RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

P. BOD

Sur l'invariance de l'optimum dans certains modèles linéaires de planification en regard des changements de prix

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 15, nº 1 (1981), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1981__15_1_1_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 15, n° 1, février 1981, p. 1 à 14)

SUR L'INVARIANCE DE L'OPTIMUM DANS CERTAINS MODÈLES LINÉAIRES DE PLANIFICATION EN REGARD DES CHANGEMENTS DE PRIX (*)

par P. BOD (1)

Résumé. — *On travaille d'habitude dans la planification de l'économie nationale avec des modèles de programmation mathématique dont les variables correspondent aux activités économiques agrégés et à cause de cela les variables doivent être exprimées en termes monétaires.*

En principe on peut établir les modèles sur des prix invariables d'une période de base ou sur des prix courants, prédits, qui changent d'une période à l'autre.

Nous examinons l'effet des changements de prix sur les solutions d'un modèle spécifique de planification à long terme.

Nous prouvons deux propriétés du modèle :

— l'ensemble des solutions admissibles obtenu sur la base de prix invariables est invariant par rapport aux changements quelconques de prix;

— la solution optimale obtenu sur la base de prix invariables reste invariante par rapport aux changements de prix engendrés par les prix duaux des bilans de produit.

Mots clés : Planification, modèles linéaires multipériodiques, prix duaux.

Abstract. — *Usually one is applying mathematical programming models in the national economic planning, the variables of which correspond to agregated economic activities. Therefore the variables have to be expressed in monetary terms.*

The models can be established in principle either on constant prices of a base period or on predicted, current prices which are changing from one period to the other.

We are examining the effect of price changes on the solutions of a specific long term planning model. We are proving two properties of the model:

— the set of the feasible solutions obtained by using constant prices is invariant against arbitrary price modifications;

— the optimum solution obtained by using constant prices remains invariant against price modifications generated by the shadow prices of the product balance.

Keywords: Planning, multiperiodic linear models, dual prices.

Nous analysons dans cet article un problème qui se pose dans la planification de l'économie nationale. On travaille d'habitude dans ce domaine avec des modèles de programmation mathématique dont les variables correspondent aux activités économiques agrégées et à cause de cela les variables doivent être exprimées en termes monétaires. Alors qu'en élaborant un modèle de planification pour l'économie globale on doit choisir un système des prix appropriés.

(*) Reçu octobre 1979.

(1) Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Hongrie, Realtanoda U. 13-15, Budapest, Hongrie.

Dans la pratique actuelle de la planification on choisit normalement les prix au cours de la dernière année qui précède la période du plan (année de base ou année de référence). Après cela on considère les prix de l'année de base comme constants pour la période entière du plan, malgré qu'il soit bien connu que les proportions des prix varient.

On se trouve donc confronté avec la question suivante : est-ce qu'il est bien possible qu'un modèle de planification opérant avec des prix constants de la période de base puisse nous donner des informations utilisables concernant la structure d'une future politique économique optimale? Qu'est-ce qu'il arriverait si nous choisissions des prix courants prédits au lieu des prix constants de l'année de base? Est-ce que nous obtiendrions des structures totalement différentes, ou bien serait-il possible de trouver des invariants dans ces structures en regard des changements de prix?

Nous allons examiner le problème exposé ci-dessus dans le cadre d'un modèle de planification plus ou moins spécifique et linéaire. Ainsi nos conclusions ne fournissent pas la solution générale du problème; ils expriment seulement certaines propriétés du modèle. Mais des modèles de ce genre sont bien répandus dans la pratique quotidienne de la planification et ainsi la découverte de quelques-unes de ses propriétés peut nous aider à mieux comprendre le problème fondamental.

Notre modèle décrit une économie de type Leontief avec n secteurs différents. Chaque secteur produit un bien unique mais dispose d'un nombre fini de technologies qui peuvent être combinées linéairement. Les activités des secteurs consomment des produits des autres secteurs, ainsi que de ressources externes mesurées en unités naturelles, qui ne peuvent pas être reproduites par les activités du modèle.

