

EDOUARD ROSSIER

L'inverse d'une matrice d'intervalles

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 16, n° 2 (1982),
p. 99-124

http://www.numdam.org/item?id=RO_1982__16_2_99_0

© AFCET, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

L'INVERSE D'UNE MATRICE D'INTERVALLES (*)

par Edouard ROSSIER[†] (1)

Résumé. — Ce travail fait état d'une approche géométrique pour l'étude de l'inverse d'une matrice d'intervalles. Plus précisément, une matrice carrée d'ordre n , d'intervalles fermés étant considérée comme un paralléloèdre dans un espace euclidien à n^2 dimensions, son inverse engendre dans cet espace une figure géométrique complexe que l'on étudie par projection sur des axes ou des plans. Des algorithmes sont proposés pour obtenir ces projections de manière automatique et un programme d'ordinateur Fortran correspondant est donné en annexe.

Mots clés : Connaissance imprécise, polytope, prévision, statique comparative.

Abstract. — This paper is concerned with a geometric approach for studying the inverse of an interval matrix. More precisely, considering a square matrix of order n as a parallelotope in an n^2 Euclidian space, its inverse generates in this space a complex geometric figure which is analysed by means of projections with respect to several axes and planes. Algorithms are proposed in order to obtain the automatic design of such projections and the corresponding computer program Fortran is reported in appendix.

Keywords: Fuzzy knowledge, polytope, prediction, comparative statics.

1. INTRODUCTION

Cette étude a eu pour origine le souci de développer une approche non stochastique du traitement de la connaissance imprécise dans les modèles économiques, notamment dans le cadre des problèmes de statique comparative, de prévision et de décision. Elle se rattache ainsi aux travaux sur les systèmes qualitatifs et le calcul qualitatif en signe tel qu'il a été proposé par P. A. Samuelson [10], chap. III, systématisé depuis par K. Lancaster [2] et plus récemment par G. Ritschard [5] (voir également [6] et [7], chap. 7 et 8).

(*) Reçu mars 1981.

(1) Université de Genève, Département d'Économétrie, Suisse.

Toutefois, les résultats fournis par le calcul qualitatif souffrent le plus souvent de l'indétermination inhérente au traitement des intervalles ouverts que sont les signes positifs ou négatifs. En accord avec la connaissance la plus précise que l'on peut avoir sur les éléments du système considéré, on est alors conduit à substituer aux signes des intervalles fermés aussi petits que possible. L'indétermination liée au fait qu'une variable peut admettre des valeurs positives ou négatives est ainsi levée par la définition d'un intervalle approprié pouvant ou non inclure l'élément nul.

Fondamentalement, le problème envisagé peut se résumer de la manière suivante : étant donné un système linéaire de n relations à n inconnues x :

$$Ax = b, \quad (1)$$

que peut-on dire de l'ensemble de ses solutions x lorsque la matrice carrée d'ordre n , A , est une matrice d'intervalles représentée par le parallélotope :

$$\mathcal{A} = (A / A^0 \leq A \leq A^*) \quad (2)$$

où les matrices de bornes $A^0 = \|a_{ij}^0\|$ et $A^* = \|a_{ij}^*\|$ sont données?

En considérant dès lors les ensembles :

$$P^+ = \{ A^+ / AA^+ = I, A \in \mathcal{A} \}, \quad (3)$$

$$P = \{ x / Ax = b, A \in \mathcal{A} \}, \quad (4)$$

l'inverse de \mathcal{A} est donnée par P^+ pourvu que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad |A| \neq 0, \quad (5)$$

$|A|$ étant le déterminant de la matrice A . P est évidemment l'ensemble des solutions du système (1), tel que si x et b désignent respectivement le i -ième vecteur colonne de la matrice A^+ et le i -ième vecteur colonne de la matrice identité I , P peut être considéré comme la projection de P^+ dans un espace euclidien \mathbb{R}^n dont les axes correspondent aux éléments du vecteur x .

L'étude de l'ensemble P^+ que nous proposons se fonde justement sur de telles projections de P^+ dans \mathbb{R}^n . Par exemple, pour une matrice d'intervalles d'ordre 2 vérifiant la condition (5), l'ensemble P est donné par le lieu géométrique de l'intersection de deux familles de droites d_1, d_2 dont les pentes et l'ordonnée à l'origine de l'une d'entre elles peuvent varier, engendrant des ensembles convexes ou non convexes tels que ceux de la figure suivante.

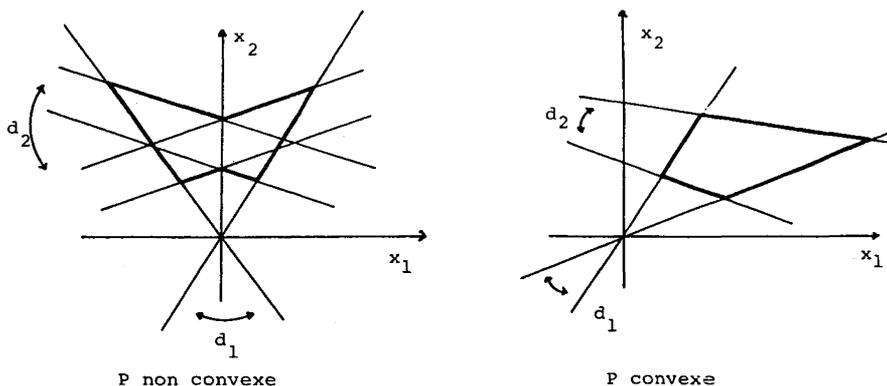


Figure 1

Le point 2 ci-après présente les principales propriétés des ensembles ou *polytopes* P qui — contrairement aux polytopes bien connus de la programmation linéaire — ne sont pas forcément convexes, ni même connexes. Le point 3 concerne des algorithmes de projection de P sur des axes ou des plans qui sont à la base du programme Fortran *Inmain* donné en annexe. Une illustration numérique de la démarche proposée fait l'objet du point 4 où l'on souligne également les avantages et les limites de l'approche retenue, qui, étant essentiellement géométrique, se démarque en particulier du calcul d'intervalles de l'analyse numérique développé par exemple dans [4] chap. 5 (voir également [1], p. 150-159).

2. PROPRIÉTÉS DES POLYTOPES P

Nous admettrons dès maintenant que la matrice A contient exactement $p \leq n^2$ éléments variables a_{ij} tels que $a_{ij}^0 \leq a_{ij} \leq a_{ij}^*$, avec $a_{ij}^0 < a_{ij}^*$. Le paralléloétope \mathcal{A} admet ainsi 2^p points extrêmes, ne pouvant s'exprimer sous la forme :

$$\lambda A^1 + (1 - \lambda) A^2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad A^1, A^2 \in \mathcal{A}.$$

Ces points extrêmes $A^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, 2^p$, sont obtenus en posant soit $a_{ij} = a_{ij}^0$ soit $a_{ij} = a_{ij}^*$ pour chacun des p éléments variables. Ils peuvent être ordonnés de telle sorte que deux points consécutifs ne diffèrent que par la valeur d'un seul élément, selon une procédure énumérative décrite en particulier dans [6]. Sans grande perte de généralité, nous supposons que ces points extrêmes sont tels que :

$$\forall l = 1, 2, \dots, 2^p, \quad |A^{(l)}| \neq 0, \quad (6)$$

On peut donc leur associer les points :

$$x^{(l)} = (A^{(l)})^{-1}b, \quad l=1, 2, \dots, 2^p, \tag{7}$$

du polytope P , appelés *points caractéristiques*.

