RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

JEAN-PIERRE MELIN

Proposition d'une solution approchée pour l'étude du maximum de plusieurs variables aléatoires

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 17, nº 2 (1983), p. 175-191

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1983__17_2_175_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 17, n° 2, mai 1983, p. 175 à 191)

PROPOSITION D'UNE SOLUTION APPROCHÉE POUR L'ÉTUDE DU MAXIMUM DE PLUSIEURS VARIABLES ALÉATOIRES (*)

par Jean-Pierre MELIN [1]

Résumé. — *Beaucoup d'études d'ordonnancement sont effectuées à l'aide de méthodes déterministes, dans la mesure où l'introduction de l'aléatoire conduit à des développements mathématiques et des volumes de traitement trop importants par rapport au problème étudié. C'est le cas par exemple de l'utilisation de la méthode PERT pour l'établissement du planning d'un chantier de bâtiment. Le but de cette étude est de proposer une méthode approchée, permettant un traitement numérique relativement simple, pour le calcul du maximum de plusieurs variables aléatoires.*

Un tel calcul, même approché, est souhaitable dans la mesure où le calcul déterministe fournit un résultat sous estimé. La méthode s'appuie sur une distribution de probabilité dérivée de la distribution β, qui réalise un compromis entre la facilité de traitement et la modélisation correcte de la réalité concrète.

Mots clés : Ordonnancement; maximum; variables aléatoires.

Abstract. — *Many scheduling studies are carried out with the help of determinist methods, in as far as the introduction of a random approach leads to mathematic developements and too large a bulk of operations respect to the problem treated. This happens for example with the use of the PERT Method for the setting up of a building site planning. The purpose of this study is to offer an approached method allowing a relatively simple computing processing, for the working out of the maximum of several random variables.*

Such a computing, even if it is approached, is to be wished for, in so far as the determinist computing leads to an underestimated result. The method rests on a probability distribution issued from the β distribution which brings about a compromise between simplified treatment and correct pattern of concrete reality.

Keywords: Scheduling; maximum; random variables.

1. LE PROBLÈME POSÉ

Dans de nombreux problèmes courants d'ordonnancement, notamment dans le calcul d'un réseau PERT, on recherche le maximum de plusieurs valeurs, maximum de la durée de plusieurs tâches par exemple.

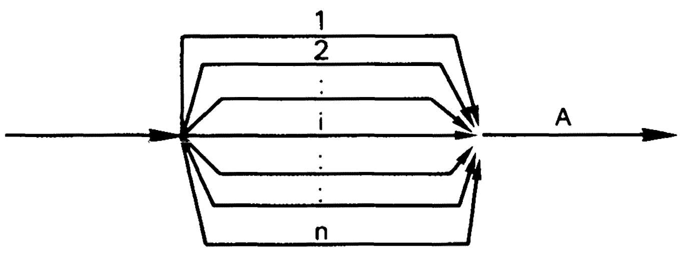
(*) Reçu décembre 1980.
([1]) Institut Universitaire de Technologie de Strasbourg, 72, route du Rhin 67400 Illkirch-Graffentaden.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/1983/175/$ 5.00

En principe les durées devraient être considérées comme des variables aléatoires. Mais dans la mesure où les solutions mathématiques deviennent très vite très complexes, on se contente des résultats obtenus par une méthode déterministe en en acceptant les erreurs.

Le but de cette étude est de proposer une solution approchée qui, sans être parfaite, diminue néanmoins les erreurs systématiques dues aux méthodes déterministes. L'avantage de la solution proposée est d'aboutir à des calculs relativement simples, faciles et rapides sur micro-ordinateur.

Nous nous posons le problème dans les termes suivants. Soient n tâches devant être exécutées simultanément. Elles déterminent localement un n-graphe.



La tâche suivante A ne pourra démarrer que lorsque toutes les tâches de ce n-graphe auront été exécutées.

Soit $\mathscr{T}_i$ la durée d'exécution de la tâche i; la durée X d'exécution de l'ensemble est :

$$X = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} \mathscr{T}_i.$$

Nous pouvons considérer que la durée de chaque tâche est bornée :

— à gauche par le temps origine : 0;

— à droite par une durée maximum T, finie; une durée infinie ne correspond en général qu'à un travail abandonné.

