RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MICHEL CRAMER
JEAN-PIERRE PONSSARD

Ordonnancement des mouvements de trésorerie

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 11, nº 4 (1977), p. 393-404
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1977__11_4_393_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 11, n° 4, nov. 1977, p. 393 à 404)

ORDONNANCEMENT DES MOUVEMENTS DE TRÉSORERIE (*)

par Michel CRAMER (1) et Jean-Pierre PONSSARD (2)

Résumé. — *Cette note développe un modèle élaboré au cours d'une expérience de conseil professionnel visant à l'amélioration de la gestion du numéraire dans un réseau bancaire. Le problème concerne l'ordonnancement dans le temps d'un grand nombre de mouvements de trésorerie connus en montant mais pouvant intervenir à des dates variables. Il s'agit de choisir ces dates pour minimiser l'encaisse moyenne, le stock devant à tout instant rester positif. Ce problème est modélisé sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers résolu à l'aide d'un algorithme s'inspirant de la programmation dynamique. Cet algorithme apporte une notable économie de calcul par rapport à une énumération exhaustive des solutions. Le modèle développé à cette occasion dans un contexte de stocks monétaires peut s'avérer également intéressant pour certains problèmes de gestion de stocks physiques.*

1. ORIGINE DU PROBLÈME

Les développements théoriques qui vont suivre trouvent leur origine dans un problème rencontré au cours d'une expérience de conseil professionnel dont les principaux caractères ont déjà fait l'objet d'une publication [2]. Cette note développe plus avant un modèle théorique élaboré à cette occasion qui peut être appliqué à la résolution d'une classe générale de problèmes de trésorerie. Ce modèle peut s'avérer également intéressant pour le cas de la gestion de stocks physiques et notamment dans une optique de meilleur emploi des surfaces disponibles. Le problème initial portait sur la gestion de stocks de numéraire comprenant :

— Des caisses centrales qui peuvent verser ou prélever du numéraire à d'autres caisses extérieures au système.

— Des caisses périphériques qui peuvent verser ou prélever du numéraire aux caisses centrales auxquelles elles sont rattachées.

— Divers groupes de clientèles, extérieurs au système, qui versent ou prélèvent du numéraire aux caisses centrales et aux caisses périphériques.

Pour des raisons d'économie et de sécurité, l'objectif est de minimiser la somme de numéraire stockée dans certaines caisses du système.

(*) Reçu mars 1976, révisé novembre 1976.
(1) Centre d'Études Supérieures du Management Public.
(2) Centre de Recherche en Gestion, École Polytechnique.

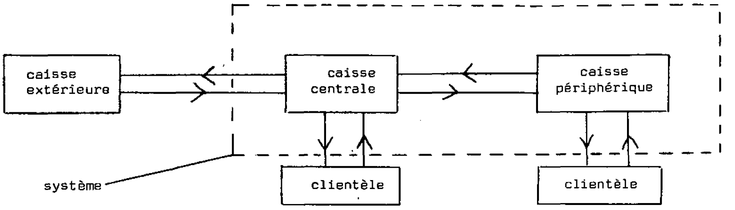

Figure 1

Dans ce réseau bancaire, on a d'abord constaté que les principaux mouvements :

– bilans horaires des échanges avec les petits clients aux guichets des caisses;
– mouvements spéciaux avec les gros clients;
– transferts de caisse à caisse à l'intérieur du système;
– transferts entre les caisses centrales et les caisses extérieures;

sont réglés par un calendrier périodique et constant. La trésorerie de chaque caisse se formule alors comme une liste de dates de mouvements et de quantités de mouvements. En fait, beaucoup de dates de mouvements sont de véritables variables de décision en ce sens qu'on peut les déplacer dans de larges intervalles. C'est en particulier le cas de la plupart des mouvements entre les caisses et avec les gros clients.

Le problème comprend donc deux questions : prévoir les quantités des mouvements et choisir les dates de ces mouvements. Par la suite, nous ferons abstraction de l'interdépendance entre ces deux questions et nous supposerons là première question résolue [2]. Nous présentons donc ici un modèle général qui concerne l'ordonnancement à travers le temps de mouvements de numéraire supposés connus en montant. Nous proposons également une méthode de résolution permettant d'obtenir l'ordonnancement qui minimise l'encaisse moyenne tout en maintenant un stock toujours positif.