Afin de mieux préciser la correspondance entre \mathcal{A} et P considérons tout d'abord les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 1 : P est un ensemble compact et connexe si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad |A| \neq 0.$$

Démonstration : Suff.: \mathcal{A} étant un ensemble compact où le déterminant $|A|$ ne s'annule pas, tous les éléments a^{ij} de la matrice inverse A^{-1} sont des fonctions continues de $A \in \mathcal{A}$, de même que toutes les composantes x_i de $x = A^{-1}b$. $P = \{x \mid x = A^{-1}b, A \in \mathcal{A}\}$ est donc compact et comme \mathcal{A} est convexe donc connexe, P est également connexe.

Néc : évidente d'après la figure 2 ci-après ($n=2, p=1$) qui représente le cas de deux droites d_1, d_2 où d_1 est fixe, d_2 pouvant varier entre d_2^0 et d_2^* et être parallèle à d_1 , ce qui correspond à $|\mathcal{A}|=0$. $P = P_1 \cup P_2$ n'est ni compact ni connexe.

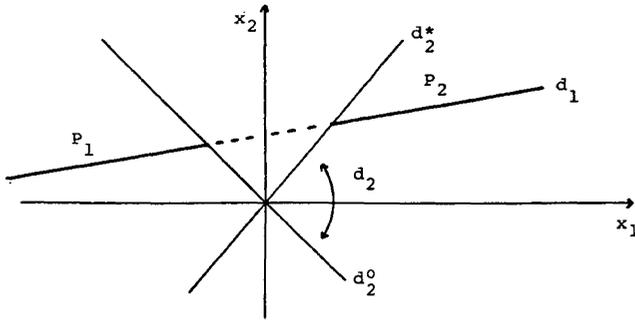


Figure 2

PROPOSITION 2 : $\forall A \in \mathcal{A}, |A| \neq 0$ si et seulement si tous les déterminants $|A^{(l)}|, l=1, 2, \dots, 2^p$, sont de même signe.

Démonstration : Suff. : en partant d'un point extrême B de \mathcal{A} tel que $|B| \neq 0$, on a remarqué que tous les autres points extrêmes peuvent être obtenus successivement en modifiant la valeur d'un seul élément variable à la fois. Si C est un tel point obtenu à partir de B en modifiant la valeur de l'élément b_{hk} :

$$c_{ij} = b_{ij}, \quad i \neq j \neq k$$

et :

$$c_{hk} = b_{hk} + \Delta,$$

on vérifie aisément que :

$$|C| = |B| (1 + b^{kh} \Delta).$$

Par conséquent $|B|$ et $|C|$ sont de même signe si et seulement si $b^{kh} \Delta > -1$. Compte tenu de la propriété de monotonie :

$$\frac{\partial b^{kh}}{\partial b_{hk}} = -(b^{kh})^2 \leq 0,$$

tous les points D de l'arête (B, C) sont alors tels que $|B|$ et $|D|$ sont de même signe. Quant aux autres points du parallélotope \mathcal{A} , remarquons que l'on peut les considérer comme des points extrêmes de sous-parallélotopes appropriés obtenus en diminuant de manière adéquate la longueur initiale des intervalles.

Néc : elle découle immédiatement de la propriété de continuité du déterminant $|A|$, qui ne peut changer de signe sans s'annuler en un point donné.

Le principal intérêt des propositions 1 et 2 ci-dessus est de fournir un test simple pour vérifier si P est compact et connexe ou non. Pratiquement, il ne sera d'ailleurs pas nécessaire de vérifier cette condition pour les 2^p points caractéristiques de P , mais seulement pour le sous-ensemble de ceux appartenant à la frontière des projections de P sur des plans ou des axes.

Dans ce qui suit, nous supposons que P est un ensemble compact et connexe ⁽¹⁾.

En vue de caractériser la frontière de P , considérons tout d'abord les problèmes d'optimum :

$$\min_{A \in \mathcal{A}} x_i \quad \text{et} \quad \max_{A \in \mathcal{A}} x_i, \quad (8)$$

qui définissent la projection (x_i^0, x_i^*) de P par rapport à l'axe de la i -ième variable x_i . (x_i^0, x_i^*) est évidemment un intervalle fermé, compact et connexe, dont les bornes vérifient la propriété suivante.

⁽¹⁾ Dans le cas contraire, le programme Inmain donné en annexe commande l'impression suivante :

!! SINGULAR POLYTOPE !!

tout en continuant la procédure d'exploration.

PROPRIÉTÉ 3 : Une variable générique x_i de $x=A^{-1}b$ prend ses valeurs extrêmes x_i^0, x_i^* en des points extrêmes de \mathcal{A} , définissant des points caractéristiques de P .

Démonstration : Les dérivées partielles de x_i par rapport aux éléments variables a_{hk} , données par :

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_{hk}} = -a^{ih}x_k, \tag{9}$$

sont des fonctions continues de $A \in \mathcal{A}$ et sont telles que si A et B ne diffèrent que par la valeur de l'élément a_{hk} :

$$\frac{\partial y_i}{\partial b_{hk}} = \frac{\partial x_i}{\partial a_{hk}} \left(\frac{1}{1+a^{kh}\Delta} \right)^2, \tag{10}$$

où l'on pose :

$$b_{hk} = a_{hk} + \Delta, \quad x = A^{-1}b \quad \text{et} \quad y = B^{-1}b.$$

En effet, les éléments de B^{-1} et A^{-1} sont tels que :

$$b^{ij} = a^{ij} - \frac{a^{ih}a^{kj}\Delta}{1+a^{kh}\Delta}, \tag{11}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

et :

$$y_k = x_k \frac{1}{1+a^{kh}\Delta}. \tag{12}$$

Dès lors, le tableau I résume les conditions nécessaires des problèmes d'optimum (8), qui doivent être satisfaites pour tous les éléments variables, ce qui établit le résultat.

TABLEAU I
Conditions nécessaires des problèmes (8)

Signe de $\frac{\partial x_i}{\partial a_{hk}}$	min x_i	max x_i
Positif	$a_{hk} = a_{hk}^0$	$a_{hk} = a_{hk}^*$
Négatif	$a_{hk} = a_{hk}^*$	$a_{hk} = a_{hk}^0$

(13)

Pratiquement, on peut remarquer que lorsque les dérivées (9) ne changent pas de signe sur \mathcal{A} , les conditions (13) ci-dessus permettent d'obtenir immédiatement les solutions optimales x_i^0, x_i^* , d'où le corollaire.

COROLLAIRE : Lorsque les dérivées (9) ne changent pas de signe sur \mathcal{A} , les conditions (13) sont nécessaires et suffisantes pour les problèmes d'optimum (8).

Considérons maintenant deux points extrêmes $A^{(l)}, A^{(k)}$, et désignons symboliquement par $H_i^{(l)}, H_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ les hyperplans définis par les systèmes :

$$A^{(l)}x = b \quad \text{et} \quad A^{(k)}x = b,$$

respectivement. Lorsque $A^{(l)}$ et $A^{(k)}$, ont $n - 1$ lignes communes, sauf la j -ième, par exemple, l'intersection des hyperplans correspondants :

$$\bigcap_{i \neq j} H_i^{(l)}, \quad \bigcap_{i \neq j} H_i^{(k)},$$

définit une droite de la forme :

$$x(\lambda) = x^{(l)} + \lambda(x^{(k)} - x^{(l)}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

car elle passe forcément par les points $x^{(l)}$ et $x^{(k)}$. La variation continue des éléments variables de la j -ième ligne engendre ainsi un ensemble continu d'hyperplans contenant en particulier $H_j^{(l)}$ et $H_j^{(k)}$, dont l'intersection avec la droite (14) définit un *segment* ou une *arête*, c'est-à-dire un sous-polytope de dimension 1 compact et connexe. Les extrémités du segment doivent correspondre à deux points caractéristiques de P en raison des conditions (13) ci-dessus.

