

B. LEMAIRE

## **Méthode de conservation et blocage dans les files d'attente**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 11, n° 4 (1977),  
p. 363-377

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1977\\_\\_11\\_4\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1977__11_4_363_0)

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MÉTHODE DE CONSERVATION ET BLOCAGE DANS LES FILES D'ATTENTE (\*)

par B. LEMAIRE (1)

Résumé. — On donne une démonstration complète de la validité de la méthode de conservation des flux de transition dans les files d'attente en régime permanent. Pour illustrer les possibilités de cette méthode, on l'applique aux cas de 2, 3 ou 4 files d'attente en cascade; pour deux files, on montre ainsi — presque sans calcul — que si le nombre de places d'attente devant le guichet de la seconde file est limité à  $a$  places, la condition pour que le système ne s'engorge pas, n'est plus  $\lambda/\mu < 1$  mais devient :  $\frac{\lambda}{\mu} < \frac{a+2}{a+3}$  (arrivées à la Poisson de taux  $\lambda$ ; chaque service exponentiel de même taux  $\mu$ ). Pour trois files et avec  $a = 0$  :  $\frac{\lambda}{\mu} < 22/39$  et pour quatre files :  $\frac{\lambda}{\mu} < \frac{4\,024}{7\,817}$ . Ces résultats trouvent leur application dans des problèmes de contrôles successifs à une douane, de production à la chaîne avec stock tampon, dans les systèmes de transport P.R.T. (cf. addendum); dans la retransmission de messages sous forme de commutation de paquets, dans un réseau d'ordinateurs. Dans l'étude de la disponibilité des équipements, on peut aussi employer la méthodes des coupes.

### I. CONSERVATION DU FLUX DE TRANSITION

Soit un processus de Markov homogène à espace d'états discret, associé à un phénomène d'attente, dont le nombre d'états est fini (ou dénombrable), pour lequel existe un régime permanent indépendant de la distribution initiale (2).

On peut tracer le graphe des transitions d'états à états entre deux instants infiniment voisins  $t$  et  $t + dt$ . Les sommets du graphe symbolisent les états; les arcs représentent les transitions de probabilité non nulle (une probabilité en  $o(dt)$  est considérée comme nulle). La probabilité de passer de l'état  $E_i$  à l'état  $E_j$  est de la forme :  $\alpha_{ij} \cdot dt$  ( $i \neq j$ ); la probabilité de rester en  $E_i$  vaut :  $1 - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} dt$ ; vue l'homogénéité ces probabilités ne dépendent pas de  $t$ , mais seulement de  $dt$ .

Soit  $G = (X, U)$  ce graphe et  $A \subset X$  un sous-ensemble de sommets. On appelle « coupe » associée à  $A$ , l'ensemble des arcs ayant une extrémité et une seule dans  $A$ .

(\*) Reçu mars 1976, version révisée février 1977.

(1) Maître-Assistant de Recherche Opérationnelle. Conservatoire des Arts et Métiers, Paris.

(2) C'est, en particulier, le cas lorsque le graphe  $G$  est fortement connexe.

Par définition, la fréquence des transitions de l'état  $E_i$  vers l'état  $E_j$  est :

$$p_i \cdot \alpha_{ij}$$

où  $p_i$  est la probabilité de  $E_i$  en régime permanent.

THÉORÈME : En régime permanent, la fréquence des transitions vers l'extérieur de toute coupe est égale à la fréquence des transitions vers l'intérieur.

Soit :

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} p_i \cdot \alpha_{ij} = \sum_{j \notin A} \sum_{i \in A} p_j \cdot \alpha_{ji}$$

Démonstration :

1) Supposons que  $A$  soit réduite à un seul sommet  $E_i$ . Calculons la probabilité de l'état  $E_i$  à l'instant  $t + dt$  :

$$p_i(t + dt) = p_i(t) \left[ 1 - \sum_{j \neq A} \alpha_{ij} dt \right] + \sum_{j \neq A} p_j(t) \cdot \alpha_{ji} dt \tag{1}$$

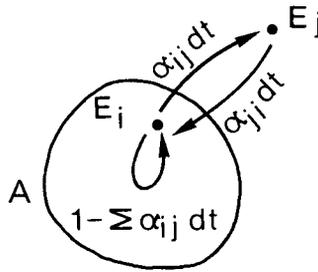


Figure 1.