Ce problème particulier de gestion de stocks ne semble pas avoir été l'objet d'une attention particulière dans la littérature spécialisée [4, 5]. Il semble pourtant correspondre à un certain nombre de situations pratiques et l'algorithme que nous préconisons dans cette note apporte alors une économie sensible de calcul par rapport à une énumération exhaustive.

2. MODÉLISATION DU PROBLÈME

Les aspects majeurs du problème réel d'ordonnancement des mouvements sont formalisés par le modèle suivant :

– Une série de N mouvements de stock doivent avoir lieu pendant l'intervalle (O, T).

– Chaque mouvement, numéroté i ($i = 1, 2, \ldots N$) est caractérisé par une quantité q_i qui peut être positive ou négative selon que le mouvement entre dans le stock ou bien sort du stock.

– La date z_i de chaque mouvement i doit se situer dans un intervalle spécifique (a_i, b_i) qui est lui-même compris dans (O, T) : $0 \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant T$.

– Le stock, égal à R à la date O, doit rester positif ou nul pendant tout l'intervalle (O, T).

Le problème se résume alors à choisir un « calendrier » $z = (z_i ; i = 1, \ldots N)$ de l'ensemble des mouvements qui minimise le niveau moyen du stock durant (O, T).

Le choix d'une telle fonction objectif répond à deux préoccupations rencontrées dans la pratique et qui se traduisent toutes deux par la minimisation du stock moyen de numéraire. Il s'agit d'une part d'une préoccupation financière, un tel stock étant par nature improductif par rapport aux utilisateurs du système (il produit à un taux d'intérêt négatif), et d'autre part d'une préoccupation de sécurité. On pourrait penser à ce sujet que ce soit le maximum du stock qu'il faille minimiser (dans une optique de théorie des jeux) mais en fait la date à laquelle se produit ce maximum n'est pas précisément connu d'un agresseur éventuel. En outre, les mesures de sécurité sont alors renforcées ce qui tend à faire diminuer la probabilité d'une agression à ces dates et d'une certaine manière à l'uniformiser tout au long de la journée. Finalement, c'est la minimisation du stock moyen qui paraît préférable.

Dans la représentation graphique ci-dessous, l'objectif est donc de réduire l'aire de la surface hachurée en améliorant l'ordonnancement des mouvements à travers le temps.

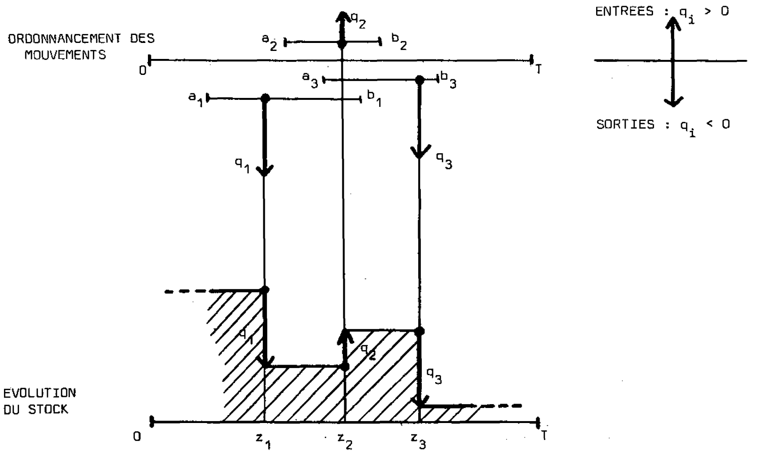

Figure 2. – Représentation graphique du modèle

Dans ce cadre, définissons les notations suivantes :

– La fonction logique $I(z_i \leq t) = \begin{cases} 1 \text{ si } z_i \leq t \\ 0 \text{ si } z_i > t \end{cases}$

— Le stock atteint à la date t par le calendrier z :

$$S(t, z) = R + \sum_{i=1}^{i=N} q_i \,.\, I(z_i \leq t)$$

— Le stock moyen $S(z)$ obtenu pendant (O, T) par le calendrier z :

$$S(z) = \frac{1}{T}\int_0^T S(t, z) = R + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{i=N} q_i(T - z_i).$$

Analytiquement, le problème consiste alors à minimiser $S(z)$ en fonction du calendrier z en respectant des contraintes sur les dates z_i et sur la positivité du stock; il est résumé dans l'encart suivant :

Modèle 1

Min $S(z)$		
$S(t, z) \geq 0$	$t \in (O, T)$	(1)
$a_i \leq z_i \leq b_i$	$i = 1, \ldots N$	(2)

Le champ des solutions possibles est limité par deux calendriers extrêmes z^+ et z^-, définis comme suit.