Les méthodes déterministes considèrent la durée moyenne de chaque tâche, et prennent pour durée maximum la durée moyenne la plus grande. Ce qui peut se formuler par :

$$\operatorname*{Max}_{i=1}^{n} E(\mathscr{T}_i).$$

Par contre, la valeur recherchée est la valeur moyenne du maximum qui peut se noter :

$$E\left(\operatorname*{Max}_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i\right).$$

Or, en général cette deuxième valeur est supérieure à la première. C'est-à-dire que par une méthode déterministe le résultat est systématiquement sous estimé.

C'est cette erreur systématique que nous voulons corriger par une méthode approchée.

2. PRINCIPE DU CALCUL DE L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE ET DE L'ÉCART-TYPE DU MAXIMUM DES *n* VARIABLES ALÉATOIRES

2.1. Notations

Les n variables aléatoires, notées $\mathcal{T}_i (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, sont mutuellement indépendantes.

Chaque variable aléatoire $\mathcal{T}_i$ est distribuée dans un intervalle $[0, T_i]$; sa densité de probabilité notée $f_i(t)$ est nulle à l'extérieur de cet intervalle.

$$\begin{cases} f_i(t) \geqq 0 & \text{pour} \quad t \in [0, T_i], \\ f_i(t) = 0 & \text{pour} \quad t \notin [0, T_i]. \end{cases}$$

Les fonctions de répartition sont notées $F_i(t)$, les espérances mathématiques $E(\mathcal{T}_i)$, les écarts types $\sigma(\mathcal{T}_i)$.

Nous ordonnons les variables $\mathcal{T}_i$ en fonction croissante de leur paramètre T_i. C'est-à-dire que :

$$T_1 \leqq T_2 \leqq \ldots \leqq T_n,$$

ce qui entraîne que :

$$T_n = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} T_i.$$

La densité de probabilité de $X = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ est notée $\varphi(t)$ et sa fonction de répartition $\Phi(t)$.

Nous nous proposons de calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

2.2. Fonction de répartition du maximum

(*a*) La fonction de répartition du maximum X des variables aléatoires $\mathcal{T}_i$ est égale au produit des fonctions de répartition de chacune des variables.

Ceci est un résultat classique dont nous rappelons brièvement la démonstration.

Si toutes les variables aléatoires $\mathcal{T}_i$ sont mutuellement indépendantes, la probabilité pour que toutes ces variables soient inférieures ou égales à une valeur t est le produit des probabilités pour que chacune soit inférieure ou égale à t :

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(\mathcal{T}_i\leqq t)\right]=\prod_{i=1}^{n}P(\mathcal{T}_i\leqq t).$$

La probabilité $P(\mathcal{T}_i\leqq t)$ est la fonction de répartition $F_i(t)$ de la variable aléatoire $\mathcal{T}_i$.

Le fait que toutes les variables aléatoires $\mathcal{T}_i$ soient inférieures à t est équivalent au fait que le maximum des $\mathcal{T}_i$ soit inférieur à t.

$$\bigcap_{i=1}^{n}(\mathcal{T}_i\leqq t)\Leftrightarrow \operatorname*{Max}_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i\leqq t\Leftrightarrow X\leqq t.$$

La probabilité $P(X\leqq t)$ est la fonction de répartition $\Phi(t)$ de la variable aléatoire X. Nous obtenons donc finalement :

$$\Phi(t)=\prod_{i=1}^{n}F_i(t).$$

(*b*) Pour une tâche i quelconque, lorsque $t\geqq T_i$ nous avons toujours $F_i(t)=1$. Du fait que $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont en ordre croissant, nous avons aussi :

$$F_{i-1}(t)=F_{i-2}(t)=\ldots=F_1(t)=1.$$

Examinons la fonction de répartition de X pour $T_{i-1}\leqq t\leqq T_i$. Nous avons alors :

$$\Phi(t)=\prod_{j=1}^{n}F_j(t)=\prod_{j=1}^{i-1}F_j(t)\prod_{j=i}^{n}F_j(t).$$

Finalement :

$$\Phi(t)=\prod_{j=i}^{n} F_j(t) \qquad \text{pour} \quad T_{i-1} \leqq t \leqq T_i.$$

2.3. Espérance mathématique du maximum

C'est par la fonction de répartition que la distribution de la variable aléatoire X est définie le plus facilement. C'est pourquoi nous allons exprimer l'espérance mathématique en fonction de la fonction de répartition.

