RAIRO. Recherche opérationnelle

Y. Kergall

Brève communication. Une nouvelle méthode de marquage dans la recherche d'une chaîne de longueur maximale d'un arbre

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 14, nº 2 (1980), p. 211-217

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_2_211_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 14, n° 2, mai 1980, p. 211 à 217)

Brève communication

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE MARQUAGE DANS LA RECHERCHE D'UNE CHAÎNE DE LONGUEUR MAXIMALE D'UN ARBRE (*)

par Y. KERGALL (1)

Résumé. — *Nous présentons ici un nouvel algorithme de marquage pour chercher les chaînes de longueur maximale d'un arbre, qui nécessite seulement deux parcours de l'arbre ce qui le rend plus efficace que les algorithmes classiques.*

Abstract. — *A new marking method for finding the maximal length chains in a tree is given here; requiring only two scanning of the tree, it is more efficient than usual algorithms.*

1. INTRODUCTION

Il existe de nombreuses méthodes pour chercher les chaînes de longueur maximale d'un arbre, notées CLM, c'est-à-dire comportant le plus grand nombre d'arêtes : méthode matricielle [6], méthode d'effeuillage progressif [3], méthode de marquage [6], utilisée par Flament dans [2] améliorée dans [1]. Bien que les méthodes de marquage classiques soient moins rapides que la méthode d'effeuillage progressif, nous reprenons ici en les simplifiant l'étude des méthodes de marquage dont l'emploi se justifie lorsqu'on désire construire une arborescence associée à l'arbre, c'est-à-dire partitionner les sommets de l'arbre en niveaux par rapport à un sommet x de l'arbre choisi comme racine de l'arborescence.

Soit A un arbre ayant N sommets et F feuilles. Nous savons que la méthode de marquage revient à parcourir N fois l'arbre, que la méthode de marquage améliorée ne comporte, elle, que F parcours de l'arbre. Nous décrivons ici une méthode de marquage dite de « double marquage » qui se réduit à deux explorations de l'arbre initial et qui s'appuie sur un théorème établi dans cet article.

(*) Reçu décembre 1978.
(1) Laboratoire d'Informatique appliquée, parc de Grandmont, Tours.

L'expérimentation semble montrer que cette méthode qui est la plus rapide des méthodes de marquage, est aussi plus efficace que l'effeuillage progressif.

2. THÉORÈME

THÉORÈME : *Soit x un sommet quelconque de l'arbre A. L'extrémité d'une plus longue chaîne issue de x est extrémité d'une CLM de A.*

Démontrons-le par l'absurde : soit f l'extrémité d'une plus longue chaîne issue de x et supposons que f ne soit pas extrémité d'une CLM. Deux cas sont à étudier; dans chacune des deux figures ci-dessous les lettres désignent les longueurs des chaînes correspondantes.

1° La plus longue chaîne issue de x coupe une CLM (en gros trait sur la figure) :

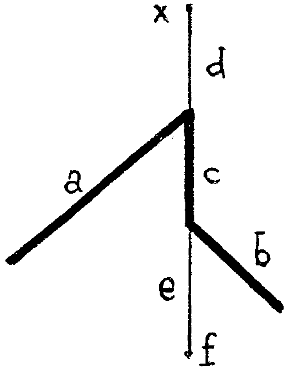
f n'est pas extrémité d'une CLM, d'où

$$a+c+b>a+c+e \quad \Rightarrow \quad b>e.$$

f est extrémité d'une chaîne de longueur maximale issue de x, d'où

$$d+c+e \geqq d+c+b \quad \Rightarrow \quad e \geqq b,$$

d'où contradiction.



Ceci est vrai quels que soient c et d, en particulier si $d=0$ (x appartient à une CLM) ou si $c=0$ (l'intersection d'une CLM et de la plus longue chaîne issue de x est réduite à un sommet).