Chaque secteur dispose des capacités initiales pour faire opérer ses technologies. Le modèle est capable d'élargir les capacités initiales d'une manière interne. Nous admettons que le retard d'investissement est d'un an. La période totale de la planification s'étend à T années. Le commerce extérieur apparaît dans le modèle avec des structures d'exportation et d'importation fixées. Le modèle est linéaire bien que les coefficients puissent changer d'un an à l'autre.

Notre but est de maximiser la consommation finale pour la période entière du plan de façon que la consommation finale ait une structure prescrite pour chaque année.

Dans la suite nous allons distinguer deux réalisations différentes du modèle. La première est le modèle aux prix invariables (MPI) dans lequel tout est exprimé au moyen des prix de l'année de base. La seconde est le modèle aux prix courants (MPC) dans lequel des prix différents sont admis dans les années différentes du plan et tout ce qui appartient à l'année t du plan ($t = 1, 2, \ldots, T$) est exprimé par les prix de l'année correspondante.

Nous définissons certains indices de prix. Soient les éléments du n-vecteur $p^{(t)} \in R^n$ les indices des prix de l'année t par rapport aux prix de base. Nous allons écrire ce vecteur souvent sous la forme d'une matrice diagonale : $\langle p^{(t)} \rangle$.

Si nous désignons les indices des prix de l'année t par rapport aux prix de l'année l par ${}^{(l)}p^{(t)}$ nous obtenons :

$$\langle {}^{(l)}p^{(t)} \rangle \langle p^{(l)} \rangle = \langle p^{(t)} \rangle$$

et par conséquent :

$$\langle {}^{(l)}p^{(t)} \rangle = \langle p^{(l)} \rangle^{-1} \langle p^{(t)} \rangle.$$

Nous introduisons les notations suivantes :

Les variables du modèle

$$0 \leqq x_j^{(t)} \in R^{n_j} \left\{ \begin{matrix} (j = 1, 2, \ldots, n) \\ (t = 1, 2, \ldots, T) \end{matrix} \right\}. \tag{1}$$

Niveaux d'activité du secteur j dans l'année t $\left(n_j\right.$ dénote le nombre des différentes technologies du secteur j et $N = \sum_{j=1}^{n} n_j$ est le nombre total des $\left.\text{technologies}\right)$

$$X^{(t)} = \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ \vdots \\ x_n^{(t)} \end{bmatrix} \in R^N \qquad (t = 1, 2, \ldots, T), \tag{2}$$

$$x^{(t)} = \hat{E}\, X^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, T) \tag{3}$$

ou

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1_1^* & 0^* & 0^* & \ldots & 0^* \\ 0^* & 1_2^* & 0^* & \ldots & 0^* \\ 0^* & 0^* & 1_3^* & \ldots & 0^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0^* & 0^* & 0^* & \ldots & 1_n^* \end{bmatrix} \in R^{n \times N} \qquad \text{et} \qquad 1_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{n_j}.$$

Le vecteur de la production brute.

$$0 \leqq \Delta\, x_j^{(t)} \in R^{n_j} \left\{ \begin{matrix} (j = 1, 2, \ldots, n) \\ (t = 1, 2, \ldots, T) \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

Niveaux des augmentations des capacités dans le secteur j durant l'année t.

$$\Delta X^{(t)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(t)} \\ \Delta x_2^{(t)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(t)} \end{bmatrix} \in R^N \qquad (t = 1, 2, \ldots, T), \tag{5}$$

$$0 \leqq z_e^{(t)} \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, T). \tag{6}$$

Le total des exportations durant l'année t.

$$0 \leqq z_i^{(t)} \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, T). \tag{7}$$

Le total des importations durant l'année t.

$$0 \leqq z^{(t)} \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, T). \tag{8}$$

La consommation finale durant l'année t.