Dès lors, on peut définir formellement une arête $(x^{(l)}, x^{(k)})$ par la condition :

$$A^{(l)} \quad \text{et} \quad A^{(k)} \quad \text{ont exactement } n - 1 \text{ lignes communes}, \quad (15)$$

elle est donnée par la combinaison linéaire convexe :

$$x(\lambda) = \lambda x^{(k)} + (1 - \lambda)x^{(l)}, \quad \lambda \in (0, 1), \quad (16)$$

dont le *support* est la droite (14).

Plus généralement, lorsque $A^{(l)}$ et $A^{(k)}$ ont $n - r$ lignes communes, l'intersection des hyperplans correspondants définit dans l'espace \mathbb{R}^n une variété linéaire H_r , de dimension r . Le sous-polytope $H_r \cap P$ étant compact et connexe, il est nécessairement borné par des sous-polytopes de dimension $r - 1$.

Et ainsi de suite, pour $r=2$, $H_2 \cap P$ est borné par un ensemble d'arêtes, chaque arête étant bornée par deux points caractéristiques de P . Dans l'espace \mathbb{R}^n , la frontière de P correspond donc à une figure géométrique de type polyédrique dont la dimension est donnée par le nombre $q \leq n$ de relations de $Ax=b$ contenant des éléments variables.

En vue d'étudier P par projection sur des plans de la forme $(x_i, x_j) \ i \neq j$, il est alors légitime de limiter la définition de la frontière de P à l'ensemble de ses points caractéristiques $x^{(l)}$, $l=1, 2, \dots, 2^p$, et aux arêtes de la forme $(x^{(l)}, x^{(k)})$ reliant ces points, données par les conditions (15) et (16). La proposition suivante résume ces considérations.

PROPOSITION 4 : *La projection de P sur un plan est un polygone dont les sommets sont les projections d'un sous-ensemble des points caractéristiques et les arêtes la projection des arêtes correspondantes de P .*

Remarquons encore que, par comparaison avec les polytopes de la programmation linéaire définis par des systèmes d'inégalités, les polytopes P engendrés par des variations d'hyperplans ne sont pas forcément convexes, ce qui ressort en particulier de l'illustration décrite au point 4. ci-après où certaines projections de P sont non convexes. Si elle présente l'avantage de rendre suffisantes les conditions nécessaires (13) des problèmes d'optimum (8), la convexité n'apparaît toutefois pas comme une propriété cruciale dans le cadre envisagé. En effet, des problèmes d'optimum de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_x c'x, \\ x \in P, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_x c'x, \\ x \in P, \end{array} \right.$$

peuvent être résolus en adjoignant au système $Ax=b$, $A \in \mathcal{A}$ la relation supplémentaire $x_{n+1} = c'x$ et en projetant le nouveau polytope ainsi défini sur l'axe « x_{n+1} ».

3. PROBLÈMES DE PROJECTION

D'après la proposition 3 ci-dessus, les projections de P sur les différents axes x_i sont données par des intervalles fermés (x_i^0, x_i^*) , $i=1, 2, \dots, n$ et peuvent être obtenues par l'énumération et le calcul systématique des 2^p points caractéristiques de P . Plus précisément, partant d'un point extrême $A \in \mathcal{A}$, cette procédure nécessite le calcul de A^{-1} , les $2^p - 1$ autres matrices inverses et points caractéristiques s'en déduisant de manière récursive par application de la relation (11) entre matrices inverses lorsque ces matrices ne diffèrent que par la valeur d'un seul élément. Eu égard au nombre d'opérations qu'elle nécessite,

cette procédure ne pourra toutefois guère s'appliquer au-delà de $p = 15$ éléments variables, ce qui correspond déjà au calcul de plus de 32 000 points caractéristiques de P .

Une autre méthode plus heuristique consiste à utiliser les conditions (13) nécessaires pour les problèmes (8). En partant d'un point initial $A \in \mathcal{A}$, l'application des conditions (13) pour la recherche de x_i^* (ou x_i^0) conduit à rechercher à chaque itération un nouveau point extrême $A^{(j)}$, tel que :

$$a_{hk}^{(j)} = a_{hk}^* \quad \text{si} \quad \frac{\partial x_i}{\partial a_{hk}^{(j-1)}} \geq 0$$

et :

$$a_{hk}^{(j)} = a_{hk}^0 \quad \text{sinon,}$$

jusqu'à une itération s pour laquelle :

$$a_{hk}^{(s)} = a_{hk}^{(s-1)},$$

pour tous les éléments variables a_{hk} . Comme on l'a souligné, cette procédure converge immédiatement lorsque les dérivées partielles $\partial x_i / \partial a_{hk}$ ne changent pas de signe sur \mathcal{A} . Elle peut par contre ne pas converger du tout lorsque :

$$\text{signe} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_{hk}^{(j-1)}} \right) = - \text{signe} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_{hk}^{(j)}} \right) \quad (17)$$

ou converger vers un optimum local seulement lorsque P n'est pas convexe.

Malgré ces inconvénients, c'est cette méthode qui a été retenue dans le programme Inmain ci-après car sa mise en œuvre n'est pas *a priori* limitée par le nombre p d'éléments variables. Toutefois, il s'est avéré nécessaire d'introduire un test sur le nombre maximal d'itérations permises afin d'éviter les situations de cycle entre deux points extrêmes exprimées par les conditions (17) ci-dessus.

Pour ce qui est maintenant du problème de la projection de P dans un plan, le plan \mathbb{R}^2 correspondant aux deux premières composantes (x_1, x_2) de x par exemple, il généralise bien évidemment celui des projections $[x_1^0, x_1^*]$ et $[x_2^0, x_2^*]$ sur les axes x_1 et x_2 respectivement. D'après la proposition 4, nous savons que cette projection est un ensemble polygonal R , compact et connexe, possédant donc en particulier la propriété suivante.

PROPOSITION 5 : *Chaque point caractéristique de P projeté sur la frontière de R est l'origine de deux arêtes au moins projetées partiellement ou entièrement sur cette frontière et telles que l'une est de pente maximale et l'autre de pente minimale dans le plan considéré.*

A titre d'illustration, considérons la figure suivante comme exemple de discussion.

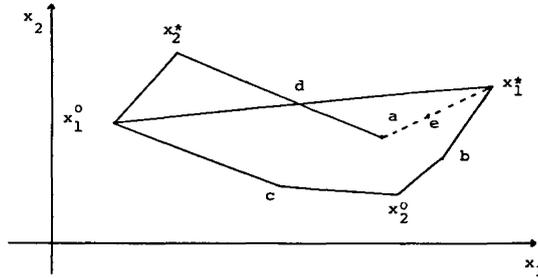


Figure 3

Le point x_2^* est l'origine de deux arêtes de pente optimale, l'une (x_2^*, x_1^o) projetée sur la frontière de R , l'autre (x_2^*, a) projetée en partie sur la frontière (x_2^*, d) et en partie à l'intérieur de la projection (d, a) . Le point d n'est pas forcément la projection d'un point caractéristique de P , mais peut apparaître comme l'intersection de deux arêtes en projection.

Afin d'obtenir le dessin automatique de telles projections l'algorithme proposé dans le programme Inmain consiste dès lors à définir un chemin formé d'arêtes consécutives de pente optimale par rapport aux huit directions énumérées successivement dans la figure ci-après.

