RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

LOUIS-MARIE LE NY

Étude analytique de réseaux de files d'attente multiclasses à routages variables

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 14, nº 4 (1980), p. 331-347

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_4_331_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 14, n° 4, novembre 1980 p. 331 à 347)

ÉTUDE ANALYTIQUE DE RÉSEAUX DE FILES D'ATTENTE MULTICLASSES A ROUTAGES VARIABLES (*)

par Louis-Marie LE NY (1)

Résumé. — *Dans cet article, nous développons des méthodes exactes de détermination de la probabilité stationnaire d'états de réseaux contenant plusieurs classes de clients.*

Ces méthodes permettent de traiter des réseaux dont les probabilités de routage entre stations peuvent dépendre de l'état.

L'outil fondamental est la notion de station échangeable par classes qui généralise la notion de station échangeable définie par J. Pellaumail [7].

Nous donnons de nombreux exemples ou apparaissent notamment des réseaux de files d'attente à capacité limitée.

Sauf indication contraire les lois de service seront toujours supposées exponentielles.

Abstract. — *A product form equilibrium solution is stated for queueing networks with several classes of costumers and state dependent routing. This exact result is available for queueing networks with finite waiting room and blocking. Several examples of such queueing networks are given.*

A. INTRODUCTION

A.1. État fondamental

Soit R un réseau fermé markovien irréductible composé de m stations $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$.

On note $\hat{n}$ le nombre de clients de R et on suppose qu'ils sont répartis en K classes.

Sauf indication contraire, les clients ne peuvent pas changer de classe. Dans chaque classe k, le nombre de clients est donc fixe et noté n_k. On pose

$$n = (n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_K) \qquad \text{et} \qquad \hat{n} = \sum_{k=1}^{K} n_k.$$

(*) Reçu juillet 1979.

(1) I.R.I.S.A. (I.U.T.), Campus de Beaulieu, avenue du Général-Leclerc, Rennes.

Dans toute la suite on appellera état fondamental du réseau R tout m-uple $e = (e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_m)$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ caractérise l'état de la station S_i. L'ensemble des états est noté E.

Suivant les cas et suivant les stations, ce vecteur e_i pourra, ou non, dépendre de l'ordre d'arrivée des clients dans la station S_i.

Les disciplines de service dans les stations et l'ensemble d'états choisi seront toujours supposés tels que :

(A.1.1) on ne fait pas de distinction entre les éléments d'une même classe;

(A.1.2) pour tous les indices i et k, on différencie deux états qui ne correspondent pas à un même nombre de clients de classe k dans la station S_i;
(A.1.3) pour tout sous-réseau ouvert R' extrait d'un réseau initial et en partant d'un état e' quelconque de R', si un client de classe k quitte le réseau R' en partant de la station S_i ou rentre dans le réseau R' en allant dans la station S_i, l'état de R' atteint est unique.

Étant donné un état e d'un réseau ouvert R, on note symboliquement $e + f_{ik}$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k quitte la station S_i et le réseau R, on atteint l'état e; si p est une probabilité, $p\,(e + f_{ik})$ désignera donc la probabilité de cet ensemble d'états.

De façon analogue, on notera $e - f_{ik}$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k rentre dans le réseau ouvert R et dans la station S_i, on atteint l'état e.

De même, on note $e - f_{ik} + f_{jk}$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k va de la station S_j à la station S_i, l'état atteint est e.

Bien entendu, quand on utilisera des réseaux notés R', R'' ... et des états associés e', e'' ... on définira de façon analogue $e' + f'_{ik'}$ $e'' + f''_{ik'}$ ... $\prod_{i=1}^{k}$ est la notation classique associée au produit avec la convention habituelle $\prod_{i=1}^{0} \ldots = 1$.

A.2. Taux de départ et taux de service d'une classe k

Si $D_{ik}\,(t, t+dt)$ désigne l'événement « un client de classe k quitte la station S_i entre les instants t et $t+dt$ », on définit le *taux de départ* de la station S_i pour la classe k par l'égalité

$$h_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[D_{ik}(t, t+dt)]}{dt}.$$

De même, si l'on note $S_{ik}(t)$ l'événement « un client de classe k est en cours de service dans la station S_i à l'instant t », le *taux de service* $\mu_{ik}(e)$ de S_i pour la classe k est défini par

$$\mu_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} P[D_{ik}(t, t+dt) \mid S_{ik}(t)].$$

A.3. Sous-réseau propre

Un sous-réseau R d'un réseau fermé $\bar{R}$ est dit *propre* si l'évolution interne de ce sous-réseau ne dépend que de l'état du sous-réseau c'est-à-dire si les 3 conditions suivantes sont réalisées :

a) pour ce sous-réseau, les taux de probabilité de transfert à l'intérieur du sous-réseau R ne dépendent que de l'état du sous-réseau R;

b) pour ce sous-réseau, les taux de probabilité pour un client de quitter R ne dépendent que de l'état de R;

c) pour ce sous-réseau R, quand un client rentre dans ce sous-réseau, la probabilité, pour ce client, d'aller dans telle ou telle station de R, ne dépend que de l'état R.

Dans le cas où l'on considère un tel sous-réseau propre R, on note $a_{ik}(e)$ [resp. $b_{ik}(e)$] le taux de probabilité qu'un client de classe k quitte la station S_i pour aller dans une autre station (resp. à l'extérieur) du sous-réseau R quand l'état de R est e.