En effet à  $t$ , le système était soit en  $E_i$  et y est resté, soit en  $E_j$  ( $j \neq i$ ) et est passé en  $E_i$ .

En régime permanent :  $p_i(t + dt) = p_i(t) = p_i$ . En reportant dans (1), que nous simplifions alors par  $dt$ , il vient :

$$0 = \left[ - \sum_{j \neq A} \alpha_{ij} \right] \cdot p_i + \sum_{j \neq A} \alpha_{ji} \cdot p_j$$

soit :  $p_i \sum_{j \neq A} \alpha_{ij} = \sum_{j \neq A} p_j \alpha_{ji}$ , ce qui exprime que la fréquence des transitions de  $E_i$  vers les états  $E_j$  ( $j \neq i$ ) égale la fréquence des transitions de ces mêmes états vers  $E_i$ .

2) Supposons que  $A$  comporte deux sommets :  $A = \{ E_i, E_k \}$  ; d'après le résultat du 1) on peut écrire :

pour  $E_i$  :

$$p_i \sum_{j \neq A} \alpha_{ij} + p_i \alpha_{ik} = \sum_{j \neq A} p_j \alpha_{ji} + p_k \alpha_{ki}$$

pour  $E_k$  :

$$p_k \sum_{j \neq A} \alpha_{kj} + p_k \alpha_{ki} = \sum_{j \neq A} p_j \alpha_{jk} + p_i \alpha_{ik}$$

la somme membre à membre de ces équations, fournit après simplification des termes correspondants aux transitions entre  $E_i$  et  $E_k$  :

$$p_i \sum_{j \neq A} \alpha_{ij} + p_k \sum_{j \neq A} \alpha_{kj} = \sum_{j \neq A} p_j (\alpha_{ji} + \alpha_{jk})$$

soit :

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} p_i \alpha_{ij} = \sum_{j \notin A} \sum_{i \in A} p_j \alpha_{ji}$$

3) Il s'ensuit, par récurrence sur le nombre de sommets de  $A$ , la validité de l'équation ci-dessus, pour toute coupe  $A$ .

**Applications du théorème de conservation :**

Soit un processus de naissance et de mort; on suppose le régime permanent possible et atteint.

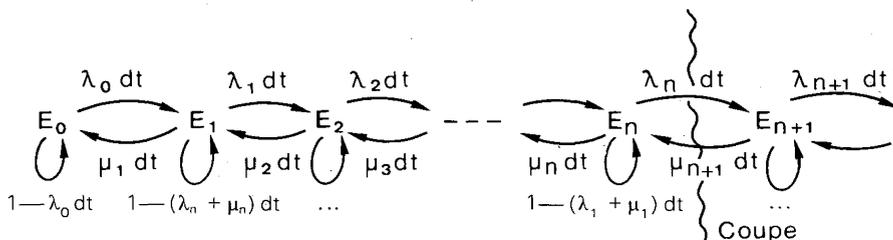


Figure 2.

Soit  $A = \{ E_0, E_1, \dots, E_n \}$ .

Ceci revient à prendre la coupe entre  $E_n$  et  $E_{n+1}$ ; le théorème nous indique que la fréquence des transitions de  $E_n$  vers  $E_{n+1}$  égale celle des transitions en sens inverse :

$$\lambda_n \cdot p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}$$

Équation de récurrence multiplicative qui permet de déduire le résultat classique :

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdot \dots \cdot \mu_1} p_0$$

N.B. La méthode différentielle usuelle revient à appliquer le théorème de conservation pour le seul sommet  $E_n$ ; on obtient :

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n$$

et la résolution est moins facile; à moins de remarquer que dans cette récurrence, on a un invariant:  $\lambda_n p_n - \mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n$ , qui est nul (à cause de  $E_0$ ). Cet invariant correspond précisément à la conservation des flux de transitions entre  $E_n$  et  $E_{n+1}$ .