— Si $q_i > 0$, alors : $z_i^+ = a_i$ et $z_i^- = b_i$

— Si $q_i < 0$, alors : $z_i^+ = b_i$ et $z_i^- = a_i$

Cette limite est précisée par deux résultats immédiats.

LEMME 1 : *Si le calendrier z^+ ne satisfait pas la condition* (1), *aucun calendrier ne peut vérifier à la fois les conditions* (1) *et* (2) *et le problème n'admet donc pas de solution.*

LEMME 2 : *Si le calendrier z^- satisfait à la condition* (1), *tout calendrier qui vérifie la condition* (2) *vérifie aussi la condition* (1) *et z^- constitue la solution optimale du problème.*

Démonstrations : D'après la définition de z^+ et de z^-, pour toute date t dans (O, T) et pour tout calendrier z qui vérifie (2), on peut écrire :

$$q_i \,.\, I(z_i^- \leq t) \leq q_i \,.\, I(z_i \leq t) \leq q_i \,.\, I(z_i^+ \leq t)$$

Se reportant à l'expression de $S(t, z)$ et de $S(z)$ on obtient alors :

$$S(t, z^-) \leq S(t, z) \leq S(t, z^+), \qquad \forall\, t \in (O, T)$$

$$S(z^-) \leq S(z) \leq S(z^+)$$

Les deux lemmes se déduisent de ces inégalités. En résumé, pour que le problème ne soit pas trivial, il faut que z^+ vérifie (1) et que z^- ne vérifie pas (1). L'analyse du problème est encore simplifiée par la remarque simple suivante :

LEMME 3 : *Étant donné un calendrier z qui vérifie* (1) *et* (2), *il existe un calendrier* z^* *vérifiant* (1) *et* (2) *dont les dates* z_i^* *appartiennent à l'ensemble* A *des* a_j *et* b_j ($j = 1, \ldots N$) *et qui produit un stock moyen inférieur ou égal à celui de* z :

$$S(z^*) \leq S(z)$$

$$z_i^* \in A = (a_j\,;\, j = 1, \ldots N) \vee (b_j\,;\, j = 1, \ldots N) \qquad i = 1, \ldots N$$

Démonstration : Soit $g(z)$ le nombre de dates distinctes d'un calendrier z qui n'appartiennent pas à A. Pour démontrer le lemme par récurrence, nous allons prouver que pour tout calendrier z vérifiant (1), (2) et : $g(z) \geq 1$, il existe un calendrier z' vérifiant (1), (2), de stock moyen inférieur ou égal et tel que $g(z') = g(z) - 1$ (cf. *fig.* 3).

Supposons donc qu'une date z_i de z n'appartient pas à l'ensemble A. Dans l'ensemble constitué par la réunion des dates de A et de celles de z, déterminons x_1, la date maximale inférieure à z_i, et x_2, la date minimale supérieure à z_i :

$$x_1 = \operatorname{Max}\,[x\,;\, x < z_i,\, x \in A \text{ ou } x \in (z_j\,;\, j = 1, \ldots N)]$$
$$x_2 = \operatorname{Min}\,[x\,;\, x > z_i,\, x \in A \text{ ou } x \in (z_j\,;\, j = 1, \ldots N)]$$

(x_1 et x_2 existent puisque $a_i < z_i < b_i$).

Désignons par Q le total des mouvements de z survenant à la date z_i :

$$Q = \Sigma(q_j\,;\, z_j = z_i,\, j = 1, \ldots N)$$

Et définissons alors, en fonction du signe de Q, un nouveau calendrier z' tel que :

– Si $z_j \neq z_i$, alors $z_j' = z_j$

– Si $z_j = z_i$, alors $\begin{cases} z_j' = x_2 \text{ quand } Q \geqslant 0 \\ z_j' = x_1 \text{ quand } Q < 0 \end{cases}$

Comme les intervalles (x_1, z_i) et (z_i, x_2) ne comprennent aucune date de A d'après la définition de x_1 et x_2, ce calendrier z' vérifie encore (2).