Dans ce cas, si l'on note $A_{ik}(t, t+dt)$ l'événement, « un client de classe k quitte la station S_i de R entre t et $t+dt$ pour aller dans une autre station de R si l'état de R est e », on a

$$a_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[A_{ik}(t, t+dt)]}{dt}.$$

De même, si $B_{ik}(t, t+dt)$ désigne l'événement « un client de classe k quitte la station S_i de R entre t et $t+dt$ pour aller à l'extérieur de R si l'état de R est e », on a

$$b_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[B_{ik}(t, t+dt)]}{dt}.$$

On utilise également $c_{ik}(e)$: probabilité pour un client de classe k d'aller dans la station S_i de R sachant qu'il rentre dans le sous-réseau R et que ce sous-réseau est dans l'état e. On pose

$$a_i(e) = \sum_{k=1}^{K} a_{ik}(e), \qquad b_i(e) = \sum_{k=1}^{K} b_{ik}(e), \qquad c_i(e) = \sum_{k=1}^{K} c_{ik}(e).$$

Enfin si l'on considère l'événement $D_{ij,k}(t, t+dt)$: « un client de classe k va de la station S_i de R dans la station S_j de R entre t et $t+dt$ sachant que l'état du sous-réseau R est e », on définit le taux

$$d_{ij,k}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[D_{ij,k}(t, t+dt)]}{dt}$$

et

$$d_{ij}(e) = \sum_{k=1}^{K} d_{ij,k}(e).$$

Soit m le nombre de stations de R et $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\forall k, \quad \sum_{i \in M} c_{ik}(e) = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j \in M} d_{ij}(e) = a_i(e).$$

La somme $a_{ik}(e) + b_{ik}(e)$ est égale au taux de départ $h_{ik}(e)$ de la classe k de la station S_i de R.

Le rapport $d_{ij,k}(e)/(a_{ik}+b_{ik})(e)$ est noté $r_{ij,k}(e)$ et est appelé probabilité de répartition pour la classe k de la station S_i vers la station S_j ou encore probabilité de routage.

A.4. Taux de probabilités stationnaires u_k, v_k, w_k, z_k

On considère un sous-réseau R avec les hypothèses et notations données ci-dessus. Soit S une station extérieure à R et $\bar{R} = R \cup S$ le réseau fermé constitué de R et S.

$\hat{n}$ désigne le nombre de clients de $\bar{R}$ et n_k le nombre de clients de classe k dans $\bar{R}$.

Un état fondamental de $\bar{R}$ est noté $\bar{e} = (e_0, e)$, où e est un état de R et e_0 un état de S.

Dans toute la suite, on suppose que les disciplines de service dans la station S sont telles que l'état de cette station est caractérisé (en étude markovienne) par le nombre de clients de chaque classe dans la station S.

On note $p(\bar{e})$ la probabilité stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ d'être dans l'état è; à chaque état $\bar{e}$ ne correspondant qu'un seul état e et réciproquement, nous ne ferons pas de distinction entre $p(\bar{e})$ et $p(e)$.

On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$\boxed{u_k(e) = \sum_{i,j=1}^{m} p(e-f_{ik}+f_{jk})\, d_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})}$$

$u_k(e)$ est le taux de probabilité en régime stationnaire et pour $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e_0, e)$ par transfert d'un client de classe k à l'intérieur du sous-réseau R.

On notera

$$u(e) = \sum_{k=1}^{K} u_k(e).$$

De même on définit

$$\boxed{v_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e-f_{ik})\, c_{ik}(e-f_{ik})} \qquad \text{et} \qquad v(e) = \sum_{k=1}^{K} v_k(e),$$

$v_k(e)$ est la probabilité en régime stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e_0, e)$ si on sait qu'un client de classe k rentre dans le sous-réseau R.

On pose également

$$\boxed{w_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e+f_{ik})\, b_{ik}(e+f_{ik}),}$$

$w_k(e)$ est donc le taux de probabilité en régime stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e_0, e)$ par départ d'un client de classe k du sous-réseau R vers la station S.

On considère aussi

$$\boxed{z_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e-f_{ik})\, c_{ik}(e-f_{ik})\, h_k(e-f_{ik}),}$$

$z_k(e)$ est le taux de probabilité, en régime stationnaire, et pour $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e_0, e)$ par départ d'un client de classe k de la station S.

On notera $z(e) = \sum_{k=1}^{K} z_k(e)$.

A.5. Réseau équilibré par classes

On dira qu'un réseau fermé $\bar{R}$ est *équilibré par classes* si, pour tout état e et toute classe k, le taux de probabilité de quitter l'état e par transfert d'un client de classe k est égale au taux de probabilité d'atteindre l'état e dans les mêmes conditions.

A.6. Station n-échangeable par classes

Soit R un réseau propre composé de m stations. On note $\bar{R}$ le réseau fermé RUS, S étant une station dont le taux de départ pour la classe k est h_k (e) où e est un état de R.

On suppose que, pour tout k, il y a n_k clients de classe k en circulation dans $\bar{R}$ dont un état fondamental est noté $\bar{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_m)$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ est l'état de $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ et e_0 est l'état de S.