Nous pouvons appliquer, à l'intégrale de calcul de $E(X)$ les transformations successives suivantes :

$$E(X)=\int_0^{T_n} t\,\varphi(t)\,dt$$

$$=T_n-\int_0^{T_n} \Phi(t)\,dt$$

$$=T_n-\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i} \Phi(t)\,dt.$$

en posant $T_0=0$.

Finalement :

$$E(X)=T_n-\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i} \prod_{j=i}^{n} F_j(t)\,dt.$$

2.4. Ecart-type du maximum

Nous pouvons reprendre la même démarche qu'au paragraphe précédent pour calculer $E(X^2)$.

Ce calcul revient à l'intégrale :

$$E(X^2)=\int_0^{T_n} t^2\,\varphi(t)\,dt$$

qui subit de la même façon les transformations suivantes :

$$E(X^2) = T_n^2 - 2\int_0^{T_n} t\,\Phi(t)\,dt$$

$$= T_n^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i} t\,\Phi(t)\,dt,$$

$$E(X^2) = T_n^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i} t\prod_{j=i}^{n} F_j(t)\,dt.$$

L'écart-type se calcule ensuite par la formule classique :

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}.$$

3. DISTRIBUTION PROPOSÉE. RÉSULTATS

3.1. Le choix de la distribution

La distribution adoptée doit être relativement conforme à la réalité. Mais en outre sa formulation doit se prêter aisément aux traitements algébriques et numériques. Cette distribution est donc nécessairement un compromis. Ce sont principalement les résultats numériques obtenus qui nous disent si ce compromis est acceptable.

Certaines études consacrées à la méthode PERT ont privilégié la distribution β.

D'une manière générale la distribution β se définit dans un intervalle fini $[a, b]$:

$$f(t) = \frac{1}{\beta(\mu, \rho)}\,\frac{(t-a)^{\mu-1}(b-t)^{\rho-1}}{(b-a)^{\mu+\rho-1}} \qquad \text{pour} \quad t \in [a, b],$$

$$f(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \notin [a, b], \qquad \mu, \rho > 0.$$

Dans notre cas :

$$a = 0,$$

$$b = T.$$

De plus nous prenons un cas particulier de la fonction β :

$$\rho = 1.$$

Ce qui nous donne finalement :

$$f(t) = \frac{\mu}{T^\mu} t^{\mu-1} \qquad \text{pour} \quad t \in [0, T],$$

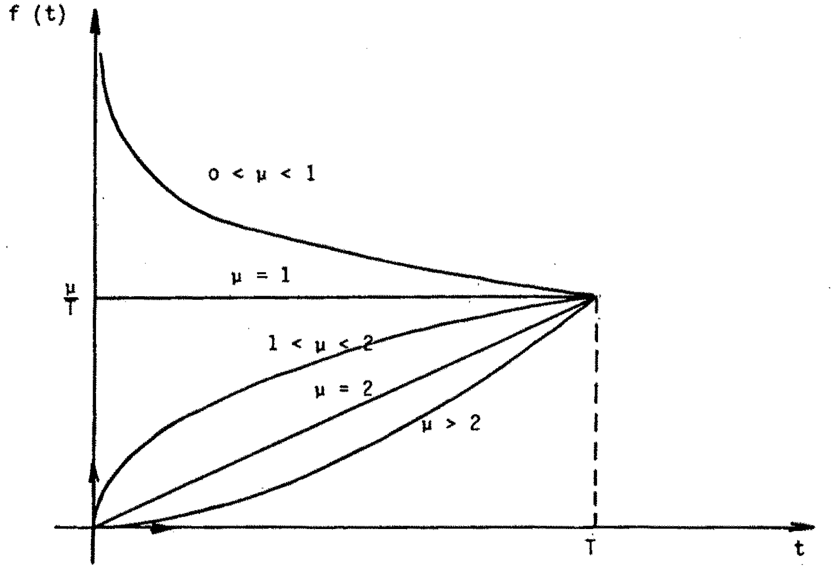
$$f(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \notin [0, T].$$

3.2. Étude de la distribution adoptée

Nous ne donnons ici que les résultats; les calculs sont détaillés en annexe.