Dans le cas : $Q \geq 0$, on obtient :

$$S(t, z') = S(t, z) + Q \,.\, [I(x_2 \leq t) - I(z_i \leq t)]$$

Le stock de z' est donc égal au stock de z sauf sur l'intervalle $]z_i, x_2]$, où il est réduit de Q :

$$\begin{cases} S(t, z') = S(t, z) & \text{pour} \quad t < z_i \text{ et } t \geq x_2 \\ S(t, z') = S(t, z) - Q & \text{pour} \quad z_i \leq t < x_2 \end{cases}$$

Sur cet intervalle $]z_i, x_2]$ le stock $S(t, z')$ est constant et égal au stock $S(t, z)$ entre x_1 et z_i :

$$\begin{cases} S(t, z') = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=N} q_j \,.\, I(z_j \leq x_1) & \text{pour} \quad x_1 \leq t < x_2 \\ S(t, z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=N} q_j \,.\, I(z_j \leq x_1) & \text{pour} \quad x_1 \leq t < z_i \end{cases}$$

Cette remarque assure que le calendrier z', comme z, vérifie la condition (1) : $S(t, z') \geq 0$.

Enfin le calendrier z' produit un stock moyen inférieur ou égal à celui de z :

$$S(z') = S(z) - Q \cdot (x_2 - z_i) \leq S(z)$$

Par un raisonnement semblable, on montrerait que, dans le cas $Q < 0$, le calendrier z' vérifie (1) et produit un stock moyen inférieur :

$$S(z') = S(z) + Q \cdot (z_i - x_1) < S(z)$$

Or : $g(z') = g(z) - 1$. En répétant cette construction, on aboutit donc à un calendrier z^* tel que $S(z^*) \leq S(z)$ et $g(z^*) = 0$.

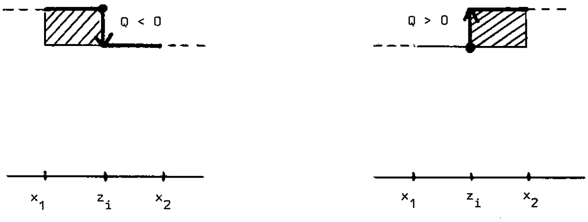

Figure 3. — Évolution du stock de z à z'

3. SOLUTION PAR UNE PROGRAMMATION DYNAMIQUE

3.1. L'algorithme proposé

Désignons par $(t_j ; j = 1, 2, \ldots M)$ l'ensemble ordonné de toutes les dates $(a_i, b_i ; i = 1, \ldots N)$ distinctes dans A :

$$t_1 < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_M \quad , \quad M \leq 2N$$

Et définissons :

$$t_{M+1} = T$$
$$T_j = t_{j+1} - t_j \qquad j = 1, \ldots M$$

Compte tenu du lemme 3, nous ne considérons par la suite que des calendriers dont chaque date z_i coïncide avec une certaine date t_j de A. Un tel calendrier z est entièrement défini par l'ensemble des variables : x_j^i $(i = 1, \ldots N ; j = 1, \ldots M)$, telles que :

$$\begin{cases} x_j^i = 0 & \text{si} \quad z_i > t_j \\ x_j^i = 1 & \text{si} \quad z_i \leqslant t_j \end{cases}$$

Le stock $S(t, z)$ reste alors constant sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$ et s'écrit :

$$S(t, z) = S(t_j, z) = R + \sum_{i=1}^{i=N} q_i x_j^i \qquad \text{pour} \quad t_j \leq t < t_{j+1}$$

L'expression du stock moyen devient donc :

$$S(z) = \frac{1}{T}\int_0^T S(t, z) = R + \frac{1}{T}\cdot\sum_{j=1}^{j=M}\sum_{i=1}^{i=N} q_i x_j^i T_j$$

Le problème prend ainsi la forme d'un programme linéaire en variables booléennes ($x_j^i = 0$ ou 1) [3].