On rappelle que $w_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e+f_{ik})\, b_{ik}(e+f_{ik})$ et on dit que S est *n-échangeable par classes* dans $\bar{R}$ si

$$\text{(A.6.1)} \qquad \boxed{(\forall e \in E), \quad (\forall k \in [1, K]), \qquad w_k(e) = p(e)\, h_k(e).}$$

Cette condition (A.6.1) signifie que le taux de probabilité pour la probabilité p d'atteindre l'état e par départ d'un client de classe k du réseau R est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par arrivée d'un client de classe k dans le réseau R.

Remarques : Dans le cas où le réseau $\bar{R}$ est équilibré par classes la condition (A.6.1) est équivalente à

$$\text{(A.6.2)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &(\forall e \in E), \quad (\forall k \in [1, K]), \\ &\qquad u_k(e) + z_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}(e) + b_{ik}(e)). \end{aligned}}$$

Lorsque dans un réseau fermé $\bar{R}$, chaque station est n-échangeable par classes, ce réseau est équilibré par classes.

B. THÉORÈMES FONDAMENTAUX

B.1. Théorème de stabilité

Soit R un réseau ouvert et S une station n-échangeable par classes dans $\bar{R} = RUS$. Si h_k (e) désigne le taux de départ de S pour la classe k, on a donc

$w_k(e) = p(e)\, h_k(e)$. On supposera que $h_k(e) = f(\hat{e}_0).\, g_k(s_k)$, où f est une fonction du nombre total $\hat{e}_0$ de clients dans S et g_k est une fonction du nombre s_k de clients de classe k dans S.

On considère une autre station S' de taux de départ $h'_k(e) = f'(\hat{e}_0)\, g'_k(s_k)$ pour la classe k et l'on note $\overline{R}' = R' U S'$ et $p'(e)$ la probabilité stationnaire pour que le réseau $\overline{R}'$ soit dans l'état (e_0, e). On pose

$$w'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p'(e+f_{ik}).\, b_{ik}(e+f_{ik}).$$

Sous ces hypothèses on a le :

THÉORÈME B.1.1 :

1. $(\forall e \in E)$, $$\boxed{p'(e) = c\, p(e) \prod_{i=1}^{\hat{e}_0} \frac{f(i)}{f'(i)} \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{s_k} \frac{g_k(j)}{g'_k(j)},}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de e.

2. *La station S' est n-échangeable par classes dans $\overline{R}'$.*

Démonstration : Posons

$$G(e) = \prod_{i=1}^{\hat{e}_0} \frac{f(i)}{f'(i)} \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{s_k} \frac{g_k(j)}{g'_k(j)}.$$

Nous avons

$$(\forall k), \quad (\forall e), \qquad u'_k(e) = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{m} (p'\, d_{ji,k})(e - f_{ik} + f_{jk}),$$

$$u'_k(e) = c \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{m} (p\, d_{ji,k})(e - f_{ik} + f_{jk}).\, G(e),$$

$$u'_k(e) = c\; u_k(e)\, G(e).$$

$$v'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} (p'\, c_{ik})(e - f_{ik}) = \sum_{i=1}^{m} c\,(p c_{ik})(e - f_{ik})\, G(e) \frac{g_k(s_k+1)\, f(\hat{e}_0+1)}{g'_k(s_k+1)\, f'(\hat{e}_0+1)},$$

$$v'_k(e) = c\, v_k(e)\, G(e) \frac{g_k(s_k+1)\, f(\hat{e}_0+1)}{g'_k(s_k+1)\, f'(\hat{e}_0+1)},$$

d'autre part

$$w'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} (p'\, b_{ik})(e + f_{ik}) = c\, w_k(e)\, G(e) \frac{g'_k(s_k)\, f'(\hat{e}_0)}{g_k(s_k)\, f(\hat{e}_0)},$$

or

$$w_k(e) = f(\ddot{e}_0)\, g_k(s_k)\, p(e),$$

d'où

$$w_k'(e) = cp(e)G(e)g_k'(s_k)f'(\hat{e}_0) = p'(e)h_k'(e),$$

ce qui signifie que S' est n-échangeable par classes.

De plus

$$p'(e)\sum_{i=1}^{m} h_{ik}(e) = cp(e)G(e)\sum_{i=1}^{m} h_{ik}(e),$$

or

$$p(e)\sum_{i=1}^{m} h_{ik}(e) = f(\hat{e}_0+1)g_k(s_k+1)v_k(e) + u_k(e),$$

d'où

$$\begin{aligned} p'(e)\sum_{i=1}^{m} h_{ik}(e) &= cG(e)f(\hat{e}_0+1)g_k(s_k+1)v_k(e) + cG(e)\,u_k(e) \\ &= v_k'(e)g_k'(s_k+1)f'(\hat{e}_0+1) + u_k'(e). \end{aligned}$$

Pour la probabilité p', le réseau $\bar{R}'$ est donc équilibré par classes; ce qui montre que p' est la probabilité stationnaire d'état de ce réseau markovien ergodique.

B.2. Théorème d'échangeabilité

Soit R un réseau fermé contenant $\hat{n}$ clients et composé de 2 sous-réseaux propres R' et R''; on considère les réseaux fermés $\bar{R}' = R' US'$ et $\bar{R}'' = R'' US''$, où S' (resp. S'') est une station n-échangeable par classes dans le réseau $\bar{R}'$ (resp. $\bar{R}''$). On suppose que $\bar{R}'$ et $\bar{R}''$ sont équilibrés par classes. On rappelle que $n = (n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_K)$ et $\hat{n} = \sum_{k=1}^{K} n_k$.

