RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

ALAIN LEROUX

Les graphes de transfert et la notion de graphe inverse

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 11, nº 4 (1977), p. 379-392

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1977__11_4_379_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 11, n° 4, nov. 1977, p. 379 à 392)

LES GRAPHES DE TRANSFERT ET LA NOTION DE GRAPHE INVERSE (*)

par Alain LEROUX [1]

Résumé. — *Les graphes de transfert présentent deux aspects particuliers : ils constituent un procédé de résolution des systèmes d'équations linéaires homogènes, mais aussi un outil d'analyse de structure de systèmes complexes.*

Il ne sera question ici que des graphes de transfert en tant que procédé de calcul. Quoique leur champ d'application se révèle limité, leur utilisation est parfois fructueuse en sciences économiques.

Pourtant le graphe de transfert présente un inconvénient certain : en figeant les relations entre variables, il ne permet pas de faire jouer à des variables originellement dépendantes le rôle de variables indépendantes.

Cet article s'attache à démontrer la possibilité de transformer le graphe initial en un graphe équivalent, appelé «graphe inverse», qui admet comme sommets-puits tous les sommets-sources du graphe originel, et dont tous les sommets sources appartiennent à un ensemble de sommets choisis arbitrairement.

INTRODUCTION

L'application des graphes de transfert, ou graphes de fluence, à la résolution des systèmes d'équations linéaires homogènes s'est faite pour faciliter le calcul des réseaux électriques. Le graphe autorise en effet une visualisation des interconnexions entre éléments constitutifs et permet ainsi une traduction immédiate entre le réseau physique et le système d'équations.

Cette technique de résolution s'est révélée à l'usage plus simple que la méthode des schémas-blocs qui répondait aux mêmes besoins, ce qui explique son succès auprès des ingénieurs électroniciens. Succès relatif toutefois car le nombre des variables, n, et le couplage moyen du système, c_m, imposent souvent le choix d'un autre procédé de résolution [2].

(*) Reçu mai 1976, révisé décembre 1976.
[1] Université d'Aix-Marseille III. École Supérieure d'Électricité.

[2] Nous définissons le couplage moyen d'un système par $c_m = \dfrac{2(r - m)}{n}$ où n représente le nombre de variables, m le nombre d'équations indépendantes et r le nombre total de fois où apparaissent les n variables dans le système des m équations écrit sous forme canonique (avec aucun cœfficient nul).

Une fois le système traduit graphiquement, c_m représente le degré moyen des sommets du graphe.

A titre indicatif, et uniquement sous l'angle de la commodité de l'outil mathématique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires homogènes, nous proposerions de départager les trois principaux procédés, à savoir : la méthode de substitutions, la méthode matricielle et la méthode des graphes de transfert, de la manière suivante :

c_m \ n	1-20	20-100	100-
1-4	substitution	graphique	matricielle
5-6	substitution	graphique matricielle	matricielle
6-	substitution matricielle	matricielle	matricielle

Comme le montre ce tableau, la méthode matricielle nous paraît être la plus puissante, car elle se prête aisément à un traitement automatisé, et le procédé graphique le moins performant. Cependant nous pensons que les graphes de transfert ont un domaine privilégié lorsque le nombre de variables devient assez conséquent (20-100) mais que le couplage reste faible (1-4) ou moyen (5-6), quoique dans ce dernier cas la méthode matricielle reprenne beaucoup de ses avantages.

Mais l'intérêt des graphes de transfert s'est vu renouvelé par C. Ponsard, (5) et (3), lorsqu'il montra l'adéquation de cette technique à l'étude des systèmes d'échanges linéaires interrégionaux. Même s'il s'avère que le choix de la méthode graphique se trouve limité, en tant qu'outil mathématique de résolution, dès que le couplage moyen entre régions s'affirme, la dimension topologique de cette technique en fait un outil préférentiel pour ce type de problème, en économie spatiale. Suivant cette nouvelle voie R. Lantner (2) a dégagé plusieurs propriétés intéressantes offertes par les graphes de transfert pour l'étude des effets de domination et l'analyse des structures complexes.

A la suite de ces pionniers, il s'est avéré que le champ d'application de cette technique de résolution dans le domaine économique était très vaste puisqu'elle pouvait couvrir tout système d'échanges, pourvu qu'il soit linéaire : interrégional, interindustriel, international, ...