Les paramètres constants du modèle

$$a_{i,j,l}^{(t)} \in R \left\{ \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ (l = 1, 2, \ldots, n_j) \\ (t = 1, 2, \ldots, T) \end{matrix} \right\}. \tag{1}$$

Input de produit du secteur i qui est nécessaire pour produire une unité dans le secteur j sur la base de la technologie l dans l'année t.

$$a_{j,l}^{(t)} = \begin{bmatrix} a_{1,j,l}^{(t)} \\ a_{2,j,l}^{(t)} \\ \vdots \\ a_{n,j,l}^{(t)} \end{bmatrix} \in R^n, \tag{2}$$

$$A_j^{(t)} = [a_{j_1}^{(t)}; a_{j_2}^{(t)}; \ldots; a_{j_{n_j}}^{(t)}] \in R^{n \times n_j}, \tag{3}$$

$$A^{(t)} = [A_1^{(t)}; A_2^{(t)}; \ldots; A_n^{(t)}] \in R^{n \times N}, \tag{4}$$

$$b_{i,j,l}^{(t)} \in R \left\{ \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ (l = 1, 2, \ldots, n_j) \\ (t = 1, 2, \ldots, T) \end{matrix} \right\}. \tag{5}$$

Input de produit du secteur i qui est nécessaire à accroître d'une unité la capacité de la production sur la base de la technologie l dans le secteur j durant l'année t.

$$b_{jl}^{(t)} = \begin{bmatrix} b_{1jl}^{(t)} \\ b_{2jl}^{(t)} \\ \vdots \\ b_{njl}^{(t)} \end{bmatrix} \in R^n. \tag{6}$$

$$B_j^{(t)} = [b_{j_1}^{(t)}; b_{j_2}^{(t)}; \dots b_{j_{n_j}}^{(t)}] \in R^{n \times n_j}, \tag{7}$$

$$B^{(t)} = [B_1^{(t)}; B_2^{(t)}; \dots ; B_n^{(t)}] \in R^{n \times N}, \tag{8}$$

$$d_{ijl}^{(t)} \in R \left\{ \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, k); (j = 1, 2, \dots, n) \\ (l = 1, 2, \dots, n_j); (t = 1, 2, \dots, T) \end{matrix} \right\}. \tag{9}$$

Input de la ressource externe i qui est nécessaire pour produire une unité dans le secteur j sur la base de la technologie l dans l'année t.

$$d_{jl}^{(t)} = \begin{bmatrix} d_{1jl}^{(t)} \\ d_{2jl}^{(t)} \\ \vdots \\ d_{kjl}^{(t)} \end{bmatrix} \in R^k. \tag{10}$$

$$D_j^{(t)} = [d_{j_1}^{(t)}; d_{j_2}^{(t)}; \dots d_{j_{n_j}}^{(t)}] \in R^{k \times n_j}, \tag{11}$$

$$D^{(t)} = [D_1^{(t)}; D_2^{(t)}; \dots ; D_n^{(t)}] \in R^{k \times N}, \tag{12}$$

$$d^{(t)} \in R^k \qquad (t = 1, 2, \dots, T), \tag{13}$$

Les disponibilités des ressources externes dans l'année t.

$$k_{jl}^0 \in R \left\{ \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, n) \\ (l = 1, 2. \dots, n_j) \end{matrix} \right\}. \tag{14}$$

La capacité initiale de production sur la base de la technologie l dans le secteur j.

$$k_j^0 = \begin{bmatrix} k_{j_1}^0 \\ k_{j_2}^0 \\ \vdots \\ k_{j_{n_j}}^0 \end{bmatrix} \in R^{n_j}, \tag{15}$$

$$K^0 = \begin{bmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \\ \vdots \\ k_n^0 \end{bmatrix} \in R^N. \tag{16}$$

$$f_e^{(t)} \in R^n \quad (t = 1, 2, \dots, T); \qquad 1^* f_e^{(t)} = 1. \tag{17}$$

La structure des exportations de l'année t.

$$f_i^{(t)} \in R^n \quad (t = 1, 2, \dots, T); \qquad 1^* f_i^{(t)} = 1. \tag{18}$$

La structure des importations de l'année t.

$$f^{(t)} \in R^n \quad (t=1, 2, \ldots, T); \qquad 1^* f^{(t)} = 1. \tag{19}$$

La structure de la consommation finale de l'année t.

$$q_e^{(t)}; \quad q_i^{(t)} \in R^n \qquad (t=1, 2, \ldots, T). \tag{20}$$

Les multiplicateurs de devise des exportations et des importations par secteurs dans l'année t.

Remarque. — Nous adoptons la convention ci-dessous : l'application des prix courants sera signalé par une barre sur les symboles correspondants.

