^{k+1}$  et  $h_{s_k, m}^{k+1}$  qui n'est autre que  $z_{s_k}^k$ .

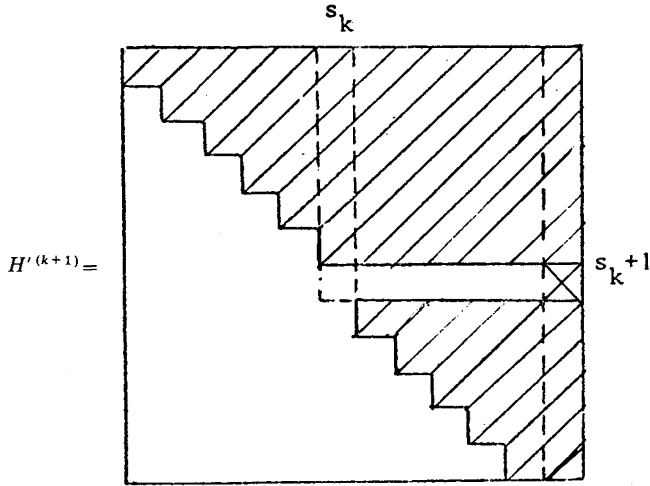


Figure 7

Construisons la matrice triangulaire  $S^{(k)}$ , à partir de  $U^{(k)}$  en ôtant de celle-ci sa colonne d'indice  $m$  et en la remplaçant par  $Z^{(k)}$ .

Soit :

$$v_k^t = (0, \dots, 0, u_{s_k, s_{k+1}}^k, \dots, u_{s_k, m-1}^k, z_{s_k}^k).$$

Le vecteur  $r_k'^t$  est solution du système :

$$r_k'^t S^{(k)} = v_k^t,$$

si  $S^{(k)}$  est inversible et donc si  $z_m^k$  est différent de zéro.

Mais :

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= U^{(k)} - U^{(k)} e_m e_m^t + z^{(k)} e_m^t \\ &= U^{(k)} [I - e_m e_m^t + y^{(k)} e_m^t] \\ &= U^{(k)} [E_m]^{-1}, \end{aligned}$$

où  $E_m$  est la matrice d'élimination de Gauss Jordan telle que :

$$E_m y^{(k)} = e_m.$$

De plus :

$$v_k^t = e_{s_k}^t S^{(k)} - u_{s_k, s_k}^k e_{s_k}^t.$$



On en déduit que :

$$r_k'' U^{(k)} = e_{s_k}^t U^{(k)} - u_{s_k, s_k}^k e_{s_k}^t E_m,$$

or :

$$E_m = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & -y_1^k / y_m^k \\ & & 0 & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & 1 & -y_{m-1}^k / y_m^k \\ 0 & & & & \\ & & & & 1 / y_m^k \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\text{si } u_k'' = e_{s_k}^t U^{(k)} - u_{s_k, s_k}^k e_{s_k}^t E_m = \left( 0, \dots, 0, u_{s_k, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k, m-1}^k, u_{s_k, m}^k + u_{s_k, s_k}^k \frac{y_{s_k}^k}{y_m^k} \right).$$

Le calcul de  $r_k''$  se réduit à la résolution du système triangulaire :

$$r_k'' U^{(k)} = u_k''.$$

On remarque que  $r_k''$  et  $r_k$  défini au paragraphe 1.3 diffèrent seulement par leur dernière composante.

Soit :

$$R_k'' = I + e_{s_k} r_k'',$$

alors :

$$[R_k'']^{-1} = I - e_{s_k} r_k'' = I - e_{s_k} e_{s_k}^t + u_{s_k, s_k}^k e_{s_k} e_{s_k}^t E_m [U^{(k)}]^{-1}.$$

De plus :

$$H^{(k+1)} = U^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t + y^{(k)} e_{s_k}^t] \Pi'^{(k+1)} = U^{(k)} [E_{s_k}]^{-1} \Pi'^{(k+1)}$$

où  $\Pi'^{(k+1)}$  est la matrice de permutation de colonnes qui place  $z^{(k)}$  en dernière position dans la matrice  $U^{(k)} [E_{s_k}]^{-1}$  et décale les colonnes d'indices  $s_k + 1$  à  $m$  d'une position vers la gauche de façon à obtenir  $H^{(k+1)}$ .