3.2.1. *Résultats généraux*

La densité de probabilité prend, suivant les valeurs de μ, les formes suivantes :



La fonction de répartition est :

$$F(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^\mu \qquad \text{pour} \quad t \in [0, T],$$

$$F(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \leqq 0,$$

$$F(t) = 1 \qquad \text{pour} \quad t \geqq T.$$

Cette forme se prête très bien aux calculs sur les produits de fonctions de répartition.

L'expérance mathématique est :

$$E(\mathcal{T}) = T\frac{\mu}{\mu+1}$$

et l'écart-type :

$$\sigma(\mathcal{T}) = T\frac{1}{\mu+1}\sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}}.$$

3.2.2. *Détermination des paramètres T et μ*

Le paramètre μ n'est pas connu *a priori*. Le paramètre T peut être connu ou inconnu, cela dépend du problème étudié.

3.2.2.1. *T est connu*

Cela se produit par exemple lorsque nous recherchons le maximum de la durée de plusieurs tâches, et que l'exécution de chaque tâche est soumise à un délai impératif. On attribue alors au paramètre T la valeur de ce délai. C'est ce que nous illustrons dans l'exemple du § 4.1.

A partir de la formule de l'espérance mathématique, nous tirons :

$$\mu = \frac{E(\mathcal{T})}{T - E(\mathcal{T})}.$$

Il suffit donc de disposer d'une estimation de l'espérance mathématique $E(\mathcal{T})$ pour déterminer le paramètre μ.

3.2.2.2. *T n'est pas connu*

Dans ce cas il faut disposer en plus d'une estimation de l'écart-type.

A partir des formules de l'espérance mathématique et de l'écart-type, nous obtenons :

$$\mu = \frac{E(\mathcal{T})}{T - E(\mathcal{T})}.$$

$$T = \frac{1}{E(\mathcal{T})}\{ E^2(\mathcal{T}) + \sigma^2(\mathcal{T}) + \sigma(\mathcal{T})\sqrt{E^2(\mathcal{T}) + \sigma^2(\mathcal{T})} \}.$$

Les calculs sont détaillés en annexe.

3.3. Résultats : Espérance et écart-type du maximum

Les calculs assez longs, sont développés en annexes. Nous obtenons :

$$E(X)=T_n\frac{\mu_n}{\mu_n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mu_i . T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(\sum_{j=i+1}^{n} T_j^{\mu_j}\right)\left(1+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)},$$

$$E(X^2)=T_n^2\frac{\mu_n}{\mu_n+2}+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mu_i . T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(\sum_{j=i+1}^{n} T_j^{\mu_j}\right)\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\left(2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}.$$

4. UTILISATIONS DU CALCUL PROPOSÉ

4.1. Exemple d'application directe

Nous proposons d'abord un exemple permettant d'appliquer immédiatement le calcul proposé.

Lors de l'examen d'une demande de permis de construire, le dossier peut être transmis simultanément à plusieurs services spécialisés. Ceux-ci disposent d'un certain délai de réponse. Par statistique il est possible en outre de connaître la durée moyenne d'examen du dossier pour chaque service.

Prenons les services suivants :

Service	Délai (en jours)	Durée moyenne (en jours)
Protection civile.	30	18
Action sanitaire et sociale.	30	16
Direction du travail et de la main d'œuvre.	30	20
Transports fluviaux, maritimes et aériens.	30	21

Le délai représente le paramètre T. On obtient facilement le résultat suivant :

espérance mathématique du maximum : 23, 24 jours;

écart-type du maximum : 12, 63 jours.

4.2. Un problème d'ordonnancement

Dans de nombreux problèmes d'ordonnancement on détermine le maximum de plusieurs valeurs. Examinons le problème au travers d'un exemple courant : un réseau PERT.

Un tel réseau est couramment employé pour l'établissement du planning d'un chantier de bâtiment. La durée de chaque tâche est souvent difficile à déterminer exactement en raison des aléas propres aux divers corps de métiers. Mais le calcul déterministe reste la règle.