Modèle 2 :

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{j=M}\sum_{i=1}^{i=N} q_i T_j x_j^i$$

$$R + \sum_{i=1}^{i=N} q_i x_j^i \geq 0 \quad j = 1, \dots M \qquad (3)$$

$$x_j^i = 0 \quad \text{pour} \quad t_j < a_i \qquad (4)$$

$$x_j^i = 1 \quad \text{pour} \quad t_j \geq b_i \qquad (5)$$

$$x_j^i \leq x_{j+1}^i \quad \text{pour} \quad a_i \leq t_j < b_i \qquad (6)$$

Sous cette forme, le problème peut être résolu par un algorithme de programmation dynamique [1] qui découpe les étapes de récurrence suivant les dates $t_j (j = 1, \dots M)$. A l'étape j, cet algorithme emploie comme variable d'état le vecteur $X_j = (x_j^i; i = 1, \dots N)$; la variable de décision est décrite par l'état X_{j+1} atteint à l'étape suivante; la fonction économique est alors définie par la mesure $S_j(X_j)$ du stock minimal qui peut être obtenu sur la période (t_j, T) en partant de l'état X_j à la date t_j. Pour un état particulier X_k^0 à l'étape k :

$$S_k(X_k^0) = \underset{(x_j^i)}{\text{Min}} \sum_{j=k}^{j=M}\sum_{i=1}^{i=N} q_i x_j^i T_j$$

avec les contraintes (3), (4), (5), (6).

Dans ce cadre, l'algorithme se formule comme suit :

a) *Initialisation : étape M*

$$\text{Poser : } x_M^i = 1 \qquad i = 1, \dots N$$

$$S_M(X_M) = T_M \cdot \sum_{i=1}^{i=N} q_i$$

b) *Récurrence : étape j*

Pour toute valeur de X_j respectant (3) (4) et (5), c'est-à-dire telle que :

$$\begin{cases} R + \sum_{i=1}^{i=N} q_i x_j^i \geq 0 \\ x_j^i = 0 \quad \text{si} \quad a_i > t_j \\ x_j^i = 1 \quad \text{si} \quad b_i \leq t_j \end{cases}$$

Calculer : $S_j(X_j) = T_j \sum_{i=1}^{i=N} q_i x_j^i + \text{Min}\,[S_{j+1}(X_{j+1})]$

Et retenir la valeur X_{j+1} qui minimise cette expression.

Cet algorithme apporte une économie sensible de calcul en regard d'une énumération exhaustive. Appelons en effet n_j et m_i les nombres respectifs d'indices i et j tels que : $a_i \leq t_j \leq b_i$. Le nombre d'états évalués par l'algorithme reste inférieur à 2^{n_j} sur chaque étape j, soit à un total de $\sum_{j=1}^{j=M} 2^{n_j}$, qui croît linéairement avec M ; tandis que le nombre de tous les calendriers possibles, $\prod_{i=1}^{i=N} m_i$, suit une tendance exponentielle en fonction de N.

3.2. Un exemple de résolution

Pour illustrer le fonctionnement de l'algorithme, traitons le problème particulier dont les données sont résumées dans le shéma suivant :

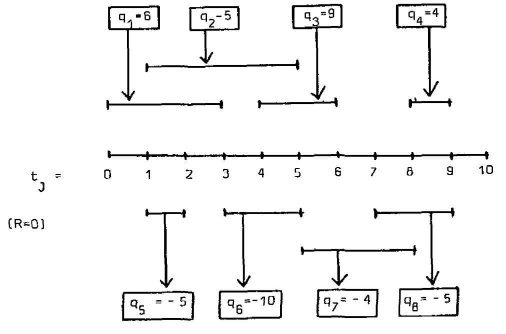

Figure 4

Les calculs et les résultats successifs de l'algorithme sont résumés dans le tableau de la page 401.