D'où :

$$[R_k'']^{-1} H^{(k+1)} = \{ I - e_{s_k} e_{s_k}^t + u_{s_k, s_k}^k e_{s_k} e_{s_k}^t E_m [U^{(k)}]^{-1} \} U^{(k)} [E_{s_k}]^{-1} \Pi'^{(k+1)}$$

ou :

$$[R'_k]^{-1} H^{(k+1)} = [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] U^{(k)} [E_{s_k}]^{-1} \Pi'^{(k+1)} + u_{s_k s_k}^k e_{s_k} e_{s_k}^t E_m [E_{s_k}]^{-1} \Pi'^{(k+1)}.$$

Le premier terme de cette somme est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle on a annulé les coefficients de la ligne d'indice  $s_k$ ; le deuxième terme est la matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de celui qui se trouve à l'intersection de la ligne d'indice  $s_k$  et de la colonne d'indice  $m-1$  et qui vaut :

$$-u_{s_k s_k}^k \frac{y_{s_k}^k}{y_m^k}.$$

Soit  $\mathbb{H}^{(k+1)} = [R'_k]^{-1} H^{(k+1)}$ .

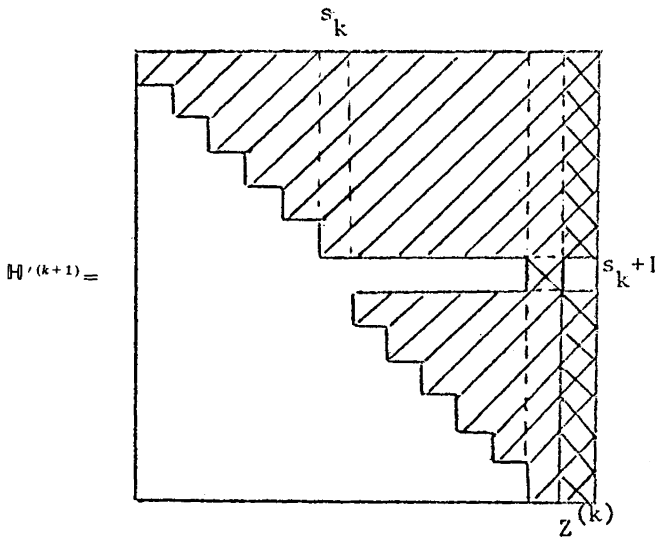


Figure 8

Pour triangulariser  $\mathbb{H}^{(k+1)}$ , on permutera les deux dernières colonnes de  $\mathbb{H}^{(k+1)}$ , puis on remontera d'une position les lignes d'indices  $s_k + 1$  à  $m$  et l'on mettra en dernière position la ligne d'indice  $s_k$ .

L'élément diagonal  $u_{mm}^{k+1}$  de  $U^{(k+1)}$  sera :

$$u_{mm}^{k+1} = -u_{s_k s_k}^k \frac{y_{s_k}^k}{y_m^k}.$$

3.1.3. Choix de l'élément diagonal sur la ligne et la colonne d'indices  $s_k + 1$  de  $H^{(k+1)}$

Nous allons, dans ce cas, annuler dans la matrice  $H^{(k+1)}$  les coefficients  $h_{s_k+1, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k+1, m-2}^{k+1}$ , et  $h_{s_k+1, m}^{k+1}$ .