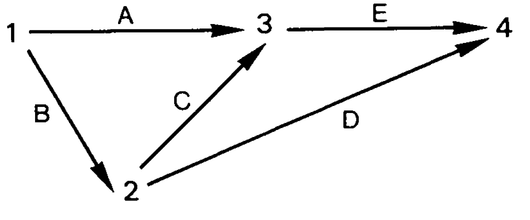
Le calcul déterministe habituel ne fait appel qu'aux durées moyennes. Mais il est possible, pour chaque tâche, de connaître l'écart-type de la durée.

Il faut admettre que les diverses tâches ont des durées mutuellement indépendantes.

Les tâches « en séries », peuvent se ramener à une tâche unique. L'espérance mathématique de la durée est égale à la somme des espérances mathématiques; la variance est égale à la somme des variances.

Les tâches « en parallèles » forment localement un n-graphe et peuvent être traitées directement par notre calcul.

Le problème se complique lorsque le problème peut se ramener à un graphe du type suivant :



Calcul 1 : La durée totale obtenue au sommet 4 sera le maximum des durées :

– du chemin B, D,

– du maximum $\left\{ \begin{array}{c} \text{arc } A \\ \text{chemin } B, C \end{array} \right\} + \text{arc } E.$

Or l'arc B intervient les 2 fois, ce qui est contraire à l'hypothèse d'indépendance des variables.

Calcul 2 : Il serait aussi possible de prendre le maximum des durées des 3 chemins AE, BCE, BD. Mais les arcs B et E interviennent chacun dans 2 chemins à la fois.

Nous proposons néanmoins d'effectuer le calcul 1, à défaut d'autre solution simple.

A titre d'illustration examinons le résultat obtenu en partant des données suivantes :

tâche C : $E(\mathscr{T})=1$, $\sigma(\mathscr{T})=0{,}3$ et pour les autres tâches : $E(\mathscr{T})=2$, $\sigma(\mathscr{T})=0{,}6$.

Nous obtenons : résultat déterministe habituel : 5 ; résultat du calcul 1 : 5,19 ; résultat du calcul 2 : 5,22.

ANNEXE

A.1. ESTIMATION DES PARAMÈTRES T et μ

Sachant que :

$$E(\mathscr{T})=T\frac{\mu}{\mu+1}, \tag{1}$$

$$\sigma^2(\mathscr{T})=T^2\frac{\mu}{(\mu+1)^2(\mu+2)}. \tag{2}$$

Il s'agit de déterminer μ et T.

L'équation (1) nous donne directement :

$$\mu=\frac{E(\mathscr{T})}{T-E(\mathscr{T})}.$$

En substituant cette valeur de μ dans l'équation (2) nous obtenons une équation en T du second degré :

$$T^2-2\frac{E^2(\mathscr{T})+\sigma^2(\mathscr{T})}{E(\mathscr{T})}T+\{E^2(\mathscr{T})+\sigma^2(\mathscr{T})\}=0.$$

Celle-ci donne toujours 2 racines réelles T' et T''. Nous éliminons la solution T'' car $T''<E(\mathscr{T})$. Il nous reste donc :

$$T=\frac{1}{E(\mathscr{T})}\{E^2(\mathscr{T})+\sigma^2(\mathscr{T})+\sigma(\mathscr{T})\sqrt{E^2(\mathscr{T})+\sigma^2(\mathscr{T})}\}.$$

A.2. CALCUL DE $E\left\{\operatorname*{Max}_{i=1}^{n} \mathscr{T}_i\right\}$

A partir de la fonction de répartition :

$$F_j(t)=\frac{t^{\mu_j}}{T_j^{\mu_j}},$$

effectuons le produit des fonctions de répartition :

$$\prod_{j=i}^{n} \frac{t^{\mu_j}}{T_j^{\mu_j}}=\frac{t^{\sum_{j=1}^{n} \mu_j}}{\prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}.$$

L'intégration de ce produit donne :

$$\int \Phi(t)\, dt=\frac{t^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}$$

avec $T_{i-1} \leqq t \leqq T_i$:

$$\int_0^{T_n} \Phi(t)\, dt=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{t^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}\right]_{T_{i-1}}^{T_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}.$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}{}^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}.$$

$\ast$ Soit S_1 :

$$S_1=\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}$$

$$+ \frac{T_n^{\mu_n+1}}{(1+\mu_n)\, T_n^{\mu_n}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i+1}^{n} T_j^{\mu_j}} + \frac{T_n}{1+\mu_n}.$$

(Simplification par $T_i^{\mu_i}$).