Pour notre part, et toujours dans le domaine économique, nous voudrions indiquer un autre champ d'application : celui de la prise de décision. Si l'on fait l'hypothèse que les liaisons existantes entre les différentes variables d'un système économique sont linéaires, ce qui limite la décision à un domaine étroit respectant la structure du système étudié afin que l'approximation linéaire ait un sens (les décisions « révolutionnaires » ou même simplement « perturbatrices » échappent à cette formulation), l'utilisation des graphes de transfert devient possible. Et même souhaitable, car la représentation topologique va être le décalque des liens de causalité entre les variables, ce qui est particulièrement intéressant pour la discussion du résultat de la décision. En outre, dans ce type d'application, le couplage entre variables est faible si l'on ne conserve que des liens logiques majeurs. En revanche, si les interrelations sont approchées par voie économétrique on risque fort d'obtenir un couplage maximum, qui ne serait en fait que la confirmation de la pauvreté explicative de l'analyse purement économétrique : tout est dans tout, et réciproquement ! Si l'on exclut cette façon de procéder, à notre sens peu intéressante, l'usage des graphes de transfert devrait donc être, du strict point de vue mathématique, avantageux pour ce type d'applications.

Il nous semble ainsi que le nouvel intérêt porté aux graphes de transfert en économie soit durable, car ce procédé allie à la force de la représentation topologique une méthode de résolution mieux adaptée, ou simplement acceptable, pour différents types de problèmes, notamment en économie spatiale et dans l'analyse de la décision.

Toutefois, la représentation graphique n'a pas que des avantages : en figeant le système sous une forme non-canonique, elle n'autorise pas une permutation aisée entre les variables, or il se peut que l'on ait besoin de faire jouer aux mêmes variables des rôles successifs différents.

Ainsi prenons l'exemple, en analyse spatiale, d'un système de n régions et m branches (4), où la région j est strictement importatrice pour les m types de produits retenus (nous prenons ici un exemple caricatural pour que l'illustration soit plus forte, mais le problème demeure pour toute région et toute branche). Si dans un plan d'aménagement il est décidé que l'objectif prioritaire est un certain degré d'activités dans cette région, il faudra en déduire les apports et donc les activités des régions fournisseuses. De variables dépendantes (puits, si l'on excepte les boucles d'autoconsommation), les productions de la région considérée deviennent variables indépendantes (sources) que l'on fixe a priori. Comment le graphe de transfert pourra-t-il autoriser la résolution de ce nouveau système ?

De la même façon, supposons que nous décrivions par un graphe de transfert l'interrelation des variables significatives pour l'entreprise. Les variables indépendantes seront les variables exogènes (démographie, institutions, goûts, ...) ou instrumentales (budget de publicité, effort de recherche, prix des produits, ...). Les variables stratégiques (chiffre d'affaire, bénéfice, ...) seront toujours des variables dépendantes. Il semble évident, ici encore, que si l'on pouvait se fixer ces objectifs et en déduire les valeurs des variables instrumentales, quitte à refuser le scénario si celles-ci ou d'autres variables intermédiaires prenaient des valeurs manifestement inacceptables, le problème de la décision serait considérablement facilité. La méthode graphique directe qui consiste, par tâtonnements, à faire varier les valeurs des variables instrumentales et à en déduire les valeurs des variables stratégiques, se caractérise en effet par sa lourdeur, par son incapacité à rechercher une solution optimale et, de plus, par l'incertitude quant à la convergence du traitement itératif.

Appelons elliptiquement « problème inverse » celui qui consiste à fixer des variables, en nombre quelconque, originellement dépendantes et d'en déduire l'expression des variables originellement indépendantes.

Si l'on conçoit que la méthode des substitutions ou le procédé matriciel peuvent solutionner ce problème, car tous deux traitent le système écrit initialement sous forme canonique où rien ne prédestine telle ou telle variable à être plutôt dépendante qu'indépendante, par contre il en va tout autrement avec les graphes de transfert qui, eux, figent l'interconnexion des variables et donc leur qualité de dépendance ou d'indépendance.