Soit :

$$v_k^t = e_{s_k+1}^t S^{(k)} = (0, \dots, 0, u_{s_k+1, s_k+1}^k, \dots, u_{s_k+1, m-1}^k, z_{s_k+1}^k).$$

La matrice  $S^{(k)}$  et le vecteur  $Z^{(k)}$  ont été définis au paragraphe 3.1.2. Considérons la matrice  $W^{(k)}$  définie par :

$$W^{(k)} = S^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] + e_{s_k+1} e_{s_k}^t,$$

et  $r_k^{\prime\prime\prime}$  solution du système linéaire triangulaire :

$$r_k^{\prime\prime\prime} W^{(k)} = v_k^t.$$

A l'aide d'une démonstration analogue à celle du paragraphe 3.1.1, on montre que :

$$r_k^{\prime\prime\prime} = e_{s_k+1}^t + \delta_{s_k} e_{s_k}^t [S^{(k)}]^{-1} = e_{s_k+1}^t + \delta_{s_k} e_{s_k}^t E_m [U^{(k)}]^{-1}.$$

Posons :

$$R_k^{\prime\prime\prime} = I + e_{s_k+1} r_k^{\prime\prime\prime},$$

alors :

$$[R_k^{\prime\prime\prime}]^{-1} = I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t E_m [U^{(k)}]^{-1}.$$

Soit :

$$H_k^{\prime\prime\prime(k+1)} = [R_k^{\prime\prime\prime}]^{-1} H^{(k+1)} = [R_k^{\prime\prime\prime}]^{-1} \{ U^{(k)} [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] + Z^{(k)} e_{s_k}^t \} \Pi^{\prime(k+1)}.$$

En développant cette expression, et en la simplifiant, on obtient :

$$H_k^{\prime\prime\prime(k+1)} = \{ U^{(k)} - e_{s_k+1} e_{s_k}^t U^{(k)} - U^{(k)} e_{s_k} e_{s_k}^t + [I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t] U^{(k)} y^{(k)} e_{s_k}^t - \delta_{s_k} e_{s_k+1} e_{s_k}^t E_m [I - e_{s_k} e_{s_k}^t] \} \Pi^{\prime(k+1)}.$$

Les trois premiers termes de cette expression sont la matrice  $U^{(k)}$  dans laquelle on a annulé la colonne d'indice  $s_k$  et la ligne d'indice  $s_k+1$ . Le terme  $[I - e_{s_k+1} e_{s_k+1}^t] U^{(k)} y^{(k)}$  est  $Z^{(k)}$  dans lequel on a annulé la composante d'indice  $s_k+1$ .

Le dernier terme est la matrice dont le seul coefficient non nul est celui d'indice de ligne  $s_k+1$  et d'indice de colonne  $m$ , qui vaut :

$$\delta_{s_k} \frac{y_{s_k}^k}{y_m^k}.$$

Lorsqu'on applique à droite la permutation de colonnes induite par  $\Pi^{(k+1)}$ , on obtient la matrice  $H'''^{(k+1)}$  décrite par la figure 9 :

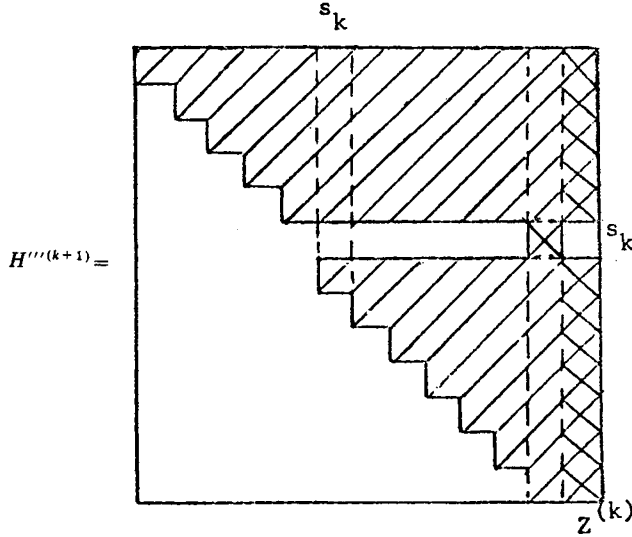


Figure 9

Pour triangulariser  $H'''^{(k+1)}$ , il suffit de permuter ses deux dernières colonnes, de remonter d'une position les lignes d'indice  $s_k + 2$  à  $m$  et de mettre en dernière position la ligne d'indice  $s_k + 1$ .