LA DESCRIPTION FORMELLE DU MODÈLE MPI

I. Bilans de produit

$$(\hat{E}-A^{(t)})\, X^{(t)} - B^{(t)}\, \Delta X^{(t)} + f_i^{(t)} z_i^{(t)} - f_e^{(t)} z_e^{(t)} - f^{(t)} z^{(t)} \geqq 0.$$

II. Bilans de capacité

$$-\sum_{l=1}^{t-1} \Delta X^{(l)} + X^{(t)} \leqq K^0.$$

III. Bilan de paiement

$$-q_i^{(t)*} f_i^{(t)} z_i^{(t)} + q_e^{(t)*} f_e^{(t)} z_e^{(t)} \geqq 0.$$

IV. Limitations des ressources externes

$$D^{(t)}\, X^{(t)} \leqq d^{(t)}.$$

V. Prescriptions de la non-négativité

$$X^{(t)}; \quad \Delta X^{(t)}; \quad z_i^{(t)}; \quad z_e^{(t)}; \quad z^{(t)} \geqq 0 \qquad (t=1, 2, \ldots, T).$$

VI. Fonction d'objective primale

$$\sum_{t=1}^{T} z^{(t)} \to \max!$$

Le dual du modèle peut être écrit sous la forme suivante :

DMPI

I. Contraintes duales concernant les variables de production

$$-\pi_t^*(\hat{E}-A^{(t)})+\rho_t^*+\sigma_t^* D^{(t)} \geqq 0^*.$$

II. Contraintes duales concernant les variables de développement

$$\pi_t^* B^{(t)}+\rho_{t+1}^*+\rho_{t+2}^*+\ldots+\rho_T^* \geqq 0^*.$$

III. Contrainte duale concernant l'importation

$$-\pi_t^* f_i^{(t)}+\delta_t q_i^{(t)*} f_i^{(t)} \geqq 0.$$

IV. Contrainte duale concernant l'exportation

$$\pi_t^* f_e^{(t)}-\delta_t q_e^{(t)*} f_e^{(t)} \geqq 0.$$

V. Contrainte duale concernant la consommation finale

$$\pi_t^* f^{(t)} \geqq 1.$$

VI. Prescriptions de non-négativité

$$0 \leqq \pi_t \in R^n; \quad 0 \leqq \rho_t \in R^N; \quad 0 \leqq \sigma_t \in R^k; \quad 0 \leqq \delta_t \in R$$
$$(t=1, 2, \ldots, T).$$

VII. Fonction d'objective duale

$$\sum_{t=1}^{T} (\rho_t^* K^0+\sigma_t^* d^{(t)}) \rightarrow \min!$$

Le modèle au prix courant se présente comme suit :

MPC

I. $$(\hat{E}-\bar{A}^{(t)})\,\bar{X}^{(t)}-\bar{B}^{(t)}\,\bar{\Delta} X^{(t)}+\bar{f}_i^{(t)}\,\bar{z}_i^{(t)}-\bar{f}_e^{(t)}\,\bar{z}_e^{(t)}-\bar{f}^{(t)}\,\bar{z}^{(t)} \geqq 0,$$

II. $$\sum_{l=1}^{t-1} \langle P_l \rangle^{-1} \langle P_t \rangle\, \bar{\Delta} X^{(l)}+\bar{X}^{(t)} \leqq \bar{K}^{(t)}.$$

III. $$-\bar{q}_i^{(t)*}\,\bar{f}_i^{(t)}\,\bar{z}_i^{(t)}+\bar{q}_e^{(t)*}\,\bar{f}_e^{(t)}\,\bar{z}_e^{(t)} \geqq 0.$$

IV. $$\bar{D}^{(t)}\,\bar{X}^{(t)} \leqq d^{(t)}.$$

V. $$\bar{X}^{(t)}; \quad \bar{\Delta} X^{(t)}; \quad \bar{z}_i^{(t)}; \quad \bar{z}_e^{(t)}; \quad \bar{z}^{(t)} \geqq 0 \qquad (t=1, 2, \ldots, T).$$