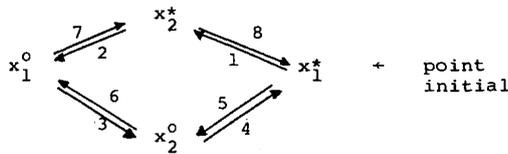
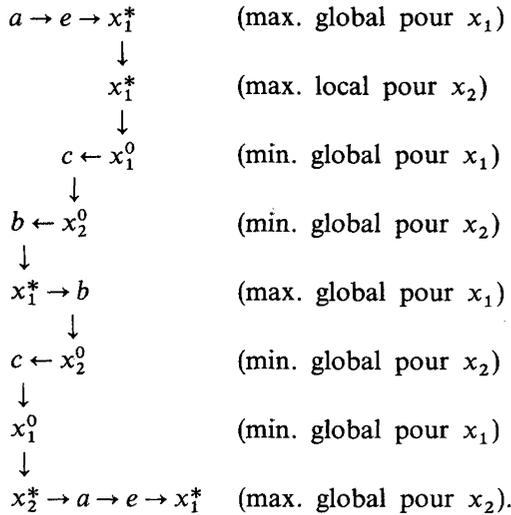


Figure 4

Chaque étape l de la construction du chemin est représentée par un point caractéristique $x^{(l)}$ à partir duquel on ne considère que l'ensemble des arêtes donnant lieu à un accroissement positif (négatif) dans la direction x_i^* (x_i^o , respectivement) $i=1, 2$, selon le signe des dérivées partielles $\partial x_i / \partial a_{hk}$. Lorsque cet ensemble est vide, un optimum local au moins est atteint et l'on passe à la direction suivante. Dans le cas contraire on retient l'arête $(x^{(l)}, x^{(l+1)})$ de pente optimale, conduisant à l'étape $(l+1)$ et au nouveau point caractéristique $x^{(l+1)}$.

Par exemple, en partant du point a de la figure 3, on aura, dans l'ordre, le chemin ci-après :



Si l'algorithme proposé est relativement simple à mettre en œuvre même pour des systèmes de grande dimension comportant un nombre élevé d'éléments variables, on ne peut toutefois garantir qu'il fournisse l'ensemble de la projection R dans tous les cas de figure, en particulier lorsque les non-convexités de P sont nombreuses à se superposer dans la projection retenue. Il conviendra alors de superposer également plusieurs chemins du type défini dans la figure 4 en changeant le point initial du chemin et l'ordre des directions. Ainsi, le programme Inmain effectuée, dans la version présentée ci-après, une première exploration selon le schéma de la figure 4, complétée par le deuxième chemin suivant :

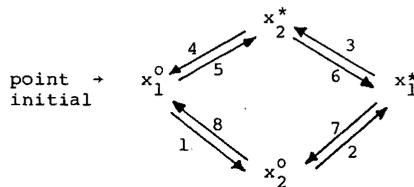


Figure 5

A titre de vérification de la pertinence de la projection obtenue, on pourra comparer les deux projections, dans le plan (x_1, x_2) et dans le plan (x_2, x_1) d'une part, avec celles résultant d'un autre choix de plans de projections faisant intervenir l'une des variables x_1 ou x_2 d'autre part.

Dans le processus de cheminement défini ci-dessus, il n'est pas sans intérêt de distinguer certains points intérieurs liés à des non-convexités du polytope, des autres points que nous appellerons *points critiques*. Plus précisément, en partant d'un point extrême $A^{(0)} \in \mathcal{A}$, on peut considérer les p arêtes $(A^{(0)}, A^{(i)})$ de \mathcal{A} et les arêtes correspondantes $(x^{(0)}, x^{(i)})$ de $P, i = 1, 2, \dots, p$.

En posant :

$$\bar{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad \bar{x}^{(i)} = \left\| \begin{matrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{matrix} \right\|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p,$$

on peut définir, dans le plan (x_1, x_2) le polygone convexe :

$$S = \left\{ \bar{x} / \bar{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}^{(i)}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}. \tag{18}$$

Les points que l'on se propose de mettre en évidence ici sont ceux qui appartiennent à l'intérieur $\overset{0}{S}$ de l'ensemble S , qui conduisent à distinguer, dans la projection des points caractéristiques, les deux situations schématisées dans la figure 6 ci-après :

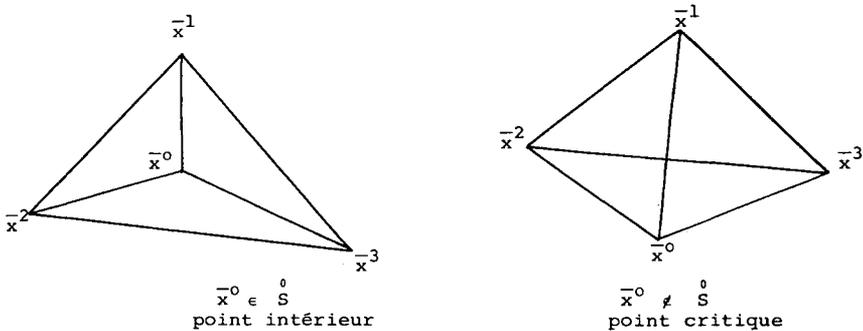


Figure 6

Soit dès lors :

$$\lambda = \|\lambda_i\|_{i=1,2,\dots,p} \quad \text{et} \quad \Gamma = \left\| \begin{matrix} x_j^{(i)} - x_j^{(0)} \end{matrix} \right\|_{2 \times p},$$

$$j = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

On vérifie aisément que $\bar{x}^{(0)} \in \overset{0}{S}$ si et seulement si il existe au moins une solution strictement positive ($\lambda > 0$) du système homogène :

$$\Gamma \lambda = 0 \tag{19}$$

et par dualité (voir par exemple [3], p. 256), nous savons que soit $\Gamma\lambda=0$ admet une solution $\lambda>0$, soit $y'\Gamma\geq 0$ a une solution. Par conséquent, nous sommes conduits à examiner l'existence de deux nombres y_1, y_2 , vérifiant les inégalités :

$$y_1 \gamma_{1i} + y_2 \gamma_{2i} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, p. \quad (20)$$

D'après la partition suivante de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$I_0 = \{i/\gamma_{1i}=0\}, \quad I_1 = \{i/\gamma_{1i}>0\} \quad \text{et} \quad I_2 = \{i/\gamma_{1i}<0\},$$

les inégalités (20) s'écrivent :

$$\begin{aligned} y_2 \gamma_{2i} &\geq 0, & \forall i \in I_0, \\ y_1 &\geq -\frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1i}} y_2, & \forall i \in I_1, \\ y_1 &\leq -\frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1i}} y_2, & \forall i \in I_2. \end{aligned}$$

Trois types de solutions peuvent alors être distingués, résumés dans le tableau II, qui sont tels que si l'une des conditions (a), (b) ou (c) est vérifiée, alors $\Gamma\lambda=0$ n'admet pas de solution $\lambda>0$.

TABLEAU II

Type de solutions	Conditions d'existence
$y_2=0$	(a) $I_1 \cup I_2 \neq \emptyset$ et $I_1 = \emptyset$ ou $I_2 = \emptyset$.
$y_2=1$	(b) $\max_{i \in I_1} \left\{ -\frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1i}} \right\} \leq \min_{i \in I_2} \left\{ \frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1i}} \right\}$ et $\gamma_{2i} \geq 0$, $\forall i \in I_0$.
$y_2=-1$	(c) $\max_{i \in I_1} \left\{ \frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1i}} \right\} \leq \min_{i \in I_2} \left\{ \frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1i}} \right\}$ et $\gamma_{2i} \leq 0$, $\forall i \in I_0$.

Dans le programme Inmain, l'examen de ces conditions d'existence est faite par le sous-programme Topol. Le programme Inmain considère, de manière générale, que tous les points du cheminement sont des points critiques et lorsqu'il rencontre un point ne vérifiant pas l'une des conditions ci-dessus, il commande l'impression du message suivant :

===== NEXT POINT IS INTERIOR.

4. ILLUSTRATION ET CONCLUSION

Afin d'illustrer la démarche proposée et les résultats fournis par le programme Inmain nous considérerons dans ce qui suit l'exemple d'une matrice d'ordre 3, telle que $a_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$, contenant $p = 6$ éléments variables dont les bornes sont résumées dans le tableau III, où 0 repère la borne inférieure de l'élément et 1 sa borne supérieure.