L'élément  $u_{mm}^{k+1}$  vaut dans ce cas  $\delta_{s_k} (y_{s_k}^k / y_m^k)$ .

Cette transformation n'est, bien sûr, possible que si  $y_m^k$  et  $u_{s_k, s_k+1}^k$  sont différents de zéro.

3.1.4. Conclusion

La stabilité numérique de la méthode de Forrest et Tomlin est liée, en particulier à la fiabilité de la décomposition triangulaire de la matrice de base et donc de  $U^{(k+1)}$ ; celle-ci permet en effet de calculer les facteurs qui composent  $L^{(k)}$  par le calcul de la matrice  $R_k$ , et influe donc sur leur précision et celle de  $L^{(k)}$ .

Nous avons montré que l'on peut construire, à partir de  $H^{(k+1)}$ , quatre matrices triangulaires supérieures dont les deux derniers éléments de la diagonale principale seront soit  $u_{mm}^k$  et  $u_{s_k, s_k}^k y_{s_k}^k$ , soit  $u_{mm}^k$  et  $-\delta_{s_k} y_{s_k}^k$ , soit  $z_m^k$  et  $-u_{s_k, s_k}^k (y_{s_k}^k / y_m^k)$ , soit  $z_m^k$  et  $\delta_{s_k} (y_{s_k}^k / y_m^k)$ , quantités qui dépendent entièrement de

l'information fournie par la  $k$ -ième itération de la méthode du simplexe. On peut donc calculer à l'avance ces quatre éléments diagonaux en utilisant au plus 6 additions ou divisions et donc choisir les deux derniers éléments qui se trouveront sur la diagonale principale  $U^{(k+1)}$  et on améliorera ainsi la précision des solutions des différents systèmes linéaires à résoudre au cours de chaque itération de la méthode du simplexe; on utilisera, évidemment, la procédure de construction de  $R_k$  et  $U^{(k+1)}$  définie dans l'un des précédents paragraphes en accord avec l'élément  $u_{mm}^{k+1}$  choisi.

### 3.2. Méthode de Forrest et Tomlin modifiée

Soit :

$$\mathring{H}^{(k+1)} = H^{(k+1)} \left[ I - \sum_{j=l_k+1}^m e_j e_j^t \right] + \sum_{j=l_k+1}^m e_j e_j^t$$

et :

$$\mathring{U}^{(k)} = U^{(k)} \left[ I - \sum_{j=l_k+1}^m e_j e_j^t \right] + \sum_{j=l_k+1}^m e_j e_j^t,$$

$\mathring{H}^{(k+1)}$  et  $\mathring{U}^{(k)}$  sont les matrices  $H^{(k+1)}$  et  $U^{(k)}$  dans lesquelles on a remplacé les colonnes d'indices  $l_k+1$  à  $m$  par  $e_{l_k+1}, \dots, e_m$ . Nous allons appliquer les procédures décrites dans le paragraphe 3.1 à leurs sous-matrices composées de leurs coefficients d'indices de lignes et de colonnes inférieures ou égaux à  $l_k$ , en accord avec la première modification de la méthode de Forrest et Tomlin.

#### 3.2.1. Choix en colonne de l'élément diagonal $u_{l_k l_k}^{k+1}$

Soit :

$$\mathring{r}_k^t = e_{s_k+1}^t + \delta_{s_k} e_{s_k}^t [\mathring{U}^{(k)}]^{-1}$$

et :

$$\mathring{R}^{(k)} = I + e_{s_k+1} \mathring{r}_k^t,$$

$H^{(k+1)} = [\mathring{R}^{(k)}]^{-1} H^{(k+1)}$  est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle  $h_{s_k+1, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k+1, l_k-1}^{k+1}$  ont été annulés.