Pour que la méthode des graphes de transfert conserve l'intérêt que l'on a bien voulu lui reconnaître, il faudrait pouvoir disposer d'une méthode simple de calcul du problème inverse, uniquement basée sur la transformation du graphe initial afin d'éviter à l'analyste de travailler sur deux fronts : le graphe et le système d'équations correspondant.

C'est à cette question que nous voudrions dans ce qui suit apporter un élément de réponse.

1. POSITION DU PROBLÈME

Afin de ne pas alourdir inutilement le texte, nous supposerons le lecteur familiarisé avec la théorie des graphes et, plus spécialement, celle des graphes de transfert. Pour des compléments éventuels sur ces questions nous le renvoyons aux ouvrages de B. Roy [6] et [7], et à celui de Y. Chow et E. Cassignol [1]. Nous ne définirons explicitement que les notations et les concepts dont nous aurons besoin.

Nous pouvons donner à la définition du problème inverse deux formulations équivalentes.

1.1. Première formulation

Soit un système de *m équations linéaires homogènes indépendantes à n* variables. Ce système admet $p = n - m$ variables indépendantes : x_j avec $j = 1, 2, \ldots, p$.

Nous choisissons q variables parmi les n variables du système : y_i avec $i = 1, 2, \ldots, q$, et nous recherchons les expressions de chaque x_j en fonction des seules variables explicatives y_i retenues :

$$x_j = g_j(y_i)$$

1.2. Seconde formulation

Cette seconde formulation est liée à l'utilisation des graphes de transfert.

Soit un graphe de transfert, que nous appellerons désormais « direct », caractérisé par n sommets dont p sommets sources : x_j avec $j = 1, 2, \ldots, p$.

Nous choisissons q sommets parmi les n du graphe : y_i avec $i = 1, 2, \ldots, q$, et recherchons le graphe de transfert, baptisé désormais « inverse », qui n'admet de sommets sources que les y_i, qui admet tous les x_j comme sommets puits et qui est équivalent au graphe direct (1).

La démonstration qui suit a pour objet précisément la détermination du graphe inverse; avant de l'entamer toutefois quelques remarques sont à faire.

1.3. Remarques

1.3.1. *Première remarque*

Appelons $G(X, U)$ le graphe direct. Le sous-graphe partiel obtenu en ne retenant que les chemins issus des p sommets sources et aboutissant aux q sommets choisis sera noté $G(X', U')$ et son complément $G(X'', U'')$:

$$G(X, U) = G(X', U') \oplus G(X'', U'') \text{ (2)}$$

Le problème posé en 1.2 revient à la simple recherche du graphe inverse $G^{-1}(X', U')$ puisque l'on vérifie aisément que :

$$G^{-1}(X. U) = G^{-1}(X', U') \oplus G(X'', U'')$$

Nous ne perdrons donc aucune généralité dans ce qui suit à travailler sur $G(X', U')$ plutôt que sur $G(X, U)$.

1.3.2. *Seconde remarque*

Nous pouvons supposer que $G(X', U')$ est connexe, s'il en allait autrement son inversion reviendrait à inverser successivement chacune de ses composantes connexes.

1.3.3. *Troisième remarque*

Tous nos raisonnements ne concerneront que des graphes finis, supposés ramenés à des 1-graphes.

---

(1) Deux graphes sont dits équivalents s'ils comportent le même ensemble de n sommets et si tout ensemble de valeurs $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ compatible avec l'un des deux graphes est compatible avec l'autre.

(2) Le signe $\oplus$ caractérise ici la réunion des graphes :

$$G(X', U') \oplus G(X'', U'') \leftrightarrow G(X' \cup X'', U' \cup U'')$$

2. DÉTERMINATION DU GRAPHE INVERSE

Nous justifierons l'existence du (ou plutôt des) graphe(s) inverse(s) par une démonstration en quatre étapes qui pourra servir d'algorithme pratique de recherche. Nous démontrerons successivement :

1[re] proposition : Tout graphe direct admet un graphe hiérarchisé équivalent (1);

2[e] proposition : Tout graphe hiérarchisé admet un graphe multi-parti équivalent;

3[e] proposition : Tout graphe multi-parti admet comme graphe équivalent un graphe multi-parti particulier (2);

4[e] proposition : Tout graphe multi-parti particulier est inversible.