VI. $$\sum_{t=1}^{T} z^{(t)} \rightarrow \max!$$

Le dual correspondant :

DMPC

$$\text{I.} \qquad -\bar{\pi}_t^* [\hat{E} - \bar{A}^{(t)}] + \bar{\rho}_t^* + \bar{\sigma}_t^* \bar{D}^{(t)} \geqq 0^*.$$

$$\text{II.} \qquad \bar{\pi}_t^* \bar{B}^{(t)} + \bar{\rho}_{t+1}^* \langle P_t \rangle^{-1} \langle P_{t+1} \rangle + \ldots + \bar{\rho}_T^* \langle P_t \rangle^{-1} \langle P_T \rangle \geqq 0^*.$$

$$\text{III.} \qquad -\bar{\pi}_t^* f_i^{(t)} + \bar{\delta}_t \bar{q}_i^{(t)*} \bar{f}_i^{(t)} \geqq 0.$$

$$\text{IV.} \qquad \bar{\pi}_t^* f_e^{(t)} - \bar{\delta}_t \bar{q}_e^{(t)*} \bar{f}_e^{(t)} \geqq 0.$$

$$\text{V.} \qquad \bar{\pi}_t^* \bar{f}^{(t)} \geqq 1.$$

$$\text{VI.} \qquad \bar{\pi}_t; \quad \bar{\rho}_t; \quad \bar{\sigma}_t; \quad \bar{\delta}_t \geqq 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

$$\text{VII.} \qquad \sum_{t=1}^{T} (\bar{\rho}_t^* \bar{K}^{(t)} + \bar{\sigma}_t^* d^{(t)}) \to \min!$$

Observons que les limitations des ressources externes sont identiques dans les deux formes car il s'agit dans les deux cas des quantités exprimées en unités naturelles. D'autre part il faut considérer que les balances de capacité contiennent des relations intertemporelles. Pour cette raison on doit s'assurer que les quantités qui y figurent soient exprimées toujours avec les prix actuels des années correspondantes. La réduction se fait ici par les matrices diagonales $\langle P_t \rangle$.

Ce sont des opérateurs d'ordre N contenant dans la diagonale n_1 fois l'indice $p_1^{(t)}$; n_2 fois l'indice $p_2^{(t)}$; etc. et n_j fois l'indice $p_j^{(t)}$.

Les indices des prix courants par rapport aux prix de base une fois donnés nous pouvons exprimer les paramètres du MPC avec les paramètres du MPI et à l'aide des indices de prix.

Les changements de prix influencent aussi bien le numérateur que le dénominateur des coefficients qui expriment les interdépendances de la production et du développement parmi les secteurs. Par conséquent

$$\bar{a}_{ijl}^{(t)} = a_{ijl}^{(t)} \frac{p_i^{(t)}}{p_j^{(t)}}; \qquad \bar{b}_{ijl}^{(t)} = b_{ijl}^{(t)} \frac{p_i^{(t)}}{p_j^{(t)}}.$$

Les changements de prix n'influencent que les dénominateurs dans le cas des coefficients concernant les inputs des ressources externes

$$\bar{d}_{ijl}^{(t)} = \frac{d_{ijl}^{(t)}}{p_j^{(t)}}.$$

Donc la réduction des matrices dans le système de contrainte peut être réalisée par les formules suivantes :

$$(\hat{E}-\bar{A}^{(t)}) = \langle p^{(t)} \rangle [\hat{E}-A^{(t)}] \langle P_t \rangle^{-1},$$

$$\bar{B}^{(t)} = \langle p^{(t)} \rangle B^{(t)} \langle P_t \rangle^{-1},$$

$$\bar{D}^{(t)} = D^{(t)} \langle P_t \rangle^{-1}.$$

Les vecteurs qui caractérisent les structures du commerce extérieur comme celle de la consommation finale sont des indices de distribution et doivent être normés à 1 :

$$\bar{f}_i^{(t)} = \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}},$$

$$\bar{f}_e^{(t)} = \frac{\langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}},$$

$$\bar{f}^{(t)} = \frac{\langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}}$$

Les multiplicateurs de devise changent aussi à cause des changements dans le système de prix national

$$\bar{q}_i^{(t)} = \langle p^{(t)} \rangle^{-1} q_i^{(t)}; \qquad \bar{q}_e^{(t)} = \langle p^{(t)} \rangle^{-1} q_e^{(t)}.$$

Finalement : les valeurs des capacités initiales ne restent plus invariantes si nous employons des prix courants. Les capacités initiales : K° mesurées avec les prix de base font

$$\bar{K}^{(t)} = \langle P_t \rangle K^0,$$

dans le système de prix de l'année t.