Le calendrier $z^0 = (2, 5, 4, 8, 2, 4, 5, 8)$, repéré dans ce tableau par les astérisques, produit donc le stock moyen minimal : $S_0/10 = 0{,}5$ et le profil correspondant du stock est le suivant :

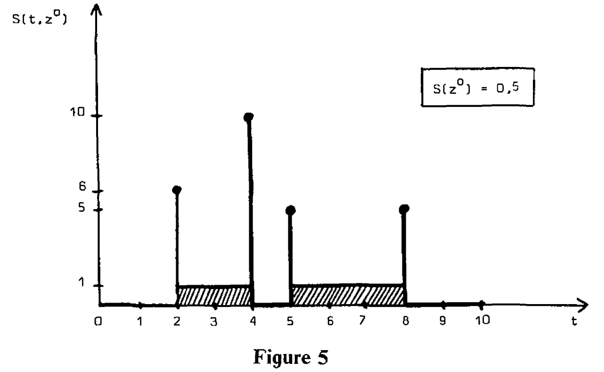

Figure 5

Étape j	États admissibles (stock positif) X_j	Stock de l'étape $T_j \sum_i q_i x_j^i$	Stock futur minimal $+ \text{Min } S_{j+1}(X_{j+1})$	Fonction économique $= S_j(X_j)$	Décision optimale X_{j+1}
9	1111 1111	0	–	0	–
8	* 1111 1111	0	0	0	1111 1111
	1111 1110	5	0	5	1111 1111
	1110 1110	1	0	1	1111 1111
7	* 1110 1110	1	0	1	1111 1111
	1110 1101	0	0	0	1111 1111
	1110 1100	5	0	5	1111 1111
6	* 1110 1110	1	1	2	1110 1110
	1110 1100	5	0	5	1110 1101
5	* 1110 1110	1	2	3	1110 1110
	1110 1100	5	2	7	1110 1110
4	1110 1100	5	3	8	1110 1110
	* 1010 1100	0	3	3	1110 1110
	1110 1000	15	3	18	1100 1110
	1100 1000	6	3	9	1110 1110
	1010 1000	10	3	13	1110 1110
	1000 1000	1	3	4	1100 1110
3	1100 1000	6	8	14	1110 1100
	* 1000 1000	1	3	4	1010 1100
2	1100 1000	6	14	20	1100 1000
	* 1000 1000	1	4	5	1000 1000
	0100 1000	0	14	14	1100 1000
1	1100 1000	6	20	26	1100 1000
	1000 1000	1	5	6	1000 1000
	1100 0000	11	20	31	1100 1000
	1000 0000	6	5	11	1000 1000
	* 0000 0000	0	5	5	1000 1000
0	1000 0000	6	6	12	1000 1000
	* 0000 0000	0	5	5	0000 0000

Par comparaison, le profil de z^+, présenté figure 6, produit un stock moyen de 6,4.

Lorsque le nombre N des mouvements est petit et que les intervalles (a_i, b_i) ne se recoupent pas trop, on peut être tenté d'appliquer une heuristique plus rapide. Un procédé assez efficace consiste à partir d'un calendrier qui satisfait les contraintes et à l'améliorer progressivement en effectuant à chaque étape le changement de date le plus favorable (qui peut porter aussi bien sur plusieurs mouvements survenant à la même date que sur un seul mouvement). Si l'on applique ce procédé à l'exemple en prenant z^+ pour point de départ, on effectue

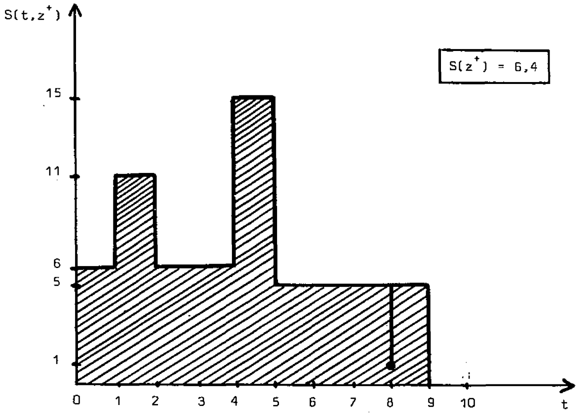

Figure 6

successivement les changements de date : $z_1 = 3, z_7 = 5, z_6 = 4, z_8 = 8, z_2 = 2$; pour aboutir au calendrier z', représenté ci-dessous, dont le stock moyen est $14/10 = 1{,}4$.