La transitivité de ces quatre propositions nous permettra ainsi d'établir que tout graphe direct est inversible.

2.1. Première proposition

Tout graphe direct admet un graphe hiérarchisé équivalent.

2.1.1. Définitions

Un circuit est dit « isolé » si aucun des arcs le composant n'appartient à un autre circuit.

La « puissance » d'un circuit est définie comme le produit des valeurs des arcs le composant.

2.1.2. Réduction de circuits isolés

Soit C un circuit de c arcs et ayant comme puissance P. Ce circuit est la traduction topologique du sous-système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lll}(1) & x_1 = t_{c1}x_c + \sum_{i_a} t_{i_a}x_{i_a} & \text{avec } i_a \neq c \\ (2) & x_2 = t_{12}x_1 + \sum_{i_b} t_{i_b}x_i & \text{avec } i_b \neq 1 \\ (c) & x_c = t_{(c-1)c}x_{c-1} + \sum_{i_c} t_{i_c}x_i & \text{avec } i_c \neq c-1\end{array}\right.$$

(1) Par graphe hiérarchisé nous entendons, selon la suggestion de C. Ponsard (4), un graphe sans circuit.

(2) Nous définirons plus loin (2.3.1) les graphes multi-parti particuliers.

a) *Réduction d'un circuit isolé de puissance $P \neq 1$*

L'élimination de l'arc $x_c x_1$ revient à éliminer x_c de l'équation (1) on obtient par substitution le sous-système équivalent :

$$\begin{cases} (1') \quad x_1 = \dfrac{1}{1-P}\left[\sum_{i_a} t_{i_a} x_{i_a} + t_{c1} \cdot \sum_{i_c} t_{i_c} x_{i_c} + \ldots + t_{23} t_{34} \ldots t_{c1} \sum_{i_b} t_{i_b} x_{i_b}\right] \\ (2) \\ (c) \end{cases}$$

avec $P = t_{12} t_{23} t_{34} \ldots t_{c1}$

D'où la règle :

Pour réduire un circuit isolé de puissance $P \neq 1$, on élimine l'arc $x_c x_1$ et on relie à x_1 tous les précédents x_{i_k} de tous les sommets du circuit (à l'exception des sommets du circuit eux-mêmes). La valeur de l'arc $x_{i_k} x_1$ ainsi créé étant :

$$t_{i_k 1} = \frac{t_{i_k k} t_{k k+1} \ldots t_{c1}}{1 - P}$$

Le circuit initial est donc réduit, encore faut-il s'assurer que la création de nouveaux arcs ne conduit pas à la formation de nouveaux circuits : supposons que l'arc $x_{i_k} x_1$ créé par la phase de réduction appartienne à un circuit, cela signifierait que le graphe direct admettait un chemin $x_1 \to x_{i_k}$, or le sommet x_{i_k} étant précédent du sommet x_k ceci entraînerait l'existence dans le graphe direct d'un circuit $(x_1, \ldots, x_{i_k}, x_k, \ldots, x_1)$ ayant en commun le chemin $x_k \to x_1$ avec le circuit que l'on a réduit, ce qui est impossible puisque par hypothèse ce circuit était isolé.

b) *Réduction d'un circuit isolé de puissance $P = 1$*

Après élimination de x_c dans l'équation (1), le sous-système équivalent devient :

$$\begin{cases} (1'') \quad 0 = \sum_{i_a} t_{i_a 1} x_{i_a} + t_{c1} \sum_{i_c} t_{i_c c} x_c + \ldots + t_{23} t_{34} \ldots t_{c1} \sum_{i_b} t_{i_b 2} x_i \\ (2) \\ (c) \end{cases}$$

D'où la règle :

Pour réduire un circuit isolé de puissance $P = 1$, on peut éliminer l'arc $x_c x_1$.

Le sommet x_1 est remplacé, d'une part, par un sommet nul N_1, équation (1″), relié à tous les précédents de tous les sommets composant le circuit, à l'exception des sommets du circuit eux-mêmes; la valeur de l'arc $x_{i_k}N_1$ ainsi créé étant :

$$t_{i_kN} = t_{i_kk}t_{kk+1}t_{k+1k+2}\ \ldots\ t_{c1}$$

et, d'autre part, par un sommet source x'_1 qui admet comme suivants ceux de x_1 avec les mêmes valeurs t_{1l}, équations (2) à (c).