**Addendum :** le système de transport PRT (Personnel Rapid Transit) est un système de transport de personnes constitué : d'un réseau de voies-guides en site propre (souvent en viaduc), de petites et nombreuses stations placées en dérivation des voies, de cabines contrôlées automatiquement (donc sans conducteur). Un passager qui arrive à une station affiche sa destination et il lui est attribué un véhicule vide qui part alors directement vers la station désirée, sans arrêt à des stations intermédiaires, suivant un itinéraire choisi par le système de contrôle; un groupe de passagers qui ont tous la même destination, peut emprunter la même cabine à concurrence de la capacité de la cabine.

## II. BLOCAGE DANS LES FILES D'ATTENTE

Il est courant de trouver des systèmes où le flot de sortie d'un ou plusieurs guichets constitue le flot d'entrée d'un autre processus d'attente: c'est le cas d'une chaîne de production où les stocks-tampons entre postes de travail successifs sont limités; attente des automobiles à la douane lors de contrôles multiples; correspondances dans le métro; réinsertion dans le flot principal d'une cabine d'un système P.R.T. venant d'une station en dérivation, etc...

Si le nombre de places d'attente pour la seconde file est limité, dans certains cas le premier guichet peut être bloqué: une unité qui a fini d'être servie doit y rester tant qu'elle n'a pas de place libre dans la seconde file.

Jusqu'à présent il a été montré [1, 3, 4] que: s'il n'existe pas de place d'attente devant le second guichet, le système ne s'engorge pas si  $\psi = \lambda/\mu < 2/3$  (au lieu de 1, pour une file unique  $M/M/1$ );  $\lambda$  est le taux d'arrivées et  $\mu$  le taux de service, et ceci pour chacun des deux guichets. S'il existe une place d'attente, la condition devient  $\psi < 3/4$ : les calculs sont longs.

On peut établir la condition générale pour que le système ne s'engorge pas, lorsque  $a$  places d'attente sont disponibles devant le second guichet en appliquant la méthode de conservation à des coupes du graphe judicieusement choisies, que donnent sans démonstration Hunt dans [1], et Saaty dans [4]. Voir aussi Pujolle [6].

### 1) Cas où aucune place n'est disponible devant le second guichet : $a = 0$

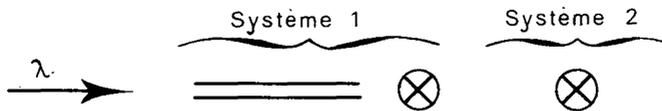


Figure 3.

Soit  $\lambda$  le taux des arrivées (à la Poisson) à l'entrée du premier système  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les taux de services (exponentiels) respectifs des guichets 1 et 2.

Les états possibles du système sont :

$E_{n,0}$  :  $n$  unités dans le système  $S1$ ; 0 unité dans  $S2$ .

$E_{n,1}$  :  $n$  unités dans  $S1$ ; 1 unité dans  $S2$ ,  $S1$  non bloqué.

$F_{n,1}$  :  $n$  unités dans  $S1$ , dont une est bloquée au guichet 1, ayant terminé son service; 1 unité dans  $S2$  (par commodité cet état sera noté  $E_{n-1,2}$  ci-dessous).

L'ensemble des deux systèmes  $S1$  et  $S2$  est régi par un processus de Markov.

Le graphe des transitions entre états, entre  $t$  et  $t + dt$  est le suivant : il a été allégé en écrivant  $\lambda$  et  $\mu$  au lieu de  $\lambda dt$  et  $\mu dt$  et en supprimant les boucles (qui peuvent être aisément rétablies). On peut d'ailleurs remarquer, que les boucles n'interviennent jamais (cf. I) dans la conservation des flux de transition.

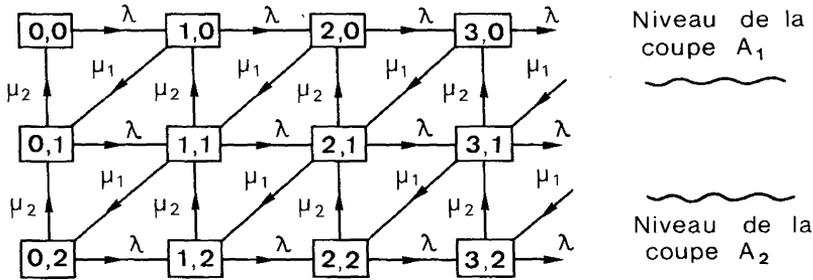


Figure 4.