Supposons maintenant que nous disposons d'une solution admissible du modèle aux prix invariables. Soit

$$(X^{(t)};\ \Delta X^{(t)};\ z_i^{(t)};\ z_e^{(t)};\ z^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

une solution admissible pour MPI. Choisissons-nous un système quelconque des indices de prix décrit par les vecteurs positifs

$$0 < p^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

Exprimons cette solution dans le système de prix courants

$$\bar{X}^{(t)} = \langle P_t \rangle X^{(t)},$$

$$\bar{\Delta} X^{(t)} = \langle P_t \rangle \Delta X^{(t)},$$

$$\bar{z}_i^{(t)} = 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)} z_i^{(t)},$$

$$\bar{z}_e^{(t)} = 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)} z_e^{(t)},$$

$$\bar{z}^{(t)} = 1^* \langle p^{(t)} \rangle f^{(t)} z^{(t)}.$$

Nous allons établir le résultat suivant :

THÉORÈME 1 (*invariance de l'ensemble des solutions admissibles*) : *Une solution admissible du MPI réduite dans un système quelconque de prix courants forme une solution admissible dans MPC.*

Preuve : Nous pouvons montrer par un calcul simple que

$$(\bar{X}^{(t)};\ \Delta\bar{X}^{(t)};\ \bar{z}_i^{(t)};\ \bar{z}_e^{(t)};\ z^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

satisfait aux contraintes du MPC si

$$(X^{(t)};\ \Delta X^{(t)};\ z_i^{(t)};\ z_e^{(t)};\ z^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

est admissible dans MPI.

Nous faisons les substitutions appropriées :

I. $$(\hat{E}-\bar{A}^{(t)})\,\bar{X}^{(t)} - \bar{B}^{(t)}\Delta\bar{X}^{(t)} + \bar{f}_i^{(t)}\bar{z}_i^{(t)} - \bar{f}_e^{(t)}\bar{z}_e^{(t)} - \bar{f}^{(t)}\bar{z}^{(t)}$$
$$= \langle p^{(t)} \rangle [\hat{E}-A^{(t)}] \langle P_t \rangle^{-1} \langle P_t \rangle X^{(t)} - \langle p^{(t)} \rangle B^{(t)} \langle P_t \rangle^{-1} \langle P_t \rangle \Delta X^{(t)}$$
$$+ \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}} . 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)} z_i^{(t)} - \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}} 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)} z_e^{(t)}$$
$$- \frac{\langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}} 1^* \langle p^{(t)} \rangle f^{(t)} z^{(t)}$$
$$= \langle p^{(t)} \rangle \left[(\hat{E}-A^{(t)})\,X^{(t)} - B^{(t)}\Delta X^{(t)} + f_i^{(t)} z_i^{(t)} - f_e z_e^{(t)} . f^{(t)} z^{(t)} \right] \geqq 0.$$

II. $$\sum_{l=1}^{t-1} \langle P_l \rangle^{-1} \langle P_t \rangle \Delta\bar{X}^{(l)} + \bar{X}^{(t)}$$
$$= \sum_{l=1}^{t-1} \langle P_l \rangle^{-1} \langle P_t \rangle \langle P_l \rangle \Delta X^{(l)} + \langle P_t \rangle X^{(t)}$$
$$= \langle P_t \rangle \left[-\sum_{l=1}^{t-1} \Delta X^{(l)} + X^{(t)} \right] \leqq \langle P_t \rangle K^0 = \bar{K}^{(t)}.$$