On démontrerait de même qu'au paragraphe précédent que cette réduction n'a entraîné la création d'aucun nouveau circuit.

2.1.3. *Réduction de circuits non isolés*

Soit $\{ C_k \}$ un ensemble de circuits ayant une partie commune. La réduction du circuit C_1 se fera par élimination de l'arc x_cx_1 conformément à l'une des deux règles 2.1.2 a ou b, suivant que la puissance de ce circuit est différente ou non de 1.

Si l'arc x_cx_1 appartient en propre à C_1, le même raisonnement que celui conduit en 2.1.2 établit l'impossibilité de création de nouveau circuit.

Si l'arc x_cx_1 appartient à d'autres circuits C_l, la phase de réduction de C_1 reforme ces différents circuits et aucun autre. En effet, un raisonnement du type 2.1.2 conclut à l'impossibilité de formation de circuits inexistants dans le graphe direct. Par ailleurs, tous les circuits C_l, apparemment réduits par l'élimination de l'arc x_cx_1, contenaient un sommet x_{j_1} précédent d'un sommet de C_1. La création des arcs $x_{j_1}x_1$ dans la phase de réduction va donc reformer les circuits C_l.

2.1.4. *Théorème*

De ce qui précède, nous pouvons établir le théorème suivant, important pour la recherche pratique du graphe hiérarchisé équivalent.

THÉORÈME : *Si un graphe direct contient g circuits distincts* (1), *g procédés de réduction du type* 2.1.2 *transformeront le graphe direct en un graphe hiérarchisé équivalent.*

2.2. Deuxième proposition

Tout graphe hiérarchisé admet un graphe multi-parti équivalent.

2.2.1. *Définitions*

Nous dirons qu'un sommet x_k est « atteint » à partir d'un ensemble de sommets $\{ E \}$, s'il existe au moins un chemin issu de $\{ E \}$ et aboutissant à x_k. Dans le cas contraire x_k sera dit « non-atteint » à partir de $\{ E \}$.

x_k sera dit atteint « directement » à partir de $\{ E \}$ s'il existe un tel chemin de

(1) Distinct s'entend, évidemment, à une permutation circulaire près des sommets le composant. Pour la recherche pratique des circuits d'un graphe [*voir* (4)].

longueur 1, atteint « indirectement » s'ils ont tous une longueur supérieure 1 (1).

Le sommet x_k sera dit « déterminé » à partir de $\{ E \}$ s'il est atteint directement et si tous les précédents de x_k appartiennent à $\{ E \}$.

2.2.2. *Recherche du graphe multi-parti équivalent*

Il résulte de la définition même des graphes hiérarchisés que tous les sommets sont atteints à partir de l'ensemble $\{ E_s \}$ des sommets sources, et que parmi ceux qui le sont directement un sommet au moins est déterminé à partir de $\{ E_s \}$.

Appelons $\{ E_d \}$ l'ensemble des sommets déterminés à partir de $\{ E_s \}$ et $\{ E'_s \}$ l'ensemble des sommets sources participant à la détermination de $\{ E_d \}$. Pour chaque sommet $x_s \in \{ E'_s \}$ faisons une partition des arcs divergents selon qu'ils participent ou non à la détermination de $\{ E_d \}$, et dissocions x_s en deux sommets x'_s et x''_s, le sommet x'_s conservant seulement les arcs servant à la détermination de $\{ E_d \}$ et x''_s seulement ceux qui n'y participent pas (2).

Appelons G_1 le sous-graphe partiel bi-parti ayant comme ensemble source $\{ x'_s \}$ et comme ensemble puits $\{ E_d \} \cup \{ x''_s \}$.

Si l'on considère le sous-graphe obtenu en éliminant du graphe hiérarchisé initial l'ensemble $\{ x'_s \}$ défini précédemment, et que l'on reconduise l'opération ci-dessus, on obtiendra un nouveau sous-graphe partiel bi-parti G_2. Si l'on répète cette opération jusqu'à ce que tous les sommets du graphe hiérarchisé initial appartiennent à l'un de ces sous-graphes partiels bi-parti G_k (3), le graphe obtenu par réunion de ces G_k composera un graphe multi-parti équivalent.