Plaçons-nous en régime permanent. Soit la coupe définie par :

$$A_1 = \{ E_{00}, E_{10}, E_{20}, E_{30}, \dots \}.$$

L'égalité des flux de transition à travers cette coupe donne :

$$\mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,1} = \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,0}$$

Posons :

$$x_0 = Pr\{ n_2 = 0 \} \quad ; \quad x_1 = Pr\{ n_2 = 1 \text{ et } S1 \text{ non bloqué} \}$$

$$x_2 = Pr\{ n_2 = 1 \text{ et } S1 \text{ bloqué} \}$$

alors :

$$x_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,i} \quad (i = 0, 1, 2). \quad \text{D'où : } \mu_2 x_1 = \mu_1 (x_0 - p_{00}).$$

Soit la coupe définie par  $A_2 = \{ E_{02}, E_{12}, E_{22}, E_{32}, \dots \}$ . L'égalité des flux de transition à travers cette coupe donne :

$$\mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,2} = \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,1} \quad , \quad \text{soit : } \mu_2 x_2 = \mu_1 (x_1 - p_{01})$$

D'autre part la probabilité pour que le guichet 2 soit en train de servir une unité vaut :  $x_1 + x_2 = 1 - x_0$ . En régime permanent, le taux des entrées dans le système égale le taux de sorties du système; ce dernier est égal au taux de service du second guichet, multiplié par la probabilité que ce guichet fonctionne.

Soit :

$$\lambda = \mu_2(1 - x_0)$$

d'où :

$$x_0 = 1 - \lambda/\mu_2.$$

Ceci est l'énoncé de la conservation des unités [2].

En appliquant le théorème de conservation à l'état  $E_{00}$  seul, on obtient :

$$\lambda p_{00} = \mu_2 p_{01}.$$

Posons  $\alpha = \mu_1/\mu_2$  et  $\psi_2 = \lambda/\mu_2$ . En notant que, en outre :  $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ , on peut calculer  $p_{00}$  :

$$\begin{cases} x_0 = 1 - \psi_2 \\ x_1 = \alpha(x_0 - p_{00}) \\ x_2 = \alpha(x_1 - \psi_2 p_{00}) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_0 = 1 - \psi_2 \\ x_1 = \alpha(1 - \psi_2 - p_{00}) \\ x_2 = \alpha^2(1 - \psi_2 - p_{00}) - \alpha\psi_2 p_{00} \end{cases}$$

d'où :  $1 = (1 - \psi_2)(1 + \alpha + \alpha^2) - p_{00}(\alpha + \alpha^2) - \alpha\psi_2 p_{00}$ , soit :

$$p_{00} = \frac{(1 - \psi_2)(1 + \alpha + \alpha^2) - 1}{\alpha(1 + \alpha + \psi_2)}.$$

Le système ne s'engorgera pas si  $p_{00}$  est positif, c'est-à-dire : si

$\frac{\alpha + \alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2} > \psi_2$ , ce qui correspond à :  $\lambda_{\max} = \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2}$ . Comme  $\frac{\alpha + \alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2} < 1$ , cette condition est plus sévère que pour une seule file. En

particulier si  $\mu_1 = \mu_2$ , on trouve :  $\psi < 2/3$  : pour absorber un taux d'arrivée  $\lambda$  donné, il faut que le taux de service  $\mu$  de chaque guichet soit, au moins, une fois et demie plus grand que le taux  $\lambda$ ; cette organisation de files entraîne donc une perte d'efficacité notable pour le service.

2) Cas où  $a$  places sont disponibles devant le second guichet.

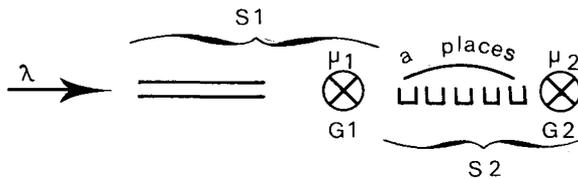


Figure 5.