2° La plus longue chaîne issue de x ne coupe pas une CLM :

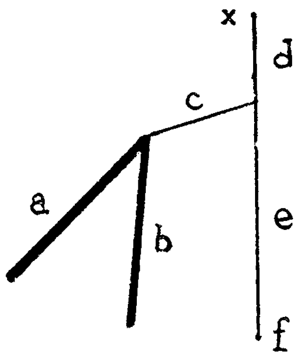
f n'est pas extrémité d'une CLM, d'où :

$$a+b>a+c+e \quad \Rightarrow \quad b>e,$$

f est extrémité d'une chaîne de longueur maximale issue de x, d'où :

$$d+e \geqq d+c+b \Rightarrow e>b \quad \text{car} \quad c>0,$$

d'où contradiction, quelle que soit la valeur de d.



Remarque : On démontrerait comme précédemment que les plus longues chaînes issues d'un sommet x quelconque passent toutes par un centre de l'arbre.

3. ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE DOUBLE MARQUAGE

Partant d'un sommet x quelconque de l'arbre A, on cherche l'extrémité d'une plus longue chaîne issue de x. Ceci se fait aisément par la méthode de marquage qui revient à partitionner les sommets de l'arbre en niveaux définis par

$$N_0=\{x\}, \qquad N_i=\{y \in A / d(x, y)=i\},$$

où $d(x, y)$ est la longueur de la chaîne joignant x et y. Cette partition en niveaux N_i, $0 \leqq i \leqq k$, se fait d'autant plus rapidement que k est petit, c'est-à-dire que le sommet x du départ est proche du centre de l'arbre.

Soit N_k le niveau d'indice maximal qui ne contient donc que des feuilles de A et soit f un élément de N_k. On réutilise la méthode de marquage, cette fois-çi en posant

$$N_0=\{f\}, \qquad N_i=\{y \in A / d(f, y)=i\}.$$

Soit N_l le niveau d'indice maximal. On a $l \geqq k$, l'égalité étant vérifiée si le sommet x choisi au début est une extrémité d'une CLM. Puisque f est une extrémité d'une CLM, d'après le théorème précédent, alors la longueur d'une CLM est l et toute suite

$$(f, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_l) \qquad \text{où} \quad x_i \in N_i$$

et où

$$d(x_i, x_{i+1})=1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq l-1,$$

est une CLM.

Remarquons que dans cette deuxième répartition des sommets en niveaux, le nombre de niveaux est indépendant du sommet x, initialement choisi.

4. REPRÉSENTATION EN MACHINE. EXPÉRIMENTATION

L'arbre est donné en associant à chaque sommet la liste de ses voisins. Ainsi la décomposition en niveaux à partir d'un sommet x quelconque choisi comme racine, se fait très simplement au moyen d'une file des descendants de x dans laquelle après x on place ses voisins puis les voisins de ses voisins, etc. Ainsi on parcourt une fois l'arbre à partir de x, en largeur d'abord et non en profondeur d'abord pour éviter les retours en arrière [4]. Cette décomposition est refaite à partir du dernier sommet y de la file en marquant cette fois-ci pour chaque sommet son ascendant dans l'arborescence de racine y de façon à avoir immédiatement le chemin de longueur maximale prêt à imprimer. Nous avons deux parcours de l'arbre; le temps d'exécution est donc en $O(N)$.

Rappelons que l'idée de l'algorithme d'effeuillage progressif est, en partant des feuilles de l'arbre (parcours de type « bottom up »), de construire toutes les demi-chaînes allant des feuilles au(x) centre(s) de l'arbre, demi-chaînes desquelles on exclut en cours de construction celles ne pouvant appartenir à une CLM. Le(s) centre(s) atteint(s), il ne reste plus qu'à raccorder directement à l'impression les demi-chaînes trouvées. Cet algorithme nécessite un seul parcours de l'arbre, mais le fait de rechercher à chaque étape de l'effeuillage si chacune des demi-chaînes en cours de construction peut ou non appartenir à une CLM, nuit à son rendement. Cet algorithme est néanmoins beaucoup plus rapide que les algorithmes classiques de marquage, et les algorithmes matriciels (étude comparée dans [3]).

Les deux graphiques ci-dessous permettent de comparer les temps (en 1/512 de seconde sur CII 10070) de la méthode d'effeuillage progressif (●) et du double marquage (□), d'abord dans le cas où on a 1 ou 2 CLM (*fig.* 1) puis dans le cas où on a 6 CLM (*fig.* 2). Pour mémoire, dans le cas $N=60$ la méthode de marquage amélioré nécessite un temps $T=706$ dans le cas de la figure 1 et $T=740$ dans le cas de la figure 2.