2.3. Troisième proposition

Tout graphe multi-parti admet comme graphe équivalent un graphe multi-parti particulier.

2.3.1. *Définition*

Un graphe multi-parti est formé par la réunion de T sous-graphes bi-parti G_t, avec $t = 1, 2, \ldots, T$.

Chacun de ces sous-graphes G_t possède S_t sommets sources et P_t sommets puits. Appelons R_t le rang du système d'équations correspondant :

$$R_t \leqslant \min (S_t, P_t)$$

(1) Le cas trivial où $x_k \in \{ E \}$ ne présente aucun intérêt.

(2) On a la relation $x'_s = x''_s$ représentée graphiquement par un arc de valeur 1 issu de x'_s et aboutissant à x''_s.

(3) Et l'on est sûr d'y parvenir après un nombre fini d'opérations (au plus égal à $n - 1$), puisque l'ensemble des sommets déterminés à partir des sommets sources n'est jamais vide pour un graphe hiérarchisé.

Nous appellerons graphe multi-parti « particulier », un graphe multi-parti tel que :

$$R_t = P_t \qquad \forall t$$

2.3.2. *Recherche du graphe multi-parti particulier équivalent*

Soit M le graphe multi-parti initial, à N sommets :

$$M = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_T$$

Si $R_1 = P_1$, nous pouvons poser $G_1 = G_1'$ et $M_1' = G_2 \oplus \ldots \oplus G_T$ et écrire :

$$M = G_1' \oplus M_1'$$

où G_1' respecte bien la définition des graphes particuliers et où M_1' est un graphe multi-parti à $N - S_1$ sommets.

Si $R_1 < P_1$, ceci signifie que $P_1 - R_1$ sommets puits sont exprimables en fonction des R_1 sommets puits indépendants. Nous pouvons alors décomposer G_1 de la manière suivante :

$$G_1 = G_1' \oplus G_1''$$

où G_1' est obtenu en retenant les R_1 sommets puits indépendants et G_1'' exprime les relations de dépendance entre les R_1 sommets retenus précédemment et les $P_1 - R_1$ autres. Le graphe initial peut alors se mettre sous la forme :

$$M = G_1' \oplus G_1'' \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_T$$

Notons que si le sous-graphe $G_1'' \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_T$ n'est pas en général un graphe multi-parti c'est par contre un graphe hiérarchisé, et d'après la proposition 2.2 il admet comme graphe équivalent un graphe multi-parti, M_1'.

Ainsi, le graphe initial peut se mettre sous la forme :

$$M = G_1' \oplus M_1'$$

G_1' respectant la définition des graphes particuliers et M_1' étant un graphe multi-parti à $N - S_1$ sommets.

Puisque dans tous les cas ($R_1 = P_1$ ou $R_1 < P_1$) le graphe initial peut se mettre sous cette forme et que le raisonnement précédent peut s'appliquer à M_1', ceci établit l'existence d'un graphe multi-parti particulier équivalent au graphe multi-parti initial.

2.4. Quatrième proposition

Tout graphe multi-parti particulier est inversible.

2.4.1. *Définition*

Nous appelons « composantes » d'un graphe multi-parti les sous-graphes bi-parti le composant.

2.4.2. *Inversion d'une composante d'un graphe multi-parti particulier*

Soit un graphe bi-parti G_k composé de S_k sommets sources et P_k sommets puits, et dont le rang est $R_k = P_k$. Nous allons montrer que G_k admet un graphe équivalent G_k^{-1}, dit graphe inverse, qui admet comme sommets sources et puits respectivement les sommets puits et sources de G_k.

Puisque $R_k \leqslant \min(S_k, P_k)$, la condition $R_k = P_k$ implique que $S_k \geqslant P_k$.

Le graphe G_k est la traduction topologique d'un système d'équations de la forme :

$$[y_i] = [t_{ij}][x_j] \qquad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots, P_k \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \ldots, S_k$$

en appelant respectivement x_j et y_i les sommets sources et puits.