Posons  $a = k - 2$ . S2 est complet lorsque  $a + 1$  unités y sont présentes.

Les états du système sont :

$E_{n,0}$  :  $n$  unités dans S1; 0 unités dans S2;

$E_{n,1}$  :  $n$  unités dans S1; 1 unité dans S2;

$E_{n,k-1}$  :  $n$  unités dans  $S1$ ,  $k - 1 = a + 1$  unités dans  $S2$  et  $S1$  non bloqué;  
 $F_{n,k-1}$  :  $n$  unités dans  $S1$ ,  $k - 1$  unités dans  $S2$  et  $S1$  bloqué: par commodité cet état sera noté  $E_{n-1,k}$ .

Le graphe des transitions, valué par les taux de transition est alors le suivant :

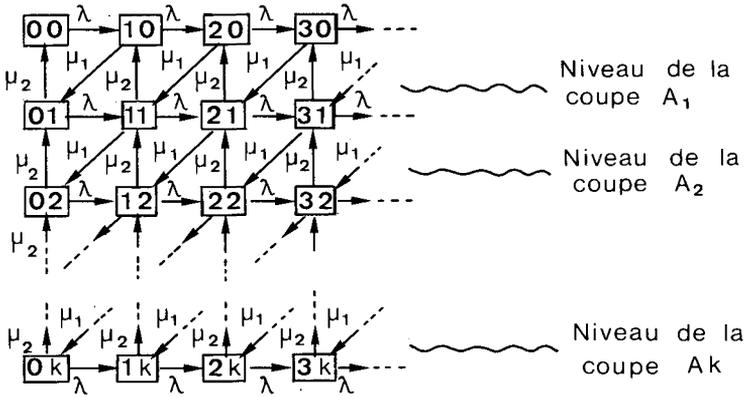


Figure 6.

les boucles ont été omises pour alléger le dessin, comme précédemment.

Soient les coupes :

$$A_1 = \{ E_{00}, E_{10}, E_{20}, E_{30}, \dots \} ; \quad A_2 = A_1 \cup \{ E_{01}, E_{11}, E_{21}, \dots \}$$

$$A_3 = A_2 \cup \{ E_{02}, E_{12}, E_{22}, \dots \}$$

et ainsi de suite jusqu'à :

$$A_k = A_{k-1} \cup \{ E_{0,k-1}, E_{1,k-1}, \dots \}.$$

En régime permanent les flux de transition traversant les coupes  $A_1, A_2, \dots, A_k$  s'équilibrent :

$$\begin{aligned} \mu_1(x_0 - p_{00}) &= \mu_2 x_1 && \text{(Coupe } A_1) \\ \mu_1(x_1 - p_{01}) &= \mu_2 x_2 && \text{(Coupe } A_2) \\ \dots & && \dots \\ \mu_1(x_{k-1} - p_{0,k-1}) &= \mu_2 x_k && \text{(Coupe } A_k) \end{aligned}$$

On a posé:

$$x_i = \sum_{n=0} p_{n,i} \quad (0 \leq i \leq k).$$

$x_i$  s'interprète comme la probabilité d'avoir  $i$  unités dans le système  $S2$ . Comme au II-1, la conservation des unités pour  $S2$  donne:  $x_0 = 1 - \lambda/\mu_2$ .

Posons  $\psi = \lambda/\mu_2$  et  $\alpha = \mu_1/\mu_2$  les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} x_0 = 1 - \psi \\ x_1 = \alpha(x_0 - p_{00}) \\ x_2 = \alpha(x_1 - p_{01}) \\ \dots \\ x_k = \alpha(x_{k-1} - p_{0,k-1}) \end{cases}$$

Ce système d'équations donne par substitutions successives :

$$\begin{cases} x_0 = 1 - \psi \\ x_1 = \alpha(1 - \psi - p_{00}) \\ x_2 = \alpha^2(1 - \psi) - \alpha^2 p_{00} - \alpha p_{01} \\ x_3 = \alpha^3(1 - \psi) - \alpha^3 p_{00} - \alpha^2 p_{01} - \alpha p_{02} \\ \dots \\ x_k = \alpha^k(1 - \psi) - \sum_{i=0}^k \alpha^{k-i} p_{0i} \end{cases}$$