De plus  $h_{s_k+1, l_k}^{k+1} = -\delta_{s_k} y_{s_k}^k$  et :

$$h_{s_k+1, j}^{k+1} = h_{s_k+1, j}^{k+1} - \sum_{\substack{i=s_k \\ i \neq s_k+1}}^{l_k} \mathring{r}_{k, i}^t h_{i, j}^{k+1} \quad \text{pour } j > l_k,$$

où les  $r'_{k,i}$  sont les composantes non nulles de  $r'_k$ .

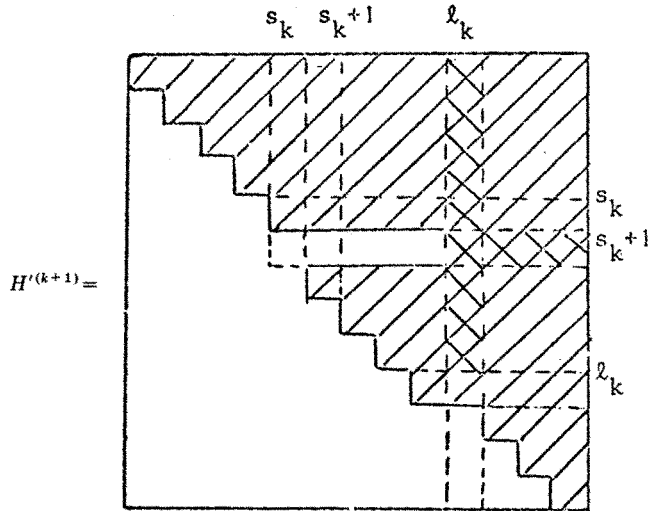


Figure 10

On triangularise  $H^{(k+1)}$  en remontant d'une position ses lignes d'indices  $s_k + 2$  à  $l_k$  et en mettant en  $l_k$ -ième position la ligne d'indice  $s_k + 1$ . L'élément diagonal  $u_{l_k, l_k}^{k+1}$  vaut  $-\delta_{s_k} y_{s_k}^k$ .

3.2.2. Choix en ligne de l'élément diagonal  $u_{l_k, l_k}^{k+1}$

Soit :

$$r'_k = e_{s_k}^t \hat{U}^{(k)} - u_{s_k, s_k}^k e_{s_k}^t E_{l_k}$$

et :

$$\hat{R}_k'' = I + e_{s_k} r_k''^t$$

Soit :

$$\mathbb{H}'^{(k+1)} = [\hat{R}_k'']^{-1} H^{(k+1)}$$

$\mathbb{H}'^{(k+1)}$  est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle on a annulé les coefficients  $h_{s_k, s_k}^{k+1}, \dots, h_{s_k, l_k-2}^{(k+1)}, h_{s_k, l_k}^{(k+1)}$ . De plus :

$$h_{s_k, l_k-1}^{k+1} = -u_{s_k, s_k}^k \frac{y_{s_k}^k}{y_{l_k}^k}$$

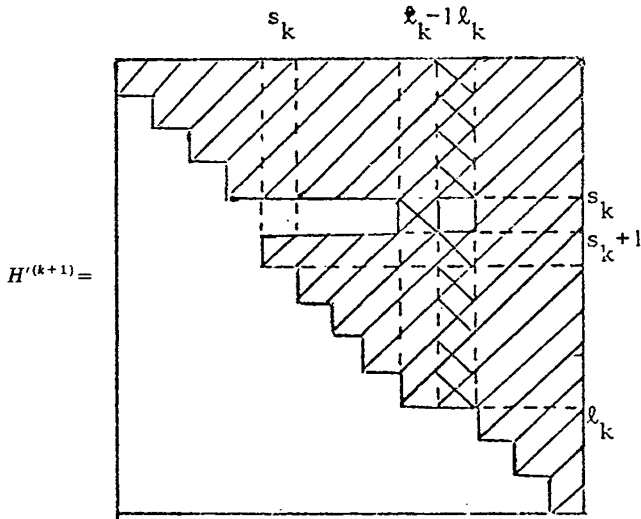


Figure 11

Pour triangulariser  $H^{(k+1)}$ , on permute ses colonnes d'indices  $l_k - 1$  et  $l_k$ , puis, on remonte d'une position les lignes d'indices  $s_k + 1$  à  $l_k$  et on met en  $l_k$ -ième position la ligne d'indice  $s_k$ .