On considère en outre les hypothèses suivantes :

a) Dans R le taux de départ pour la classe k de la station S_i de R' (resp. R'') est égal au taux de départ pour la classe k de S_i dans R' (resp. R'') multiplié par le taux de départ de S'' pour la classe k.

Ce qui s'écrit encore :

$$h_{ik}(e) = h_{ik}'(e').h_k''(e'').$$

b) Dans R les probabilités de répartition entre stations à l'intérieur de R' ou de R'' sont les mêmes que dans les réseaux initiaux R' et R''.

c) Dans R, la probabilité $r_{ij,k}$, pour un client de classe k qui quitte une station S_i de R' (resp. R''), d'aller dans S_j de R'' (resp. R') est égale au produit de la probabilité $r'_{ik}(e')$ pour ce client de classe k qui quitte S_i de quitter R' par la probabilité $c''_{jk}(e'')$ pour un client de classe k qui rentre dans R'' d'aller dans la station S_j de R'', ou encore

$$r_{ij,k}(e) = r'_{ik}(e') \,.\, c''_{jk}(e'').$$

Alors on a les résultats suivants :

(1) *$p(e) = cp'(e')\, p''(e'')$, où $p(e)$ [resp. $p'(e')$, $p''(e'')$] est la probabilité stationnaire, pour le réseau R (resp. $\bar{R}'$, $\bar{R}''$) d'être dans l'état $e = (e', e'')$ (resp. $\bar{e}'$, $\bar{e}''$) et c est la constante de normalisation;*

(2) *le réseau R est équilibré par classes;*

(3) *si S_i est une station échangeable par classes dans $\bar{R}'$ ou $\bar{R}''$, elle est encore échangeable par classes dans R.*

Preuve : Soit $e = (e', e'')$ un état de R. Dans R on note M' (resp. M'') l'ensemble des indices des stations qui appartiennent à R' (resp. R''). On suppose que R' (resp. R'') comprend m' (resp. m'') stations; on a donc $m'+m'' = m$.

Les termes a_{ik}, b_{ik} et c_{ik} définis en A.3 seront notés a'_{ik}, b'_{ik}, c'_{ik} (resp. a''_{ik}, b''_{ik}, c''_{ik}) s'ils sont associés à R' (resp. R'').

De même, on définit u', w', z', p' (resp. u'', w'', z'', p'') relativement à R' (resp. R'') comme en A.4.

On note $x_k(e)$ [resp. $y_k(e)$] le taux de probabilité pour la probabilité p d'atteindre (resp. de quitter) l'état e par déplacement d'un client de classe k dans R.

On note $x(e)$ [resp. $y(e)$] le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter l'état e par déplacement d'un client dans R.

On a donc $x(e) = \sum_{k=1}^{K} x_k(e)$ et $y(e) = \sum_{k=1}^{K} y_k(e)$.

Le réseau étant supposé markovien ergodique, la probabilité stationnaire p est la seule telle que $x(e) = y(e)$.

Montrons d'abord que si l'on pose $p(e) = cp'(e')\, p''(e'')$ on obtient $x_k(e) = y_k(e)$ pour tout k et pour tout e :

$$x_k(e) = x'_k(e) + x''_k(e) + cu'_k(e')\, h''_k(e'')\, p''(e'') + cu''_k(e'')\, h'_k(e')\, p'(e'),$$

avec

$$\begin{aligned} x'_k(e) &= \sum_{i \in M'} \sum_{j \in M''} cp'(e'+f'_{ik})\, p''(e''-f''_{jk})\, b'_{ik}(e'+f'_{ik})\, h''_k(e''-f''_{jk})\, c''_{jk}(e''-f''_{jk}) \\ &= c\Big(\sum_{i \in M'} p'(e'+f'_{ik})\, b'_{ik}(e'+f'_{ik})\Big) \\ &\qquad \times \Big(\sum_{j \in M''} p''(e''-f''_{jk})\, h''_k(e''-f''_{jk})\, c''_{jk}(e''-f''_{jk})\Big), \end{aligned}$$

d'où

$$x'_k(e) = cw'_k(e')\, z''_k(e''),$$

de même

$$x''_k(e) = \sum_{i \in M'} \sum_{j \in M''} p(e - f_{ik} + f_{jk})\, b''_{jk}(e'' + f''_{jk})\, h'_k(e' - f'_{ik})\, c'_{ik}(e' - f'_{ik}),$$

$$x''_k(e) = c\Big(\sum_{j \in M''} p''(e'' + f''_{jk})\, b''_{jk}(e'' + f''_{jk})\Big)\Big(\sum_{i \in M'} p'(e' - f'_{ik})\, h'_k(e' - f'_{ik})\, c'_{ik}(e' - f'_{ik}),$$

soit

$$x''_k(e) = cw''_k\,(e'')\, z'_k(e').$$

On décompose ensuite $y_k\,(e)$ sous la forme $y'_k\,(e) + y''_k\,(e)$ avec

$$y'_k(e) = p(e)\, h''_k(e'') \sum_{i \in M'} (a'_{ik} + b'_{ik})(e')$$

et

$$y''_k(e) = p(e)\, h'_k(e') \sum_{j \in M''} (a''_{jk} + b''_{jk})(e'').$$

Par ailleurs, puisque S' (resp. S'') est échangeable par classes dans $\bar{R}'$ (resp. $\bar{R}''$), on a :