Pour un N donné, le temps indiqué représente la moyenne des temps obtenus avec des arbres de N sommets pour lesquels nous avons fait varier le nombre maximal de voisins, par exemple de 3 à 10 pour $N = 60$. Tous ces arbres sont tirés au hasard grâce au sous-programme ARBRE dont nous donnons la liste des instructions en annexe.

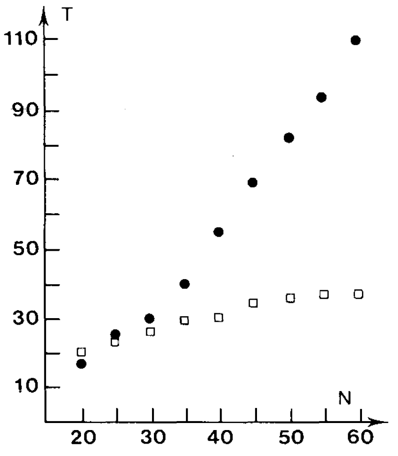


Fig. 1

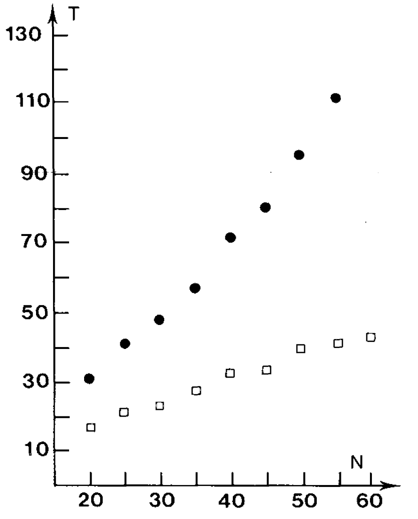


Fig. 2

Remarques : La méthode d'effeuillage progressif part des feuilles de l'arbre et va vers le centre C qui est le sommet qui minimise $\max_{y \in A} d(C, y)$, et à partir duquel on construit l'arborescence de niveaux *minimal*. La méthode du double marquage part d'un sommet quelconque, si possible le plus près du centre et construit une plus longue chaîne, issue de ce sommet, dont l'extrémité est la racine de l'arborescence de niveaux *maximaux*.

Ces méthodes pourront s'appliquer chaque fois qu'une décomposition en niveaux peut se révéler utile, par exemple dans certains problèmes de reconnaissance des formes [5].

BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. Asselin de Beauville, *Recherche de la chaîne de longueur maximale d'un arbre*, Informatique et Sciences humaines, n° 36, 1978, Paris.
2. C. Flament, *Théorie des graphes et structures sociales*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
3. Y. Kergall, *Chaînes de longueur maximale d'un arbre*, Informatique et Sciences humaines, fin 1979 (à paraître).
4. D. E. Knuth, *Fundamental Algorithms*, 2e édition, 1973.
5. J. Quinqueton, *Recherche d'alignements dans une image de points*, Thèse 3e cycle, Université Paris-VI, 1976.
6. B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, tomes 1 et 2, Dunod, Paris, 1970.