$\ast$ Soit S_2 :

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}},$$

$$S_2 = \sum_{i=2}^{n} \frac{T_{i-1}^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}$$

$$+ \frac{T_0^{1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=1}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=1}^{n} T_j^{\mu_j}}.$$

Or $T_0 = 0$.

Affectons à i la valeur $i+1$:

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{T_{i-1}^{1+\sum_{j=i+1}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i+1}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i}^{n} T_j^{\mu_j}}.$$

$\ast$ Soit S_3 :

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n} \mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n} \mu_j\right) \prod_{j=i71}^{n} T_j^{\mu_j}}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}},$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}}\left[\frac{1}{1+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}-\frac{1}{1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}\right],$$

$$S_3=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}}\cdot\frac{\mu_i}{\left(1+\sum_{j=i}^{n}\right)\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\right)},$$

$$E(X)=T_n-\int_0^{T_n}\Phi(t)\,dt$$

$$=T_n-\frac{T_n}{\mu_n+1}-S_3$$

$$=T_n\frac{\mu_n}{\mu_n+1}-S_3,$$

$$E(X)=T_n\frac{\mu_n}{\mu_n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mu_i\,.\,T_i^{1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}\right)\left(1+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)}.$$

A.3. CALCUL DE $E\left\{\left[\operatorname*{Max}_{i=1}^{n}\mathscr{T}_i\right]^2\right\}$

Nous calculons tout d'abord :

$$\int_0^{T_n}t\,\Phi(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{T_{i-1}}^{T_i}t\prod_{j=i}^{n}F_j(t)\,dt.$$

Ce calcul se conduit de la même manière que dans le paragraphe précédent :

$$\int_0^{T_n}t\,\Phi(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{t^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}\right]_{T_{i-1}}^{T_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}^{1+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}.$$

$\ast$ Soit S_1 :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{T_i^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}$$

$$+ \frac{T_n^{\mu_n+2}}{(2+\mu_n)\,T_n^{\mu_n}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}} + \frac{T_n}{2+\mu_n}.$$

(Simplification par $T_i^{\mu_i}$).

$\ast$ Soit S_2 :

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}},$$

$$S_2 = \sum_{i=2}^{n} \frac{T_{i-1}^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}$$

$$+ \frac{T_0^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}$$

Or $T_0 = 0$.

Affectons à i la valeur $i+1$:

$$S_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{i-2}^{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}}.$$

$\ast$ Soit S_3 :

$$S_3=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i}^{n}T_j^{\mu_j}}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}}.$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}}\left[\frac{1}{2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j}-\frac{1}{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}\right],$$

$$S_2=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}\right)}\cdot\frac{\mu_i}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\left(2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)},$$

$$E(X^2)=T_n^2-2\frac{T_n^2}{2+\mu_n}-2S_3,$$

$$E(X^2)=T_n^2\frac{\mu_n}{\mu_n+2}+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{T_i^{2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j}}{\left(\prod_{j=i+1}^{n}T_j^{\mu_j}\right)}\cdot\frac{\mu_i}{\left(2+\sum_{j=i}^{n}\mu_j\right)\left(2+\sum_{j=i+1}^{n}\mu_j\right)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

J. Christophe, Y. Evrard et M. Malaize, *Le PERT et la construction*, Dunod, 1969.
G. Desbazeille et A. Kaufmann, *La méthode du chemin critique*, Dunod, 1969.

N. L. JOHNSON, *Continuous Univariate Distributions*, Houghton Mifflin Company, 1969.

LOCKYER, *Introduction à l'analyse du chemin critique*, Dunod, 1969.

J. MOREL, *La méthode PERT; Critique et amélioration, Thèse*, Nancy, 1969.

E. VENTURA, *L'introduction de l'aléatoire dans les réseaux PERT*, Revue Française de recherche opérationnelle (AFIRO), n° 38, 1966.