(B.2.1) $$w'_k(e') = h'_k(e')\, p'(e'),$$

(B.2.2) $$w''_k(e'') = h''_k(e'')\, p''(e'')$$

et aussi, puisque $\bar{R}'$ et $\bar{R}''$ sont équilibrés par classes :

(B.2.3) $$u'_k(e') + z'_k(e') = p'(e') \sum_{i \in M'} (a'_{ik} + b'_{ik})(e'),$$

(B.2.4) $$u''_k(e'') + z''_k(e'') = p''(e'') \sum_{j \in M''} (a''_{jk} + b''_{jk})\,(e'').$$

En reportant B.2.1. dans $x'_k\,(e)$ et B.2.2. dans $x''_k\,(e)$ puis les résultats obtenus dans $x_k\,(e)$ on obtient :

$$x_k(e) = cp'(e')\, h'_k(e)\, z''_k\,(e'') + p''(e'')\, h''_k(e'')\, z'_k(e') \\ + p''(e'')\, h''_k(e'')\, u'_k(e') + p'(e')\, h'_k(e')\, u''_k(e''),$$

de même en reportant B.2.3. et B.2.4. dans $y'_k\,(e)$ et $y''_k\,(e)$ on obtient :

$$y_k(e) = c\, p''(e'')\, h''_k\,(e'')\big[u'_k(e') + z'_k(e')\big] + p'(e')\, h'_k(e')\big[u''_k(e'') + z''_k(e'')\big]),$$

d'où $\forall e$ et $\forall k$, $x_k\,(e) = y_k\,(e)$ et par suite $x\,(e) = y\,(e)$.

Ce qui démontre que la formule de p annoncée est la bonne puisqu'il y a unicité.

De plus, on a obtenu que R est équilibré par classes.

Soit une station S_i du sous-réseau R' qui est échangeable dans $\bar{R}'$ pour la classe k. Posons $M_1 = M' - \{i\}$, soit e un état de R; dans R, pour la probabilité stationnaire $p(e) = cp'(e')\,p''(e'')$ le taux de probabilité $w_{ik}(e)$ d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k dans la station S_i est

$$\begin{aligned} w_{ik}(e) = \sum_{i' \in M_1} & p(e+f_{i'k}-f_{ik}) \\ & \times h'_{i'k}(e'+f'_{i'k}-f'_{ik})\, h''_k(e'')\, r'_{i'i,k}(e'+f'_{i'k}-f'_{ik}) \\ & + \sum_{j \in M''} p(e+f_{jk}-f_{ik})\, b''_{jk}(e''+f''_{jk})\, h'_k(e'-f'_{ik})\, c'_{ik}(e'-f'_{ik}) \\ & = cp''(e'')\, h''_k(e'') \sum_{i' \in M_1} (p' h'_{i'k} r'_{i'i,k})(e'+f'_{i'k}-f'_{ik}) \\ & \qquad + c(p' h'_k c'_{ik})(e'-f'_{ik}) \sum_{j \in M''} p''(e''+f''_{jk})\, b''_{jk}(e''+f''_{jk}), \end{aligned}$$

S'' étant échangeable pour la classe k dans $\bar{R}''$ on a

$$w''_k(e'') = \sum_{j \in M''} p''(e''+f''_{jk})\, b''_{jk}(e''+f''_{jk}) = p''(e'')\, h''_k(e''),$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{ik}(e) = cp''(e'')\, h''_k(e'') \Big[\sum_{i' \in M_1} & (p' h'_{ik} r'_{i'i,k})(e'+f'_{i'k}-f'_{ik}) \\ & + (p' h'_k c'_{ik})(e'-f'_{ik}) \Big] = cp''(e'')\, h''_k(e'')\, w'_{ik}(e'). \end{aligned}$$

Mais la station S_i est échangeable pour la classe k dans $\bar{R}'$,
d'où

$$w'_{ik}(e') = p'(e')\, h'_{ik}(e')$$

et on en déduit que

$$w_{ik}(e) = p(e)\, h''_k(e'')\, h'_{ik}(e') = p(e)\, h_{ik}(e)$$

ce qui signifie que la station S_i est échangeable pour la classe k dans R et achève la démonstration du théorème.

Remarque : Il est important de noter le caractère itératif de ce théorème. Il suffit en effet de vérifier la propriété d'échangeabilité par classes (A.6.1) pour pouvoir composer des réseaux équilibrés par classes. En raisonnant par récurrence on peut donc obtenir une forme produit pour la probabilité stationnaire d'états d'un réseau très général.

C. RÉSEAUX DE FILES D'ATTENTE A CAPACITÉ LIMITÉE

C.1. Insertion d'une station à capacité limitée dans un réseau multiclasse

C.1.1. *Blocage global*

Soit un réseau fermé $\bar{R}$ composé de m stations (à capacité illimitée) $(S_j)_{1 \leq j \leq m}$ et contenant $\hat{n}$ clients répartis en K classes, le nombre de clients dans chaque classe k étant noté n_k. On suppose que $\bar{R}$ est équilibré par classes et que S_m est n-échangeable par classes dans $\bar{R}$. Le taux de départ $h_{mk}(e)$ de S_m pour la classe k sera de la forme $f_m(\hat{e}_m)\, g_{mk}(e_{mk})$ (*cf.* B.1).