Nous pouvons supposer que notre numérotation des variables est telle que le mineur :

$$|t_{ij}| \neq 0 \qquad \text{avec} \quad i = 1, 2, \ldots, P_k \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \ldots, P_k$$

Le système d'équations ci-dessus est alors équivalent au système :

$$\begin{bmatrix} y_i \\ \hline x_{P_k+1} \\ x_{P_k+2} \\ \\ \\ x_{S_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & t_{ij} & & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & . \\ \\ 0 & & & & & 01 \end{bmatrix} [x_j]$$

avec $i = 1, 2, \ldots, P_k$ et $j = 1, 2, \ldots, S_k$
obtenu en y adjoignant les $S_k - P_k$ identités :

$$x_{P_k+u} \equiv x_{P_k+u}$$

La matrice des cœfficients de ce nouveau système est carrée (S_k, S_k) et de rang S_k, elle est donc inversible.

Le graphe inverse cherché est le graphe G_k^{-1} correspondant au système :

$$[x_j] = \begin{bmatrix} & & t_{ij} & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \quad 0 & 0 \\ \\ \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_i \\ \hline x_{P_k+1} \\ x_{P_k+2} \\ \\ \\ x_{S_k} \end{bmatrix}$$

Remarquons que les $S_k - P_k$ duplications de sommets x_{P_k+u} introduites pour faciliter l'inversion se retrouvent dans G_k^{-1}, mais que l'on pourra les éliminer par le procédé habituel d'identification.

2.4.3. *Recherche du graphe inverse équivalent*

Étant donné un graphe multi-parti particulier M, dont $\{ E_s \}$ et $\{ E_p \}$ constituent les ensembles de sommets sources et puits, nous recherchons le graphe équivalent M^{-1}, ou graphe inverse, qui admet respectivement $\{ E_s \}$ et $\{ E_p \}$ comme ensemble de sommets puits et sources.

Il découle de la loi de composition des opérateurs linéaires inversibles que l'opérateur :

$$C = A \,.\, B$$

admet comme inverse :

$$C^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$$

La loi de composition produit d'opérateur, qui a pour correspondant la réunion des graphes, est associative, elle s'étend donc à un nombre quelconque d'opérateurs ce qui permet de conclure :

Un graphe multi-parti particulier admet comme graphe inverse le graphe obtenu par réunion des inverses de ses différentes composantes.

2.5. Résultat

A l'aide des quatre propositions précédentes, on peut établir pour tout graphe de transfert l'existence d'un graphe inverse équivalent, répondant à la définition 1.2.

En effet, la relation d'équivalence entre graphes est transitive; en outre, le passage du graphe direct au graphe équivalent hiérarchisé (première proposition), puis du graphe hiérarchisé au graphe multi-parti particulier équivalent (deuxième et troisième propositions) laisse inchangées les natures des sommets sources et puits, la phase d'inversion (quatrième proposition) donnera donc un graphe équivalent $G^{-1}(X', U')$ dont les sommets sources et puits sont respectivement puits et sources du graphe direct $G(X', U')$.

3. COMMENTAIRES

3.1. Degré de liberté

3.1.1. *Définition*

Nous appelons « degré de liberté » d'un graphe de transfert (ou d'un système d'équations linéaires homogènes) le nombre de variables qu'il faut se fixer pour que toutes les variables soient déterminées.

3.1.2. *Degré de liberté du graphe inverse*

La relation d'équivalence entre graphes permet de définir des classes d'équivalence, dont le degré de liberté est une caractéristique : Deux graphes équivalents ont nécessairement le même degré de liberté. Ainsi en va-t-il, en particulier, pour le graphe direct et le graphe inverse.

Soit $G(X', U')$ le graphe direct, admettant p sommets sources et q sommets puits [1], son degré de liberté est égal à p puisque la donnée des variables sources suffit à déterminer complètement le graphe.

Si $p \geqslant q$, le graphe inverse présentera comme sommets sources les q sommets puits de $G(X', U')$, plus $p - q$ autres sommets.

Si $p \leqslant q$, le graphe inverse n'aura comme sommets sources que p des q sommets puits de $G(X', U')$, ce qui signifie l'existence de $q - p$ relations de dépendance entre les variables explicatives y_i retenues.