TABLEAU III

	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{23}	a_{31}	a_{32}
0	0,4	0,3	-0,4	-0,4	0,2	-0,2
1	0,6	0,4	-0,2	-0,1	0,3	0.

Un point extrême du parallétope \mathcal{A} est ainsi caractérisé par une suite ordonnée de 6 nombres binaires associés, dans l'ordre, aux éléments a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{23} , a_{31} , a_{32} .

On trouvera, au point 3. de l'annexe, l'input d'Inmain correspondant à ces données pour un vecteur $b' = \|001\|$ et le plan de projection (x_1, x_3) . En particulier, pour chaque ligne de la matrice $\|A : b\|$ évaluée au point moyen $\bar{A} = 1/2(A^0 + A^*)$ le programme lit deux cartes, la première comportant le nombre d'éléments non nuls et les numéros de colonne de ces éléments et la deuxième leur valeur numérique. Le programme lit ensuite, pour chaque élément variable les indices de sa ligne (h) et de sa colonne (k) ainsi que la demi-longueur de son intervalle de définition. L'avant dernière carte est consacrée au choix du plan de projection, et la dernière concerne la commande du système de traceur pour la projection. Une illustration des résultats d'impression commandés par le programme est donnée au point 4 de l'annexe.

Il ressort des résultats obtenus que les projections de P sur les axes sont les suivantes, où les nombres binaires entre parenthèses repèrent les points extrêmes correspondants du parallétope :

$$\begin{array}{ll}
 x_1^0 = -0,741 & x_1^* = -0,307 \\
 (111010) & (100100) \\
 x_2^0 = -0,058 & x_2^* = 0,389 \\
 (010111) & (001010) \\
 x_3^0 = 1,058 & x_3^* = 1,296 \\
 (100100) & (111010)
 \end{array}$$

Ces différents points sont reportés dans la figure 7 ci-après, qui représente la projection du polytope dans le plan (x_1, x_3) . On remarquera notamment la non-convexité de cette projection qui permet de conclure à la non-convexité de P (ou de P^+) dans cet exemple.

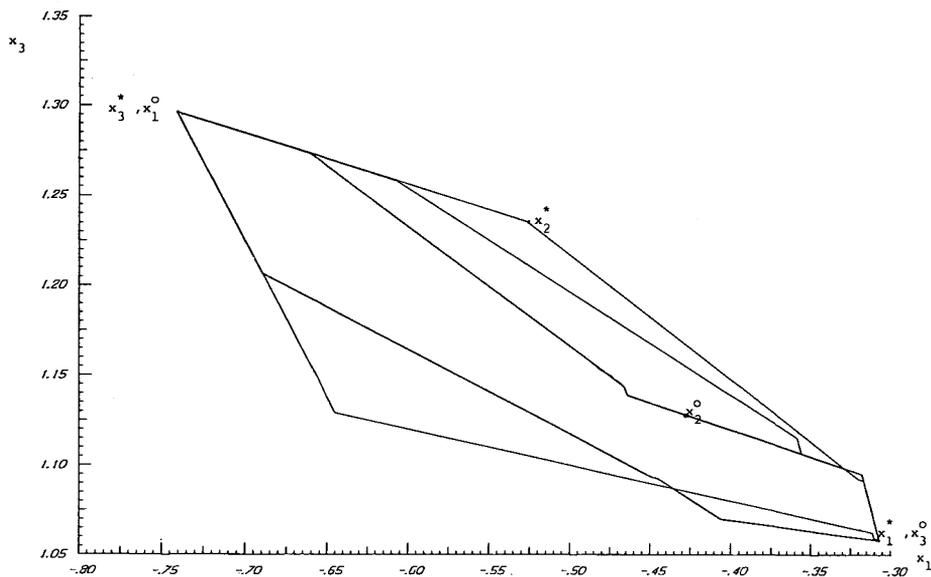


Figure 7

En conclusion, il convient de signaler que l'approche géométrique proposée pour l'inverse d'une matrice d'intervalles a déjà fait l'objet de plusieurs applications en particulier pour des problèmes de prévision et d'aide à la décision dans les modèles économiques (voir [6, 8 et 9]). Dans ce cadre, elle est apparue comme une méthode rigoureuse et puissante, fondée sur une représentation exhaustive de l'ensemble des situations possibles, tout en s'avérant efficace d'un point de vue opératoire. Quant à ses limites, il s'agit essentiellement du problème des variations dépendantes de certains éléments de la matrice A . En effet, dans le cadre conceptuel retenu, tous les éléments variables sont supposés pouvoir le faire de manière indépendante, ce qui exclut les situations où un même élément variable interviendrait dans deux ou plusieurs équations. Cela exclut aussi la prise en compte de contraintes, de la forme $a_{ij} + a_{rs} = k$, par exemple, k pouvant être un nombre fixé ou un élément variable tel que $k \in (k^0; k^*)$. On vérifie aisément, dans le cas simple d'une matrice carrée d'ordre 2, que ce type de contraintes engendre des non linéarités, ce qui rend difficile et peu pratique l'étude des projections sur des plans.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. GOOS et J. HARTMANIS, *Interval Mathematics*, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Springer-Verlag, 1975.
2. K. LANCASTER, *The Theory of Qualitative Linear Systems*, *Econometrica*, vol. 33, 1965, p. 395-408.
3. K. LANCASTER, *Mathematical Economics*, New York, McMillan, 1969.
4. R. E. MOORE, *Interval Analysis*, London, Prentice Hall, 1966.
5. G. RITSCHARD, *Contribution à l'analyse des structures qualitatives des modèles économiques*, P. Lang, Berne, 1980.
6. G. RITSCHARD et E. ROSSIER, *Qualitative and Geometric Methods for Large Econometric Models*, Large Scale Systems, vol. 2, 1981, p. 269-290.
7. E. ROSSIER, *Economie structurale*, *Economica*, Paris, 1979.
8. E. ROSSIER, *Une approche géométrique du problème de la prévision*, Genève; Cahiers du Département d'économétrie, 1981.
9. D. ROYER, *The Geometry of non Walrasian Open Economies*, Genève; Cahiers du Département d'Économétrie, 1981.
10. P. A. SAMUELSON, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1947.

ANNEXE

Le programme Fortran *Inmain* pour l'Inverse d'une matrice d'intervalles.

AVERTISSEMENT

L'utilisateur est invité à adapter le présent programme en tenant compte des particularités de l'ordinateur utilisé et de la nature du problème à étudier. Cela concerne essentiellement la lecture des données (cartes 72 à 90), le dessin automatique des projections (système Plot.) et le sous-programme MATIN2 qui, suivant les cas, devrait exploiter la structure particulière de la matrice A .