III. $$-\bar{q}_i^{(t)} \bar{f}_i^{(t)} \bar{z}_i^{(t)} + \bar{q}_e^{(t)*} \bar{f}_e^{(t)} \bar{z}_e^{(t)}$$
$$= -\langle p^{(t)} \rangle^{-1} q_i^{(t)*} \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}} 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)} z_i^{(t)}$$
$$+ \langle p^{(t)} \rangle^{-1} q_e^{(t)*} \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}} 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)} z_e^{(t)}$$
$$= -q_i^{(t)} f_i^{(t)} z_i^{(t)} + q_e^{(t)*} f_e^{(t)} z_e^{(t)} \geqq 0$$

IV. $$\bar{D}^{(t)} \bar{X}^{(t)} = D^{(t)} \langle P_t \rangle^{-1} \langle P_t \rangle X^{(t)} = D^{(t)} X^{(t)} \leqq d^{(t)}. \quad \square$$

Supposons finalement que nous ayons trouvé une solution optimale du MPI. Soit

$$(\hat{X}^{(t)}; \Delta \hat{X}^{(t)}; \hat{z}_i^{(t)}; \hat{z}_e^{(t)}; \hat{z}^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, T)$$

cette solution. Puisque le MPI possède une solution optimale, il existe une solution optimale aussi dans DMPI et les valeurs correspondantes des fonctions-objectifs coïncident. Soit la solution duale optimale :

$$(\hat{\pi}_t; \hat{\rho}_t; \hat{\sigma}_t; \hat{\delta}_t) \qquad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

Nous ne restreignons point la généralité du traitement en supposant que les valeurs des prix duaux sont strictement positives (1). Considérons dans la suite les valeurs duales appartenant aux bilans de produit comme indices de prix. En d'autres termes posons

$$P^{(t)} = \hat{\pi}_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

Si nous réduisons la solution optimale du MPI à l'aide de ces indices nous obtenons la solution suivante :

$$\tilde{X}^{(t)} = \langle \hat{\Pi}_t \rangle \hat{X}^{(t)},$$
$$\tilde{\Delta} X^{(t)} = \langle \hat{\Pi}_t \rangle \Delta \hat{X}^{(t)},$$
$$\tilde{z}_i^{(t)} = 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)} \hat{z}_i^{(t)},$$
$$\tilde{z}_l^{(t)} = 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)} \hat{z}_l^{(t)},$$
$$\tilde{z}^{(t)} = 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f^{(t)} \hat{z}^{(t)} = \hat{z}^{(t)}.$$

(1) Nous nous référons ici à une note de G. B. Dantzig [1]. Dantzig y a donné une méthode simple par laquelle on peut obtenir toujours une solution duale totalement positive par une modification légère du modèle original qui laisse inchangée la solution primale.

Puisque les $z^{(t)}$ sont de toute façon éléments de la base optimale, les contraintes duales concernant la consommation finale doivent être saturées et par suite,

$$\hat{\pi}_t^* f^{(t)} = 1.$$

Nous allons établir encore la proposition ci-après.

THÉORÈME 2 (*l'invariance de l'optimum*) : *La solution optimale du MPI exprimée dans le système de prix courants défini à l'aide des prix duaux des bilans de produit constitue une solution optimale dans MPC.*

Preuve : En vertu du théorème 1 la solution considérée est admissible dans MPC et la valeur de la fonction-objectif ne change pas sous l'effet de la transformation des prix. A cause de l'optimalité dans MPI nous avons :

$$z_0 = \sum_{t=1}^{T} \hat{z}^{(t)} = \sum_{t=1}^{T} (\hat{\rho}_t^* K^0 + \hat{\sigma}_t^* d^{(t)}).$$

Nous montrons qu'il existe une solution admissible pour DMPC admettant la valeur z_0 dans la fonction objectif duale. Mais cela signifie d'après le théorème de dualité que les solutions sont toutes deux optimales. Soit

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_t &= 1 \in R^n, \\ \tilde{\rho}_t^* &= \hat{\rho}_t^* \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1}, \\ \tilde{\sigma}_t &= \hat{\sigma}_t, \\ \tilde{\delta}_t &= \hat{\delta}_t. \end{aligned}$$

Cette solution satisfait aux contraintes du DMPC.