3.2. Algorithme pratique de recherche du graphe inverse

3.2.1. *Méthode*

Une méthode possible consiste à appliquer la démarche dont on s'est servi pour montrer l'existence de $G^{-1}(X', U')$. Il faut donc successivement transformer le graphe direct en un graphe hiérarchisé équivalent, puis en un graphe multi-parti particulier équivalent, et enfin l'inverser.

a) *Obtention du graphe hiérarchisé équivalent*

La réduction de circuits, conformément aux règles 2.1, est simple mais on se heurte vite à une difficulté pratique, en temps et en papier, si le graphe direct $G(X', U')$ contient un grand nombre de circuits. Notons toutefois que cette difficulté n'est pas propre à l'inversion du graphe puisque dans le calcul du problème direct on est également obligé de réduire les circuits de $G(X', U')$.

b) *Obtention du graphe multi-parti particulier équivalent*

L'obtention des composantes G'_k est simple, car on retrouve souvent les mêmes configurations. Toutefois, si le couplage du système est trop fort on aboutit vite à une situation inextricable.

c) *Obtention du graphe inverse*

Cette phase est la plus simple de toutes et ne pose pratiquement aucune difficulté, car si l'on a pu obtenir le graphe multi-parti particulier équivalent c'est que le rang des différentes composantes R_k est faible, l'inversion des matrices de cœfficients se faisant alors facilement.

3.2.2. *Appréciation*

Cette méthode d'inversion, non automatisée, présente donc de sérieuses limitations :

– il faut que le graphe direct contienne peu de circuits ($g \leqslant 10$)

---

[1] Nous ne retenons comme variables explicatives y_i que les variables puits de $G(X', U')$, puisque les autres s'en déduiront dans le graphe inverse.

– que le couplage moyen soit faible ($c_m \leqslant 5$ *ou* 6)
– que le nombre de sommets ne soit pas excessif ($n \leqslant 100$).

En revanche, elle présente le sérieux avantage d'être progressive dans toutes ses phases, et donc d'autoriser le contrôle et la correction des erreurs. Enfin, elle donne directement soit les relations de dépendance entre les variables explicatives retenues (si $p \leqslant q$), soit les variables libres supplémentaires (si $p \leqslant q$).

En outre, il semble possible d'automatiser cette méthode d'inversion puisque l'algorithme qui repose sur la démonstration donnée dans la seconde partie est systématisé, sauf dans le choix des p variables explicatives retenues comme sommets sources (si $p \leqslant q$) ou des $p - q$ variables libres supplémentaires (si $p \geqslant q$). Ce choix, qui peut être d'une certaine importance pour l'analyse, peut être effectué une fois pour toute en se donnant une table de préférences entre les n variables du graphe direct. Toutefois, il faudrait s'interroger sur le coût de développement et de traitement d'un tel programme et le rapprocher de l'utilité réelle que présente l'obtention des graphes inverses.

CONCLUSION

La méthode de résolution du problème inverse à l'aide des graphes de transfert proposée ici a les mêmes limitations, en nombre de variables, couplage moyen, nombre de circuits, que la méthode graphique de résolution des systèmes d'équations linéaires homogènes. Il faut y voir d'ailleurs une caractéristique générale inhérente aux graphes de transfert.

Toutefois, il a été noté au début de cet article que les graphes de transfert pouvaient allier à la force de représentation topologique un procédé de résolution acceptable pour certains types de problèmes, notamment en économie spatiale et pour l'étude de la dècision. Or dans ces domaines d'application, la résolution du problème inverse est souvent recherchée. La méthode proposée permet d'y parvenir, sans difficulté majeure, en évitant ainsi à l'analyste de travailler sur deux fronts : le graphe et le système d'équations.

BIBLIOGRAPHIE

1. Y. Chow et E. Cassignol, *Théorie et applications des graphes de transfert*, Dunod, 1965.
2. R. Lantner, *Théorie de la dominance économique*, Dunod, 1974.
3. C. Ponsard, *De l'influence des paramètres singuliers sur le comportement d'un système linéaire de flux interrégionaux*, Revue d'Économie Politique, juillet-août 1968.
4. C. Ponsard, *Un modèle topologique d'équilibre économique interrégional*, Dunod, 1969.
5. C. Ponsard, *Essai d'interprétation topologique des systèmes interrégionaux*, Revue Économique, mai 1967.
6. B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales*, Dunod, premier tome, 1969.
7. B. Roy, *Algèbre et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales*, Dunod, deuxième tome, 1969.