En remarquant que :  $x_0 + x_1 + \dots + x_k = 1$ , la somme membre à membre de toutes ces équations donne :

$$1 = (1 - \psi)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k) - P$$

où  $P$  est un terme positif, car combinaison linéaire à coefficients positifs de probabilités. D'où la condition pour que le système ne s'engorge pas :

$$1 \leq (1 - \psi) \frac{\alpha^{k+1} - 1}{\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha \neq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq (k+1)(1 - \psi) \quad \text{si } \alpha = 1;$$

ceci revient à dire, que lorsqu'on tend vers la saturation, les états  $E_{00}, E_{01}, \dots, E_{0k}$  (pour lesquels aucune unité n'est présente au guichet 1) ont une probabilité qui tend vers 0. Il est intuitivement vrai, qu'au voisinage de la saturation, le premier guichet est presque toujours occupé.

Pour  $\mu_1 \neq \mu_2$ , on trouve un taux maximal d'arrivées :

$$\lambda_{\max} = \mu_1 \mu_2 \cdot \frac{\mu_1^{a+2} - \mu_2^{a+2}}{\mu_1^{a+3} - \mu_2^{a+3}}$$

Quand les deux guichets ont le même taux de service ( $\mu_1 = \mu_2$  soit  $\alpha = 1$ ) la condition est :  $\frac{\lambda}{\mu} = \psi < \frac{k}{k+1}$ , soit puisque le nombre de places d'attente devant le second guichet est limité à  $k - 2 = a$  places :

$$\boxed{\frac{a+2}{a+3} > \frac{\lambda}{\mu}}$$

Pour tout  $a$ , cette condition est plus sévère que  $\psi < 1$ . Remarquons que  $a = 0$  redonne :  $\psi < \frac{2}{3}$ , résultat établi au II-1. Pour  $a = 1$ , on doit avoir :  $\psi < \frac{3}{4}$ . Lorsque  $a$  tend vers l'infini, le blocage disparaît et on retrouve la condition habituelle :  $\psi < 1$ .

En pratique, dès que  $a$  est de l'ordre de quelques unités, le rapport  $\frac{a + 2}{a + 3}$  devient voisin de 1 et les inconvénients du blocage deviennent minimes : c'est l'intuition qu'ont eue certains concepteurs de systèmes informatiques, en installant quelques tampons (buffers) devant chaque processeur, lorsque ces derniers sont disposés en série.

3) **Méthode modifiée**

La méthode des coupes employée au II-1 et II-2 permet, outre de trouver le seuil de saturation du système, des calculs de probabilités d'états en régime permanent.

Nous présentons ci-dessous une simplification de cette méthode en se plaçant au voisinage de la saturation, mais qui vise uniquement à déterminer le seuil de saturation.

a) **Cas de deux files en série, avec  $a$  places d'attente devant le second guichet** (même cas qu'au paragraphe 2)

Au voisinage de la saturation, il y a, presque sûrement, plusieurs unités dans  $S_1$ . Alors les états  $E_{00}, E_{01}, E_{02}, \dots, E_{0a}, E_{0,a+1}$  du paragraphe précédent, ont une probabilité négligeable et peuvent être ignorés.

Désignons par  $\mathcal{E}_{1,i}$ , avec  $0 \leq i \leq a + 1$ , l'état pour lequel il y a au moins une unité dans  $S_1$  (dont le service au guichet est en cours, c'est-à-dire sans blocage) et  $i$  unités dans  $S_2$ ; et par  $\mathcal{E}_{b,a+1}$  l'état pour lequel le système 2 est complet et cause le blocage du système 1. Ceci revient à créer un seul état par ligne de la figure 6.