L'élément diagonal  $u_{l_k}^{k+1}$  vaut  $-u_{s_k, s_k}^k (y_{s_k}^k / y_{l_k}^k)$ . De plus  $u_{l_k - 1, l_k}^{k+1} = z_{l_k}^k$ .

3.2.3. Choix de l'élément diagonal sur la ligne et la colonne d'indices  $s_k + 1$  de  $H^{(k+1)}$

Soit :

$$r_k^{\circ\prime\prime\prime} = e_{s_k+1}^t + \delta_{s_k} e_{s_k}^t E_{l_k} [\hat{U}^{(k)}]^{-1}$$

et :

$$\hat{R}_k^{\circ\prime\prime\prime} = I + e_{s_k+1} r_k^{\circ\prime\prime\prime}.$$

Alors  $H^{\circ\prime\prime\prime(k+1)} = [\hat{R}_k^{\circ\prime\prime\prime}]^{-1} H^{(k+1)}$  est la matrice  $H^{(k+1)}$  dans laquelle les éléments  $h_{s_k+1, s_k+1}^{k+1}$  à  $h_{s_k+1, l_k-2}^{k+1}$  et  $h_{s_k+1, l_k}^{k+1}$  ont été annulés;

$$h_{s_k+1, l_k-1}^{\circ\prime\prime\prime} = \delta_{s_k} \frac{y_{s_k}^k}{y_{l_k}^k}$$

et les coefficients de la ligne  $s_k + 1$  d'indice supérieur à  $l_k$  ont été modifiés.

Pour triangulariser  $H^{\circ\prime\prime\prime(k+1)}$ , on permute ses colonnes d'indices  $l_k - 1$  et  $l_k$ , on remonte d'une position les lignes d'indices  $s_k + 2$  à  $l_k$  et on met en

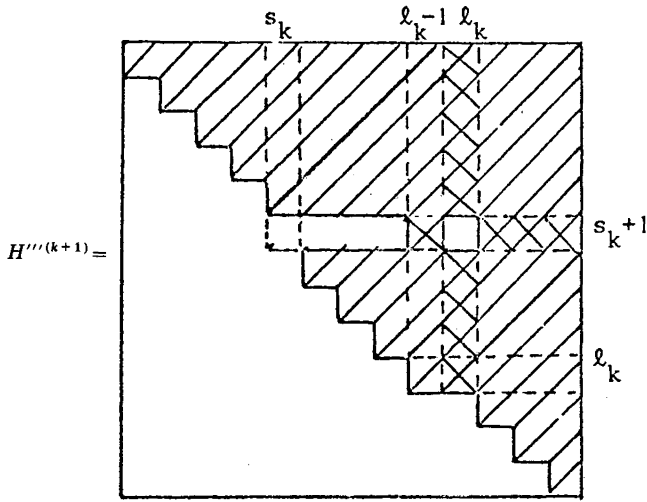


Figure 12

$l_k$ -ième position la ligne d'indice  $s_k + 1$ . L'élément diagonal  $u_{l_k/l_k}^{k+1}$  vaut :

$$\delta_{s_k} \frac{y_{s_k}^k}{y_{l_k}^k} \quad \text{et} \quad u_{l_k-1, l_k-1}^{k+1} = z_{l_k}^k.$$

3.2.4. Conséquence

Comme dans la méthode exposée au paragraphe 3.1, on peut choisir les éléments  $u_{l_k-1, l_k-1}^{k+1}$  et  $u_{l_k/l_k}^{k+1}$  parmi les quatre couples suivants :

$$\begin{aligned} & (u_{l_k/l_k}^k, u_{s_k s_k}^k y_{s_k}^k), \quad (u_{l_k/l_k}^k, -\delta_{s_k} y_{s_k}^k), \\ & \left( z_{l_k}^k, -u_{s_k s_k}^k \frac{y_{s_k}^k}{y_{l_k}^k} \right) \quad \text{et} \quad \left( z_{l_k}^k, \delta_{s_k} \frac{y_{s_k}^k}{y_{l_k}^k} \right); \end{aligned}$$

grâce à ce choix, il est possible d'améliorer la stabilité numérique de la méthode de Forrest et Tomlin ainsi modifiée.