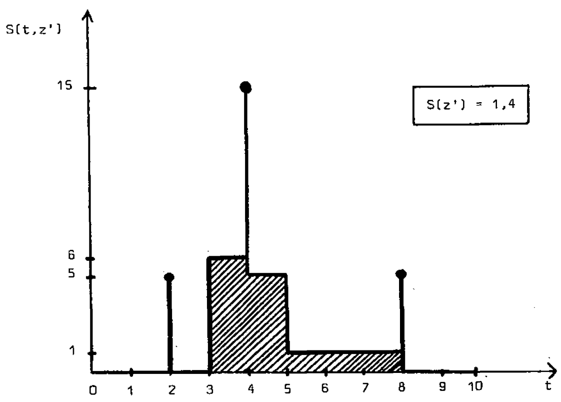

Figure 7

On observe sur cet exemple que le nombre total de calendriers possibles est 8 640 $\left(= \prod_{i=1}^{N} m_i\right)$ tandis que le nombre d'états possibles traités par l'algorithme est 41 $\left(= \sum_{j=1}^{M} 2^n j\right)$.

Le rapprochement de ces deux chiffres donne une mesure de l'économie de calcul réalisée.

4. EXTENSIONS DU MODÈLE

4.1. Modèle stationnaire à horizon infini

On peut étendre le modèle 1 (cf. 1) au cas d'un cycle de mouvements se répétant sur une période infinie, à condition que : $\sum_{i=1}^{i=N} q_i = 0$.

Il suffit en effet de transformer le stock initial R en variable de décision et le nouvel objectif consiste à minimiser $S(z)$ en fonction de z et de R. Dans ces conditions, la démonstration du lemme 3 reste valide et l'on peut encore restreindre l'étude aux seuls calendriers qui répartissent leurs dates dans A. On voit alors qu'une solution (z, R) dont le stock n'est jamais nul :

$$S(t; z, R) \geq e > 0 \qquad t \in (O, T)$$

ne peut être optimale, car la solution $(z, R - e)$ vérifie encore (1) et (2) et donne un stock moyen $S(z, R - e)$ inférieur de e/T à $S(z, R)$. Il existe donc au moins un intervalle (t_j, t_{j+1}) sur lequel la solution optimale fournit un stock nul. De ce fait, on peut encore résoudre le problème en appliquant M fois l'algorithme de programmation dynamique. On prend alors : $R = 0$ et l'on fixe successivement l'origine 0 du temps à chaque date $t_j (1 = 1, \ldots M)$. La solution optimale est constituée par celui des M programmes qui produit le stock moyen minimal. Par sa répétitivité inévitable, cette méthode rejoint les solutions dynamiques des modèles de stocks avec une demande certaine et périodique [6].

4.2. Modèle de programmation linéaire

Si l'on permet le partage d'un mouvement entre un nombre fini de dates, le lemme 3 reste vrai et le problème se formule comme un programme linéaire (flôt minimum avec sources et puits) [3], dans lequel les variables (y_j^i) représentent alors la fraction du flux i entrant dans le système à la date t_j :

Modèle 3

$$\underset{(y_j^i)}{\text{Min}} \sum_{j=1}^{j=M} \sum_{i=1}^{i=N} y_j^i (T - t_j)$$

$$y_j^i = 0 \quad \text{pour} \quad t_j < a_i \quad \text{ou} \quad t_j > b_i \quad \text{(contrainte de dates)}$$

$$\sum_{j=1}^{j=M} y_j^i = q_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots N \quad \text{(partage des mouvements)}$$

$$R + \sum_{j=1}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=N} y_j^i \geq 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots M \quad \text{(stock positif)}$$

Ce programme peut être généralisé pour prendre en compte : des bornes sur les quantités de mouvement par date et sur le stock par période; des coûts par quantité de mouvement et des coûts de stockage variant suivant la date; plusieurs stocks distincts en liaison.

1. R. BELLMANN, *Dynamic Programming*, N. J. Princeton, Princeton University Press, 1957.
2. M. CRAMER, J. P. PONSSARD, *Étude d'un modèle particulier de gestion des stocks avec niveaux multiples*, Actes du Congrès A.F.C.E.T., Aide à la Décision, tome 2, mai 1974.
3. G. B. DANTZIG, *Linear Programming and Extensions*, N. J. PRINCETON, Princeton University Press, 1963.
4. G. HADLEY et T. M. WHITIN, *Étude et pratique des modèles de stocks*, Dunod, 1966.
5. M. K. STARR et M. MILLER, *La gestion des stocks*, Dunod, 1966.
6. H. M. WAGNER, *Principles of Operations Research*, Prentice Hall, 1969.