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & -\tilde{\pi}_t^* (\hat{E} - \bar{A}^{(t)}) + \tilde{\rho}_t^* + \tilde{\sigma}^* \bar{D}^{(t)} \\ &= -1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle (\hat{E} - A^{(t)}) \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} + \hat{\rho}_t^* \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} + \hat{\sigma}_t^* D^{(t)} \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \\ &= \left[-\hat{\pi}_t^* (\hat{E} - A^{(t)}) + \hat{\rho}_t^* + \hat{\sigma}_t^* D^{(t)} \right] \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \geqq 0^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.}\quad & \tilde{\pi}_t^* \bar{B}^{(t)} + \tilde{\rho}_{t+1}^* \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_{t+1} \rangle + \ldots + \tilde{\rho}_T^* \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_T \rangle \\ &= 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle B^{(t)} \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} + \hat{\rho}_{t+1}^* \langle \hat{\Pi}_{t+1} \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_{t+1} \rangle + \ldots \\ &\quad + \tilde{\rho}_T^* \langle \hat{\Pi}_T \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_T \rangle \\ &= (\hat{\pi}_t^* B^{(t)} + \hat{\rho}_{t+1}^* + \ldots + \hat{\rho}_T^*) \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \geqq 0^*. \end{aligned}$$

$$\text{III.}\quad -\tilde{\pi}_t \bar{f}_i^{(t)} + \tilde{\delta}_t \bar{q}_i^{(t)*} \bar{f}_i^{(t)} = -1^* \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}} + \hat{\delta}_t q_i^{(t)*} \langle \hat{\pi} \rangle^{-1} \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}} = \frac{-\hat{\pi}_t^* f_i^{(t)} + \hat{\delta}_t q_i^{(t)*} f_i^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}} \geqq 0.$$

$$\text{IV.}\quad \tilde{\pi}_t^* \bar{f}_e^{(t)} - \tilde{\delta}_t q_e^{(t)*} f_e^{(t)} = 1^* \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}} - \hat{\delta}_t q_e^{(t)*} \langle \hat{\pi}_t \rangle^{-1} \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}} = \frac{\hat{\pi}_t^* f_e^{(t)} - \hat{\delta}_t q_e^{(t)*} f_e^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}} \geqq 0.$$

$$\text{V.}\quad \tilde{\pi}_t \bar{f}^{(t)} = 1^* \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f^{(t)}} = 1$$

La valeur de la fonction-objectif duale est :

$$\tilde{z} = \sum_{t=1}^{T} (\tilde{\rho}_t^* \bar{K}^{(t)} + \tilde{\sigma}_t^* d^{(t)}) = \sum_{t=1}^{T} (\hat{\rho}_t^* \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_t \rangle K^0 + \hat{\sigma}_t^* d^{(t)}) = \sum_{t=1}^{T} (\hat{\rho}_t^* K^0 + \sigma_t^* d^{(t)}) = z_0. \quad \square$$

Les deux théorèmes montrent qu'il y a une certaine liberté de choix du système de prix pour la quantification dans les modèles de planification du type Leontief. Cette proposition concerne surtout l'admissibilité. Si nous avons un plan admissible à long terme dans un modèle aux prix invariables, ce plan reste admissible dans n'importe quel système de prix courants.

D'autre part il est devenu clair qu'il existe un système de prix courant engendré par les prix duaux des bilans de produits, qui préserve l'optimum

Les prix duaux des bilans de produits qui apparaissent dans la solution optimale du MPI peuvent être considérés comme indications concernant les changements nécessaires de prix impliqués par la structure optimale obtenue de la solution primale. Naturellement on doit s'abstenir de conclusions qui dépasseraient le domaine de validité du modèle. Le modèle ne représente que la reproduction des produits et des capacités productives d'une manière plus ou moins explicite et ne tient compte que des interdépendances qui s'y rattachent.

Le modèle ne contient ni la reproduction de la main-d'œuvre, ni les processus de distribution et de redistribution des revenus, pour mentionner seulement quelques-unes de ses déficiences les plus importantes.

Nous considérons les résultats obtenus comme point de départ pour des investigations ultérieures.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. B. DANTZIG, *Are Dual Variables Prices? If Not, How to Make Them More So*, Stanford University System Optimization Laboratory, Technical Report sol., Vol. 78-6, March 1978.