ANNEXE

Liste des instructions du sous-programme MARK 2 réalisant la méthode du double marquage.

```
      SUBROUTINE MARK2(VOISIN,SUC,NIVO,MARK,NSOM,MAXVOI)
C-----VOISIN EST LA MATRICE DANS LAQUELLE EST STOCKEE LA LISTE DES VOISINS------
C-----DE CHAQUE SOMMET,MAXVOI EST LE DEGRE MAXIMUM DES SOMMETS DE LARBRE--------
C-----NSOM EST LE NOMBRE DE SOMMETS,NIVO CONTIENT LA FILE DES DESCENDANTS-------
C-----D UN SOMMET,SUC CONTIENT LE SUCCESSEUR DE CHAQUE SOMMET DANS L -----------
C-----ARBORESCENCE SUSPENDUE PAR UNE EXTREMITE D UNE CLM,MARK EST UN -----------
C-----TABLEAU DE MARQUAGE.------------------------------------------------------
      INTEGER VOISIN(NSOM,MAXVOI),SUC(NSOM)
      DIMENSION NIVO(NSOM),MARK(NSOM)
      LEC=7
      IMP=8
      DO 7 I=1,NSOM
      NIVO(I)=0
7     MARK(I)=0
      DO 4 I=1,NSOM
      IF(VOISIN(I,2).NE.0) GOTO 5
4     CONTINUE
C---------REPARTITION EN NIVEAUX A PARTIR DU SOMMET I  ------------------------
5     MARK(I)=1
      NIVO(1)=I
      L=1
      K=1
11    NIVOK=NIVO(K)
      DO 10 J=1,MAXVOI
      IF(VOISIN(NIVOK,J).EQ.0) GOTO 15
      IF(MARK(VOISIN(NIVOK,J)).EQ.1) GOTO 10
      L=L+1
      NIVO(L)=VOISIN(NIVOK,J)
      MARK(NIVO(L))=1
10    CONTINUE
15    K=K+1
      IF(K-NSOM)11,20,20
20    DO 19 I=1,NSOM
19    MARK(I)=0
C  LE SOMMET D INDICE L EST UNE EXTREMITE D UNE CHAINE DE LONGUEUR MAX --------
      MARK(NIVO(L))=1
      NIVO(1)=NIVO(L)
      L=1
      K=1
21    NIVOK=NIVO(K)
      DO 25 J=1,MAXVOI
      IF(VOISIN(NIVOK,J).EQ.0) GOTO 28
      IF(MARK(VOISIN(NIVOK,J)).EQ.1) GOTO 25
      L=L+1
      NIVO(L)=VOISIN(NIVOK,J)
      MARK(NIVO(L))=1
      SUC(NIVO(L))=NIVOK
25    CONTINUE
28    K=K+1
      IF(K-NSOM)21,30,30
30    NIVOL=NIVO(L)
32    WRITE(IMP,31)NIVOL
31    FORMAT(10X,I2)
      IF(NIVOL.EQ.NIVO(1)) RETURN
      NIVOL=SUC(NIVOL)
      GOTO 32
      END
```

Liste des instructions du sous-programme ARBRE

```
      SUBROUTINE ARBRE(NSOM,MAXVOI,VOISIN)
      INTEGER VOISIN(NSOM,MAXVOI)
      DIMENSION ITEMP(5)
C--------INITIALISATION,LECT.IMPR, DONNEES------------------------------------
      DO 111 I=1,NSOM
      DO 112 J=1,MAXVOI
      VOISIN(I,J)=0
  112 CONTINUE
  111 CONTINUE
      IF(NSOM.GE.2)GOTO 101
      WRITE(8,440)
  440 FORMAT(1X,'DONNEE INCORRECTE')
      RETURN
101   VOISIN(1,1)=2
      VOISIN(2,1)=1
      K=2
      DEG=MAXVOI
C  LES 3 INTRUCTIONS SUIVANTES SERVENT A DETERMINER UN ENTIER IMPAIR-----------
C  QUELCONQUE COMME PARAMETRE D ENTREE A HASARD. ------------------------------
      CALL TIME(ITEMP,12)
      J=ITEMP(1)*ITEMP(2)
      IX=2*J+1
C--------TIRAGE NB. VOISINS DE I---------------------------------------------
      DO 102 I=1,NSOM
      CALL HASARD(IX,LX,R,AN,0.,DEG)
C  AN EST UN REEL ALEATOIRE COMPRIS ENTRE 0 ET DEG , BORNES EXCLUES-----------
      WRITE(8,441) AN
441   FORMAT(5X,F6.2)
      IX=LX
      NVOIS=AN
      IF(NVOIS.NE.0)GOTO 222
      IF(K.NE.I)GOTO 102
      NVOIS=1
  222 NVOIS=NVOIS+1
C--------CONSTRUCTION DE L ARBRE----------------------
      DO 104 J=2,NVOIS
      K=K+1
      VOISIN(I,J)=K
      VOISIN(K,1)=I
      IF(K.EQ.NSOM) GOTO 1000
  104 CONTINUE
  102 CONTINUE
1000  DO 500 I=1,NSOM
500   WRITE(8,442)I,(VOISIN(I,J),J=1,MAXVOI)
442   FORMAT(10X,I4,2X,10I3)
      RETURN
      END
```