SOMMAIRE

1. Listing of the program.
2. Listing of the subroutine Topol.
3. Input illustration.
4. Output illustration.

1. LISTING OF THE PROGRAM

```

1      C
2      C PROGRAM INMAIN , BY EDOUARD ROSSIER UNIVERSITE DE GENEVE-CM
3      C
4      C 1.INMAIN IS A FORTRAN PROGRAM FOR STUDYING THE INVERSE OF A MATRIX
5      C OF INTERVALS BY USING A GEOMETRIC APPROACH WITH PROJECTION METHODS
6      C 2.METHODOLOGICAL REFERENCES : ROSSIER(1980),THE GEOMETRY OF ECONO-
7      C MIC KNOWLEDGE,CAHIERS DU DEPARTEMENT D'ECONOMETRIE DE L'UNIVER-
8      C SITE DE GENEVE; ROSSIER(1979),ECONOMIE STRUCTURALE,PARIS,ECONO-
9      C MICA; ROSSIER(1981),UNE APPROCHE GEOMETRIQUE DU PROBLEME DE LA
10     C PREVISION (FORTHCOMING)
11     C 3.MAX. NUMBER OF REL.:N=40 MAX. NUMBER OF VAR.PARAMETERS:NV=20
12     C M=0 : PROJECTION ON PLANE (IA,IO) ONLY
13     C M#0 : NUMBER OF ENDOGENOUS VARIABLES
14     C M<0 : PROJECTION ON AXES ONLY
15     C M>0 : PROJECTION ON PLANE (IA,IO) AND ON AXES
16     C IN ANY CASES, M, IA, IO, MUST BE GIVEN
17     C A IS THE MATRIX OF THE CANONICAL FORM
18     C B IS THE VECTOR OF THE CANONICAL FORM
19     C IL,IC ARE 2 VECTORS OF INDEXES LOCATING LINE (IL) AND
20     C COLUMN (IC) FOR EACH VARIABLE ELEMENT IN MATRIX A
21     C D IS THE VECTOR OF 1/2 LENGTHS OF INTERVALS GIVEN IN T-E
22     C SAME ORDER AS IL,IC
23     C 4.AN EXTREME POINT OF THE A DOMAIN (PARALLELOTOPE) IS REPRESENTED
24     C BY A SEQUENCE OF NV BINARY NUMBERS,IN THE SAME ORDER AS D,WITH
25     C THE CONVENTION:0 FOR THE LOWER BOUND OF THE CORRESPONDING PARA-
26     C METER,AND 1 FOR ITS UPPER BOUND
27     C 5.CARDS FOR PLOT. AND CARDS 72 TO 90 FOR INITIAL DATA VALUES
28     C MAY BE CHANGED ACCORDING TO THE SYSTEM AND DATA BANK USED
29     C 6.SUBROUTINE MATIN2 FOR MATRIX INVERSION AND SOLUTION OF AX=B,
30     C AND DIAG FOR THE PLOT. SYSTEM MUST BE GIVEN BY THE USER
31     C AFTER A CALL TO MATIN2,MATRIX A CONTAINS ITS INVERSE AND VECTOR
32     C SOLUTION X IN COLUMN N+1;DET IS THE DETERMINANT OF A
33     C 7.NUMERICAL OUTPUT IS ESSENTIALLY HANDLED BY FORMATS OF
34     C CARDS 55 TO 59
35     C 8.SPECIAL MESSAGES:
36     C !!SINGULAR POLYTOPE!! WILL BE WRITTEN WHEN DET CHANGES SIGN
37     C ==NEXT POINT IS INTERIOR WILL BE WRITTEN ONLY WHEN THE POINT
38     C IS NOT A CRITICAL ONE
39     C
40     C DOUBLE PRECISION A,H,X,DET,XA,XO,DT,DD,VD,DX,DIX
41     C DIMENSION A(40,41),H(40,41),INDEX(40),X(40),B(40)
42     C COMMON/PEX/XA(20),XO(20),IEX,NV
43     C DIMENSION LN(40),FA(20),MI(2)
44     C DIMENSION D(20),IB(20),IL(20),IC(20)
45     C
46     C CARDS FOR PLOT. ONLY
47     C
48     C DIMENSION PX(500),PY(500),LX(2),LY(2),LTITR(6)
49     C COMMON/XMOD/XMOD(45)
50     C COMMON/CODIA/XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,GRX,GRY,UGR,SGX,SGY,IOP,
51     C INFX(5),NFY(5)
52     C COMMON/MASO/DIMX,DIMY,XINT,YINT
53     C
54     C DATA MI(1)/4HMIN./,MI(2)/4HMAX./
55     C 104 FORMAT(/50X,15H======>>>,A4,6H VAR. ,I3,2H :.F11.3/)
56     C 108 FORMAT(/1X,8F11.3/(1X,8F11.3))
57     C 107 FORMAT(/1X,I3,2H :.F10.3,3X,I3,2H :.F10.3,5H DET:.,E12.3,11X,20I2)
58     C 103 FORMAT(/1X,4HDET:.,E15.3)
59     C 102 FORMAT(/1X,I5,8F11.3/(6X,8F11.3))
60     C
61     C CARDS FOR PLOT. ONLY
62     C
63     C DIMY=17C.
64     C DIMX=250.
65     C XINT=50.
66     C YINT=50.
67     C XMOD(28)=25.
68     C XMOD(29)=2.01
69     C XMOD(30)=2.52
70     C XMOD(18)=1.
71     C

```

```

72 C DATA--VALUES AT THE MEAN POINT AND 1/2 LENGTH OF INTERVALS
73 C
74 LU=5
75 IP=6
76 READ(LU,100)N,NV,M
77 IST=1
78 NI=0
79 N1=N+1
80 D07I=1,N
81 D07J=1,N1
82 7 A(I,J)=0.
83 D01I=1,N
84 READ(LU,100)NJ,(LN(J),J=1,NJ)
85 READ(LU,100)(FA(J),J=1,NJ)
86 D01J=1,NJ
87 JJ=LN(J)
88 1 A(I,JJ)=FA(J)
89 D02I=1,NV
90 2 READ(LU,100)IL(I),IC(I),D(I)
91 READ(LU,100)IA,IO
92 10G FORMAT()
93 C
94 C
95 C CARDS FOR PLOT. ONLY
96 C
97 READ(LU,201)XMOD(3),IOPT,LX,LY,LC,NCTR,(LTITR(J),J=1,6),NC
98 201 FORMAT(F5.0,I2,4A4,2I2,6A4,I2)
99 WRITE(IP,300)
100 30G FORMAT(5X,42(1H=) ///)
101 WRITE(IP,305)
102 30S FORMAT(5X,42H> PROGRAM INMAIN < , BY EDOUARD ROSSIER )
103 WRITE(IP,300)
104 C
105 C INVERSE MATRIX D - SOLUTION AT MEAN POINT
106 C
107 D03I=1,N
108 D06J=1,N1
109 6 H(I,J)=A(I,J)
110 3 B(I)=A(I,N1)
111 CALL MATIN2(A,40,N,41,1,INDEX,NER,DET)
112 IF(NER.EQ.-1)GOTO68
113 SDET=DET
114 WRITE(IP,101)
115 101 FORMAT(///5X,42HINVERSE MATRIX D - SOLUTION AT MEAN POINT )
116 WRITE(IP,300)
117 D05I=1,N
118 5 WRITE(IP,102)I,(A(I,J),J=1,N1)
119 WRITE(IP,103)DET
120 C
121 C SEARCH OF THE INITIAL POINT MAX. X(IA)
122 C
123 D04IV=1,NV
124 I=IL(IV)
125 J=IC(IV)
126 DX=-A(IA,I)*A(J,N1)
127 IF(DX)8,9,9
128 8 H(I,J)=H(I,J)-D(IV)
129 IB(IV)=0
130 D(IV)=2.*D(IV)
131 GOTO4
132 9 H(I,J)=H(I,J)+D(IV)
133 IB(IV)=1
134 D(IV)=2.*D(IV)
135 4 CONTINUE
136 C
137 C
138 ITER=0
139 14 CONTINUE
140 D01OI=1,N
141 D01OJ=1,N1
142 10 A(I,J)=H(I,J)
143 IF(M.GE.D)GOTO65
144 GOTO66
145 65 CONTINUE
146 CALL MATIN2(A,40,N,41,1,INDEX,NER,DET)