Considérons le réseau $\bar{R}'$ obtenu en remplaçant dans $\bar{R}$ la station S_m par une station S'_m à capacité limitée, le nombre maximum de clients dans cette station étant M. Le taux de départ de S'_m pour la classe k est noté $h'_{mk}(e)$ et est supposé de la forme $f'_m(\hat{e}_m)\, g'_{mk}(e_{mk})$.

Dans le réseau $\bar{R}'$ on adopte la politique suivante : lorsque la station S'_m est pleine, toutes les autres stations bloquent leur service et ne le reprennent que lorsqu'une place se libère dans S'_m; dans ce cas, nous dirons qu'il y a un blocage global du réseau $\bar{R}'$.

On note $p(e)$ [resp. $p'(e)$] la probabilité stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ (resp. $\bar{R}'$) d'être dans l'état $\bar{e} = (e, e_m)$ [resp. $\bar{e} = (e, e_m)$], et E' l'ensemble des états de $\bar{R}'$.

Sous ces hypothèses, nous avons le :

THÉORÈME C.11 :

1. $(\forall e \in E')$ $$\boxed{p'(e) = c\,p(e) \prod_{i=1}^{\hat{e}_m} \frac{f_m(i)}{f'_m(i)} \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{i=1}^{e_{mk}} \frac{g_{mk}(i)}{g'_{mk}(i)} \right),}$$

où c est la constante de normalisation.

2. S'_m est n-échangeable par classes dans $\bar{R}'$.
3. $\bar{R}'$ est équilibré par classes.
4. Toute station S_j n-échangeable par classes dans $\bar{R}$ l'est encore dans $\bar{R}'$.

Preuve : Il suffit de raisonner comme dans le théorème B.1. *Voir* [6] pour une démonstration complète.

C.1.2, *Blocage par classes*

Nous envisageons ici une politique différente concernant le blocage : pour toute classe k, la station S'_m contient au plus M_k clients de classe k, Lorsqu'il y a M_k clients de classe k dans S'_m, le service des clients de classe k est bloqué dans les autres stations, mais il n'y a pas blocage pour les clients des autres classes.

Nous obtenons ici les mêmes résultats que dans le théorème C.11, seuls l'ensemble d'états et la constante de normalisation diffèrent.

C.2. Remplacement, dans un réseau de type BCMP, de plusieurs stations par des stations à capacté limitée

Considérons d'abord un réseau fermé $\bar{R}$ multiclasse comprenant m stations à capacité illimitée. Le nombre n_k de clients de chaque classe est supposé constant ainsi que la probabilité de routage $r_{ij,k}$ de la station S_i vers la station S_j pour tout client de classe k.

Ce type de réseau a été étudié par Baskett, Chandy, Muntz et Palacios [1].

Un état fondamental de $\bar{R}$ est noté $\bar{e} = (e, e_m)$, où $e = (e_1, e_2, \ldots, e_{m-1})$ et $e_j = (e_{j_1}, \ldots, e_{jk}, \ldots, e_{jK})$ avec e_{jk} : nombre de clients de classe k dans $(S_j)_{1 \leqq j \leqq m}$.

On note $\bar{R}'$ le réseau obtenu en remplaçant les stations $(S_j)_{1 \leqq j \leqq s \leqq m}$ de $\bar{R}$ par des stations à capacité limitée $(S'_j)_{1 \leqq j \leqq s \leqq m}$, la politique de blocage choisie étant soit le blocage global, soit le blocage par classes.

Dans $\bar{R}$, pour $1 \leqq j \leqq m$ on pose, comme dans B.1 :

$$h_{jk}(e) = f_j(\hat{e}_j)\, g_{ik}(e_{jk})$$

et dans $\bar{R}'$ pour $1 \leqq j \leqq s$ on pose

$$h'_{jk}(e) = f'_j(\hat{e}_j)\, g'_{jk}(e_{jk}).$$

p (e) [resp. p' (e)] est la probabilité stationnaire pour $\bar{R}$ (resp. $\bar{R}'$) d'être dans l'état $\bar{e}$.

Sous ces hypothèses, nous avons le :

THÉORÈME C.21 :

1. $(\forall e \in E')$ $$\boxed{p'(e) = c p(e) \prod_{j=1}^{s} \left(\prod_{i=1}^{\hat{e}_j} \frac{f_j(i)}{f'_j(i)} \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{i=1}^{e_{jk}} \frac{g_{jk}(i)}{g'_{jk}(i)} \right) \right),}$$

où c est la constante de normalisation.

2. Toutes les stations de $\bar{R}'$ sont n-échangeables par classes.

Démonstration : Il suffit de raisonner par récurrence sur s en utilisant C.1.1.

C.3. Réseaux multiclasses à stations transparentes

Nous considérons la même situation que dans C.2, mais la politique de blocage est modifiée : lorsqu'une station a atteint sa capacité maximale, tout client qui se présente dans cette station la traverse sans être servi; nous dirons dans ce cas que la station est transparente. Les contraintes de capacité peuvent concerner le nombre total de clients dans la station ou le nombre de clients dans chaque classe.

Le résultat obtenus sont analogues aux résultats du théorème C.2.1, seuls l'ensemble d'états et la constante de normalisation différent. Les démonstrations sont basées sur les mêmes méthodes que dans B.1. Notons que cette situation a déjà été étudiée par Jackson [5], paragraphe 5, dans le cas d'une classe de clients.

C.4. Réseau multiclasse à routages dépendant de l'état

Soit le réseau $\bar{R}$ (*fig.* 1) comprenant $m+1$ stations $(S_j)_{0 \leq j \leq m}$.