On peut améliorer de la même façon la stabilité numérique de la méthode de Forrest et Tomlin utilisant la modification décrite au paragraphe 2.3.2; les seules différences porteront sur la longueur du vecteur  $r_k$  et les valeurs des coefficients d'indices de colonne supérieure à  $l_k$  sur la ligne d'indice  $s_k$  (ou  $s_k + 1$ ) de  $H^{(k+1)}$  qui seront annulés dans ce cas.

4. CONCLUSION

Nous avons donné dans cet article, deux variantes de la méthode de Forrest et Tomlin qui permettent d'exploiter au mieux le creux de la matrice des



contraintes. De plus, nous avons montré qu'il est possible de choisir, au cours de chaque itération, l'élément qui apparaît sur la diagonale principale de  $U^{(k+1)}$  parmi quatre coefficients. Ceux-ci sont calculables de façon très peu coûteuse avant même d'utiliser une procédure de triangularisation adaptée à chacun d'entre eux. On obtient ainsi une fiabilité de la décomposition triangulaire de la matrice de base qui n'était pas prise en considération dans la méthode initiale.

Abadie [1], et l'auteur de cet article [10], ont proposé des procédures qui, tenant compte du caractère clairsemé de la matrice de base, en réorganisent les lignes et les colonnes de façon à réduire encore le nombre d'opérations nécessaires à sa triangularisation.

Les procédures que nous avons décrites, ici, peuvent être utilisées avec profit, non seulement dans les codes de programmation linéaire, mais encore dans les algorithmes de programmation non linéaire utilisant en particulier les notions de gradient réduit de Wolfe et de gradient réduit généralisé d'Abadie [2].

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. ABADIE, *Optimization Problems with Coupled Blocks*, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, vol. 4, Bucarest, 1970, p. 5-26.
2. J. ABADIE, *Advances in Nonlinear Programming (Proceedings of the Eighth IFORS International Conference on Operational Research*, K. B. HALEY, éd., North-Holland, Amsterdam, 1979, p. 900-930).
3. R. H. BARTELS, *A Numerical Investigation of the Simplex Method (Thèse de l'Université de Stanford*, 1968).
4. G. B. DANTZIG, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
5. J. J. FORREST et J. A. TOMLIN, *Updated Triangular Factors of the Basis to Maintain Sparsity in the Product Form Simplex Method*, Math. Prog., vol. 2, 1972, p. 263-278.
6. D. GOLDFARB, *On the Bartels-Golub Decomposition for Linear Programming Bases*, Math. Prog., vol. 13, 1977, p. 272-279.
7. J. K. REID, *A Sparsity-Exploiting Variant of the Bartels-Golub Decomposition for Linear Programming Bases*, Math. Prog., vol. 24, 1982, p. 55-69.
8. M. A. SAUNDERS, *The Complexity of LU Updating in the Simplex Method*, R. S. ANDERSSON et R. P. BRENT, éd., *The Complexity of Computational Problem Solving*, University Press, Queensland, 1976, p. 214-230.
9. P. TOLLA, *Contribution à l'Amélioration des Logiciels de Programmation Mathématique en Variables Réelles (Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1983)*.
10. J. A. TOMLIN, *Maintaining a Sparse Inverse in the Simplex Method (Technical Report n° 70-16, Stanford University, Dpt. of O.R., Nov. 1970)*.
11. J. VIGNES, *Implementation des Méthodes d'Optimisation : Test d'Arrêt Optimal, Contrôle et Précision de la Solution. Première partie : Aspect Méthodologique*, R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle, vol. 18, n° 1, 1984, p. 1-18. *Deuxième partie (à paraître)*.