```

```

147         SET=DET/SDET
148         IF (SET.LE.U.) GOTO58
149         IF (ITER.GT.2) GOTO7C
150     C
151     73 ITER=ITER+1
152         IDX=0
153         DO11IV=1,NV
154         I=IL(IV)
155         J=IC(IV)
156         DX=-IST*A(IA,I)+A(J,N1)
157         IF (DX) 12,11,13
158     12 IF (IB(IV).EQ.0) GOTO11
159         H(I,J)=H(I,J)-D(IV)
160         IB(IV)=C
161         IDX=IDX+1
162         LN(IDX)=IL(IV)
163         INDEX(IDX)=IC(IV)
164         GOTO11
165     13 IF (IB(IV).EQ.1) GOTO11
166         H(I,J)=H(I,J)+D(IV)
167         IB(IV)=1
168         IDX=IDX+1
169         INDEX(IDX)=IC(IV)
170         LN(IDX)=IL(IV)
171     11 CONTINUE
172         IF (IDX.EQ.0) GOTO58
173         WRITE(IP,113) (LN(I),I=1,IDX)
174         WRITE(IP,114) (INDEX(I),I=1,IDX)
175         GOTO14
176     70 WRITE(IP,120) ITER
177     113 FORMAT(/1X,14HCHANGE : REL.,2X,20I4)
178     114 FORMAT( 1X,14H      .ELT.,2X,20I4)
179     58 WRITE(IP,106) IA,IO
180     106 FORMAT(///1X,24HCRITICAL POINTS IN PLANE,2I5)
181         WRITE(IP,301)
182     301 FORMAT(1X,24(1H=) ///)
183     C
184     C EXPLORATION PROCEDURE
185     C
186         NI=NI+1
187     C CARDS FOR PLOT. ONLY
188         PX(NI)=A(IA,N1)
189         PY(NI)=A(IO,N1)
190     C
191         SET=DET/SDET
192         IF (SET.LE.U.) WRITE(IP,400)
193     400 FORMAT(/1X,36H!! SINGULAR POLYTOPE !!!!!!!!!!!!! //)
194         WRITE(IP,107) IA,A(IA,N1),IO,A(IO,N1),DET,(IB(J),J=1,NV)
195         WRITE(IP,108) (A(I,N1),I=1,N)
196         NI=NI+1
197         DO15I=1,N
198     15 X(I)=A(I,N1)
199     C
200         IZ=IA
201     23 ISS=1
202         IT=0
203         DO16ITT=1,4
204         ID=IT*IA+(1-IT)*IO
205         LD=IT*IO+(1-IT)*IA
206         IT=1-IT
207         IF (ID.EQ.IZ) ISS=-ISS
208         ISS=ISS*IST
209     36 IM=0
210         DO25LV=1,NV
211         IR=IL(LV)
212         JC=IC(LV)
213         DX=-A(ID,IR)*X(JC)+ISS
214         IF (DX.EQ.0.) DX=1.0E-18
215         AL=-IB(LV)
216         IF (DX.GT.0.) AL=AL+1.
217         DX=DX*AL
218         IF (DX.EQ.0.) GOTO25
219         DIX=ABS(A(LD,IR)*X(JC))
220         IF (DIX.EQ.U.) DIX=1.0E-9
221         IM=IM+1

```

```

222      FA(IM)=DX/DIX
223      LN(IP)=LV
224      25 CONTINUE
225      IF(IM.EQ.0)GOTO18
226      J=1
227      D040I=J,IM
228      IF(FA(J)-FA(I))41,40,40
229      41 SOX=FA(I)
230      LSO=LN(I)
231      FA(I)=FA(J)
232      LN(I)=LN(J)
233      FA(J)=SOX
234      LN(J)=LSO
235      40 CONTINUE
236      IV=LN(1)
237      IR=IL(IV)
238      JC=IC(IV)
239      IX=1-2*IB(IV)
240      IB(IV)=1-IB(IV)
241      VK=IX*D(IV)
242      DD=1.+VK*A(JC,IR)
243      DT=DET*DD
244      DD=VK/DD
245      D017I=1,N
246      X(II)=0.
247      AIH=DD*A(II,IR)
248      D019J=1,N
249      19 H(II,J)=A(II,J)-AIH*A(JC,J)
250      D020J=1,N
251      20 X(II)=X(II)+H(II,J)*B(J)
252      17 CONTINUE
253      D033I=1,NV
254      IK=IC(II)
255      IH=IL(II)
256      IX=1-2*IB(II)
257      VD=1.+H(IK,IH)*IX*D(II)
258      VD=-IX*D(II)+X(IK)/VD
259      XA(II)=H(IA,IH)*VD
260      33 XO(II)=H(IO,IH)*VD
261      IEX=1
262      CALL TOPOL
263      GOTO(26,21),IEX
264      26 WRITE(IP,109)
265      109 FORMAT(/1X,26H=== NEXT POINT IS INTERIOR )
266      21 CONTINUE
267      DET=DT
268      SET=DET/SDET
269      IF(SET.LE.0.)WRITE(IP,400)
270      WRITE(IP,107)IA,X(IA),IO,X(IO),DET,(IB(J),J=1,NV)
271      WRITE(IP,112)IL(IV),IC(IV)
272      112 FORMAT(89X,14HCHANGE : REL.,I3,6H ELT.,I3)
273      WRITE(IP,108)(X(J),J=1,N)
274      C CARDS FOR PLOT. ONLY
275      PX(NI)=X(IA)
276      PY(NI)=X(IO)
277      C
278      NI=NI+1
279      D032J=1,N
280      D032I=1,N
281      32 A(I,J)=H(I,J)
282      IF(SET.GT.0.)GOTO36
283      18 ISA=(ISS+1)/2 +1
284      WRITE(IP,104)M1(ISA),ID,X(ID)
285      16 CONTINUE
286      IF(I2.EQ.IO)GOTO27
287      I2=IO
288      GOTO23
289      27 IF(I2.EQ.-1)GOTO72
290      NI=NI-1
291      IST=-1
292      ITER=0
293      CALL MATIN2(H,40,N,41,1,INDEX,NER,DET)
294      D074I=1,N
295      H(I,N1)=B(I)

```

```

296       74 A(I,N1)=X(I)
297       GOT073
298       72 WRITE(IP,105)IA,IO
299       105 FORMAT(/1X,29HEND OF EXPLORATION IN PLANE ,215/)
300     C
301       NI=NI-1
302       CALL DIAG(PX,PY,NI,LX,LY,LC,NCTR,LTITR,NC)
303       IF(M.EQ.0)GOTO68
304       CALL MATIN2(H,40,N,41,1,INDEX,NER,DET)
305       66 IF(M.LT.0)M=-M
306     C
307     C SEARCH OF (LOCAL) OPTIMAL POINTS
308     C
309       IAS=IA
310       NCTR=-2
311     C
312       WRITE(IP,110)
313       ISS=1
314       DO 56 IIA=1,2
315       NI=0
316       IF(ISS.EQ.-1)WRITE(IP,111)
317     110 FORMAT(/1X,17HSEARCH OF MAXIMUM / 1X,17(1H=)/)
318     111 FORMAT(/1X,17HSEARCH OF MINIMUM / 1X,17(1H=)/)
319       DO55IA=1,M
320       ITER=0
321     54 CONTINUE
322       DO50I=1,N
323       H(I,N1)=B(I)
324       DO50J=1,N1
325     50 A(I,J)=H(I,J)
326       CALL MATIN2(A,40,N,41,1,INDEX,NER,DET)
327       SET=DET/SDET
328       IF(SET.LE.0)GOTO59
329       IF(ITER.GT.3)GOTO71
330       ITER=ITER+1
331     C
332       IDX=0
333       DO51IV=1,NV
334       I=IL(IV)
335       J=IC(IV)
336       DX=-A(IA,I)*A(J,N1)
337       DX=DX*ISS
338       IF(DX)52,51,53
339     52 IF(IB(IV).EQ.0)GOTO51
340       H(I,J)=H(I,J)-D(IV)
341       IB(IV)=0
342       IDX=IDX+1
343       LN(IDX)=IL(IV)
344       INDEX(IDX)=IC(IV)
345       GOT051
346     53 IF(IB(IV).EQ.1)GOTO51
347       H(I,J)=H(I,J)+D(IV)
348       IB(IV)=1
349       IDX=IDX+1
350       INDEX(IDX)=IC(IV)
351       LN(IDX)=IL(IV)
352     51 CONTINUE
353       IF(IDX.EQ.0)GOTO59
354       WRITE(IP,113)(LN(I),I=1,IDX)
355       WRITE(IP,114)(INDEX(I),I=1,IDX)
356       GOT054
357     71 WRITE(IP,120)ITER
358     120 FORMAT(/1X,20HSEARCH STOPPED AFTER ,12,11H ITERATIONS //)
359     59 NI=NI+1
360     C CARDS FOR PLOT. ONLY
361       PX(N1)=A(IAS,N1)
362       PY(N1)=A(IO,N1)
363     C
364       SET=DET/SDET
365       IF(SET.LE.0.)WRITE(IP,400)
366       WRITE(IP,107)IA,A(IA,N1),IAS,A(IAS,N1),DET,(IB(J),J=1,NV)
367       WRITE(IP,108)(A(I,N1),I=1,N)
368     55 CONTINUE
369       ISS=ISS-2
370     C CARDS FOR PLOT. ONLY