La station S_0 a une capacité illimitée et son taux de départ pour la classe k est noté h_{0k} (e).

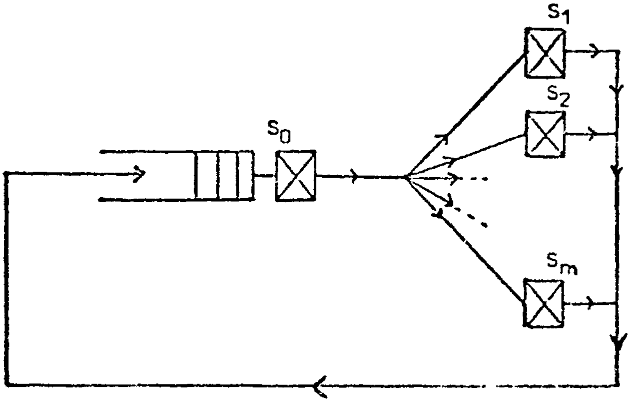

Figure 1.

Les stations $(S_j)_{1 \leq j \leq m}$ ont une capacité limitée à un client, le taux de service pour la classe k étant μ_{jk}.

Lorsque toutes les stations $(S_j)_{1 \leq j \leq m}$ sont pleines, S_0 bloque son service; on a donc pour un tel état e, h_{0k} $(e) = 0$.

Pour tout état e tel qu'il n'y ait pas blocage, on suppose que

$$h_{0k}(e) = f_0(\hat{e}_0)\, g_k(e_{0k}),$$

où $\hat{e}_0$ est le nombre total de clients et e_{0k} le nombre de clients de classe k dans S_0.

Les probabilités de répartition $r_{0j,k}$ entre la station S_0 et les stations $(S_j)_{1 \leqq j \leqq m}$ sont définies comme suit :

si p stations parmi les stations $(S_j)_{1 \leqq j \leqq m}$ sont occupées, on a

$$\text{si } 0 \leqq p < m, \quad r_{0j,k}(e) = \frac{1}{m-p} \quad \text{si } S_j \text{ est vide,}$$
$$r_{ij,k}(e) = 0 \quad \text{sinon.}$$

PROPOSITION C.4.1 : *Toutes les stations $(S_j)_{0 \leqq j \leqq m}$ sont n-échangeables par classes et la responsabilité stationnaire du réseau $\bar{R}$ a pour expression*

$$\boxed{p(e) = \frac{c}{A^{\hat{n}-\hat{e}_0}} \prod_{i=1}^{\hat{e}_0} \frac{1}{f_0(i)} \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{i=1}^{e_{0k}} \frac{1}{g_k(i)} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\mu_{jk}} \right)^{e_{jk}} \right),}$$

où A_m^p est le nombre d'arrangements de p éléments parmi m.

Par convention $A_m^0 = 1$.

Preuve : Il suffit de montrer que pour la probabilité p toutes les stations sont n-échangeables par classes.

Remarque : Lorsque, pour chaque classe k, les distributions des temps de service dans chaque station $(S_j)_{1 \leqq j \leqq m}$ admettent une transformée de Laplace rationnelle à pôles réels, nous avons encore des stations n-échangeables par classes à condition de remplacer chaque station S_j $(1 \leqq j \leqq m)$ par une suite $(C_{jk})_{1 \leqq k \leqq K}$ de sous-réseaux de Cox (*cf.* [3] et [4]).

D. UNE APPLICATION DU THÉORÈME D'ÉCHANGEABILITÉ

Soit le réseau R représenté ci-dessous (*fig.* 2).

Un état fondamental est de la forme

$$e = (e_1, \ldots, e_{m-1}, e_1'', \ldots, e_M''), \qquad \text{où} \quad e_j = (e_{j1}, \ldots, e_{jk}, \ldots, e_{jK}),$$

avec e_{jk} : nombre de clients de classe k dans S_j. $(1 \leqq j \leqq m-1)$:

$$e_j'' = (e_{j1}'', \ldots, e_{jk}'', \ldots, e_{jK}'').$$

Les stations $(S_j)_{1 \leqq j \leqq m-1}$ sont transparentes (*cf.* C.3) et le sous-réseau R'' est globalement transparent, ce qui signifie que lorsque toutes les stations de R'' sont occupées, tout client qui s'y présente est immédiatement orienté vers S_1.

Les probabilités de routage entre S_{m-1} et $(S''_j)_{1 \leq j \leq M}$ sont les mêmes que dans C.4.

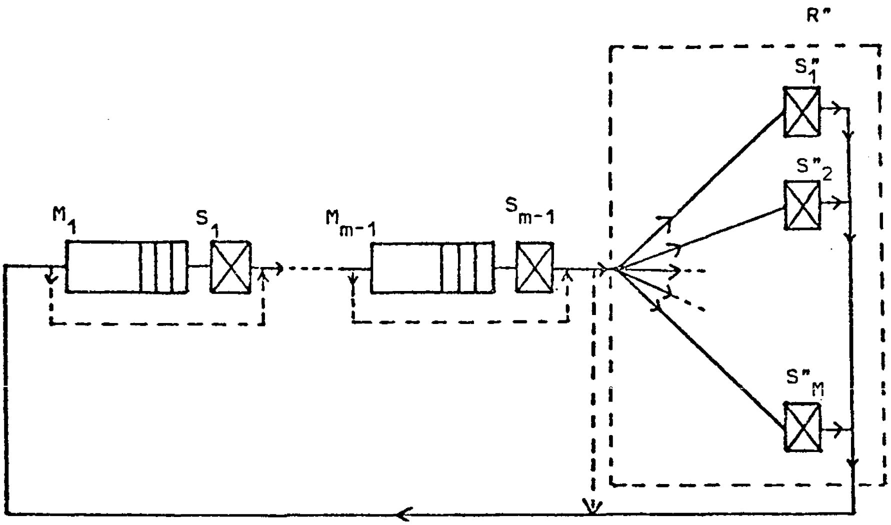

Figure 2.