```

```

371      CALL DIAG(PX,PY,NI,LX,LY,LC,NCTR,LTITR,NC)
372      NCTR=2
373      C
374      56 CONTINUE
375      68 CONTINUE
376      WRITE(IP,303)
377      303 FORMAT(///1X,15HEND===END===END////)
378      C
379      CALL DIAG(0,0,0,0,0,0,0,0,0)
380      C
381      STOP
382      END

```

2. LISTING OF THE SUBROUTINE TOPOL

```

1      SUBROUTINE TOPOL
2      DOUBLE PRECISION A,B,BIP,CIP,BSP,CSP,DEP
3      COMMON/PEX/A(20),B(20),IEX,N
4      DIMENSION IN(20),IP(20)
5      IBN=0
6      IBP=0
7      ICC=0
8      IBB=0
9      DEP=1.00-9
10     DO4I=1,N
11     IF(A(I))3,1,2
12     1 IF(B(I))5,4,7
13     5 IBN=1
14     GOT04
15     7 IBP=2
16     GOT04
17     2 A(I)=-B(I)/A(I)
18     IBB=IBB+1
19     IP(IBB)=I
20     GOT04
21     3 A(I)=-B(I)/A(I)
22     ICC=ICC+1
23     IN(ICC)=I
24     4 CONTINUE
25     IE=IBB*ICC
26     IF(IB.EQ.0)GOTO11
27     I=IP(I)
28     BIP=A(I)
29     BSP=BIP
30     DO6II=1,IBB
31     I=IP(II)
32     BIP=DMIN1(BIP,A(I))
33     6 BSP=DMAX1(BSP,A(I))
34     I=IN(I)
35     CIP=A(I)
36     CSP=CIP
37     DO13II=1,ICC
38     I=IN(II)
39     CIP=DMIN1(CIP,A(I))
40     13 CSP=DMAX1(CSP,A(I))
41     CIP=CIP+DEP
42     BIP=BIP+DEP
43     IBN=IBN+IBP+1
44     GOTO(8,9,10,12),IBN
45     8 IF(BSP.LE.CIP)GOTO11
46     9 IF(CSP.LE.BIP)GOTO11
47     GOT02
48     10 IF(BSP.GT.CIP)GOTO12
49     11 IEX=2
50     12 CONTINUE
51     RETURN
52     END

```

3. INPUT ILLUSTRATION

1	3,0,3		
2	3,1,2,3		
3	1,0,5,0.35		
4	3,1,2,3		
5	-0.3,1.,-0.25		
6	4,1,2,3,4		
7	0.25,-0.1,1.,1.		
8	1,2,0.1		
9	1,3,0.05		
10	2,1,0.1		
11	2,3,0.15		
12	3,1,0.05		
13	3,2,0.1		
14	1,3		
15	1.	11AXE	1AXE 3 8 1POLYTOPE ILLUSTRATION 3324

4. OUTPUT ILLUSTRATIONS

INVERSE MATRIX - SOLUTION AT MEAN POINT
 =====

1	.959	-.526	-.467	-.467
2	.234	.897	.143	.143
3	-.216	.221	1.131	1.131

DET: .102+001

CHANGE : REL. 1 3
 ELT. 2 2

CRITICAL POINTS IN PLANE 1 3
 =====

1 :	-.307	3 :	1.058	DET:	.117+001	1 0 0 1 0 0
	-.307		-.017		1.058	

CHANGE : REL. 3 ELT. 1

1 :	-.317	3 :	1.092	DET:	.114+001	1 0 0 1 1 0
	-.317		-.018		1.092	

CHANGE : REL. 3 ELT. 2

1 :	-.316	3 :	1.095	DET:	.113+001	1 0 0 1 1 1
	-.318		-.018		1.095	

=== NEXT POINT IS INTERIOR

1 :	-.350	3 :	1.107	DET:	.101+001	1 0 1 1 1 1
-----	-------	-----	-------	------	----------	-------------

CHANGE : REL. 2 ELT. 1

1 :	-0.690	3 :	1.207	DET :	.928+000	1 1 1 0 0 0	CHANGE :	REL. 3	ELT. 1
	-0.690		1.207						
1 :	-0.645	3 :	1.129	DET :	.992+000	1 1 1 0 0 1	CHANGE :	REL. 3	ELT. 2
	-0.645		1.129						
1 :	-0.579	3 :	1.116	DET :	.968+000	0 1 1 0 0 1	CHANGE :	REL. 1	ELT. 2
	-0.579		1.116						
1 :	-0.466	3 :	1.093	DET :	.988+000	0 0 1 0 0 1	CHANGE :	REL. 1	ELT. 3
	-0.466		1.093						
1 :	-0.431	3 :	1.086	DET :	.107+001	0 0 0 0 0 1	CHANGE :	REL. 2	ELT. 1
	-0.431		1.086						
:= NEXT POINT IS INTERIOR									
1 :	-0.311	3 :	1.062	DET :	.109+001	0 0 0 1 0 1	CHANGE :	REL. 2	ELT. 3
	-0.311		1.062						
1 :	-0.310	3 :	1.058	DET :	.110+001	0 0 0 1 0 0	CHANGE :	REL. 3	ELT. 2
	-0.310		1.058						
1 :	-0.307	3 :	1.058	DET :	.117+001	1 0 0 1 0 0	CHANGE :	REL. 1	ELT. 2
	-0.307		1.058						

===== >>> MIN. VAR. 3 : 1.058
 ===== >>> MAX. VAR. 1 : -0.307

SEARCH OF MAXIMUM
 =====

```

1 :   -.307      1 :   -.307 DET:   .117+001      1 0 0 1 0 0
      -.307      -.017      1.058
CHANGE : REL.    2  2
         ELT.    1  3
CHANGE : REL.    1  3
         ELT.    2  1

2 :    .389      1 :   -.526 DET:   .874+000      0 0 1 0 1 0
      -.526      .389      1.236
CHANGE : REL.    1  1
         ELT.    2  3

3 :    1.296      1 :   -.741 DET:   .864+000      1 1 1 0 1 0
      -.741      .370      1.296
  
```

SEARCH OF MINIMUM
 =====

```

1 :   -.741      1 :   -.741 DET:   .864+000      1 1 1 0 1 0
      -.741      .370      1.296
CHANGE : REL.    2  2  3  3
         ELT.    1  3  1  2
CHANGE : REL.    1  3
         ELT.    2  1

2 :   -.058      1 :   -.428 DET:   .103+001      0 1 0 1 1 1
      -.428      -.058      1.128
CHANGE : REL.    1  1  3  3
         ELT.    2  3  1  2

3 :    1.058      1 :   -.307 DET:   .117+001      1 0 0 1 0 0
      -.307      -.017      1.058
  
```

END===END===END