Les notations utilisées sont les suivantes : $\hat{n}$, nombre total de clients; K, nombre de classes; n_k, nombre de clients de classe k; M_j, nombre maximum de clients dans S_j ($1 \leq j \leq m-1$); $h_{jk}(i)$, taux de départ de $(S_j)_{1 \leq j \leq m-1}$ pour la classe k s'il y a i clients de classe k dans S_j; μ_{jk}, taux de service de S''_j pour la classe k dans R'' (il y a au plus 1 client dans S''_j).

Sous ces hypothèses, nous avons la :

PROPOSITION : 1. *La probabilité stationnaire d'état de R a pour expression*

$$p(e) = \frac{c}{A_M^{\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} e''_{jk}}} \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{m-1} \prod_{i=1}^{e_{jk}} \frac{1}{h_{jk}(i)} \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{\mu_{jk}}\right)^{e''_{jk}}.$$

A_m^p *est le nombre d'arrangements de p éléments parmi M (par convention* $A_m^0 = 1$). *c est la constante de normalisation.*

2. *Toutes les stations de R sont n-échangeables par classes.*

Preuve : On applique le théorème d'échangeabilité (*cf.* B.2) en associant les 2 réseaux représentés ci-dessus (*fig.* 3 et 4).

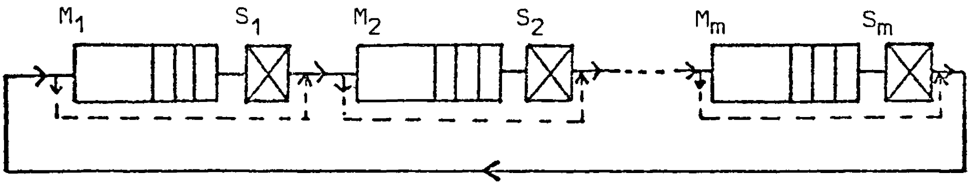

Figure 3.

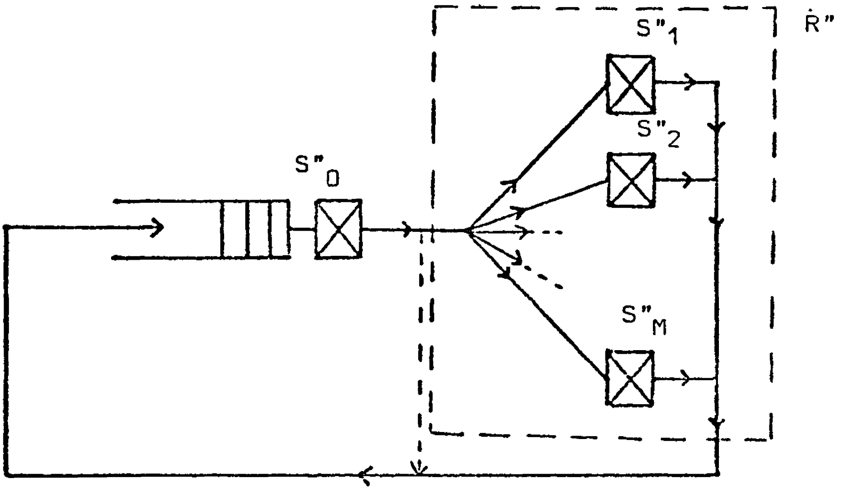

Figure 4.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. BASKETT, M. CHANDY, R. MUNTZ et J. PALACIOS, *Open, Closed and Mixed Networks with Different Classes of Customers*, J.A.C.M., vol. 22, 1975, p. 248-260.
2. K. M. CHANDY, J. H. HOWARD et D. F. TOWSLEY, *Product Form and Local Balance in Queueing Networks*, J.A.C.M., vol. 24, n° 2, avril 1977, p. 250-263.
3. D. R. COX, *A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Processes*, Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 51, 1955, p. 313-319.
4. D. R. COX, *The Analysis of Non-Markovien Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables*, Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 51, 1955, p. 433-441.
5. J. R. JACKSON, *Jobshop-Like Queueing Systems*, Management science, vol. 10, n° 1, octobre 1963.
6. L. M. LE NY, *Étude analytique de réseaux de files d'attente multiclasses à routages variables*, Thèse de 3e cycle, Université de Rennes-I, juin 1979.
7. J. PELLAUMAIL, *Régime stationnaire quand les routages dépendent de l'état*, Actes du 1er colloque A.F.C.E.T.-S.M.F. de mathématiques appliquées. 4-8 septembre 1978, Palaiseau et Rapport I.R.I.S.A., n° 102, juin 1978.
8. P. CASEAU, *Simulation de processeurs en série au moyen de modèles markoviens*, Bulletin de la direction des Études et Recherches E.D.F. 1977.