Le graphe des transitions entre états valué par les taux de transitions devient :

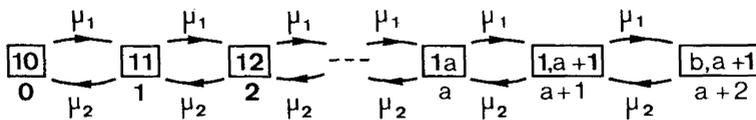


Figure 7.

Cherchons les probabilités des états en régime permanent. (On a renuméroté les états par commodité de 0 à  $a + 2$ .)

Plaçons-nous en régime permanent. Prenons des coupes entre les états 0 et 1, puis 1 et 2, etc... jusque  $a + 1$  et  $a + 2$  :

$$\mu_1 q_0 = \mu_2 q_1; \quad \mu_1 q_1 = \mu_2 q_2; \quad \dots; \quad \mu_1 q_{a+1} = \mu_2 q_{a+2}.$$

D'où :  $q_k = q_0 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^k$  avec  $0 \leq k \leq a + 2$ . En exprimant que  $\sum_{k=0}^{a+2} q_k = 1$ ,

il vient :

$$q_0 \sum_{k=0}^{a+2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^k = 1$$

si  $\mu_1 \neq \mu_2$ , le  $\Sigma$  est la somme d'une progression géométrique de raison  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  et

$$\text{vaut : } \frac{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+3}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}; \text{ d'où : } q_0 = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+3}} \text{ si } \mu_1 \neq \mu_2 \text{ et } q_0 = \frac{1}{a+3}$$

sinon. Appliquons le principe de conservation des unités [2], au premier système ( $S_1$ ): le taux des arrivées dans  $S_1$  vaut  $\lambda$ ; en régime permanent il est égal au taux des sorties : soit le taux de service  $\mu_1$  du premier guichet multiplié par la probabilité  $\pi$  que ce guichet fonctionne effectivement :

$$\begin{aligned} \pi &= p_{10} + p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1,a+1} = q_0 \sum_{k=0}^{a+1} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^k \\ &= q_0 \frac{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+2}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+2}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+3}} \text{ si } \mu_1 \neq \mu_2. \end{aligned}$$

Le taux maximal d'arrivées  $\lambda_{\max}$  est tel que :

$$\lambda_{\max} = \mu_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+2}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{a+3}} = \mu_1 \mu_2 \frac{\mu_2^{a+2} - \mu_1^{a+2}}{\mu_2^{a+3} - \mu_1^{a+3}} \quad (\mu_1 \neq \mu_2)$$

et, pour  $\mu_1 = \mu_2$  :

$$q_0 \sum_{k=0}^{a+1} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^k = q_0(a+2) = \frac{a+2}{a+3}, \text{ d'où : } \lambda_{\max} = \mu \cdot \frac{a+2}{a+3}.$$

b) Cas de trois files en série, avec aucune place d'attente devant les second et troisième guichets

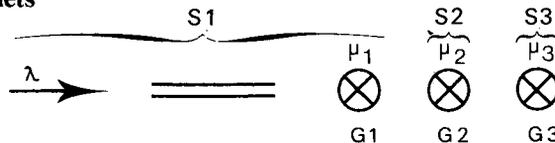


Figure 8.

Au voisinage de la saturation, il y a seulement 8 états de probabilité non négligeable parmi les 13 états possibles :

$$e_{100}, e_{110}, e_{010}, e_{101}, e_{111}, e_{b11}, e_{1b1} \text{ et } e_{bb1}.$$

(Les états de probabilité négligeable sont :  $e_{000}, e_{010}, e_{001}, e_{011}$  et  $e_{0b1}$ .)

L'indice 1 (respectivement *b*) en première position indique qu'il y a plusieurs unités dans *S1* et que celle qui est au guichet se fait effectivement servir (resp. y est bloquée). L'indice 1 en seconde (resp. troisième) position indique qu'une unité *exactement* est dans *S2* (resp. *S3*) et que son service est en cours. L'indice 0 en seconde (resp. troisième position) indique que le système *S2* (resp. *S3*) est vide. Enfin l'indice *b* en seconde position, indique qu'il y a une seule unité dans *S2*, mais qu'elle est bloquée en *G2*. Voici le graphe des transitions dans ce cas (les arrivées de taux  $\lambda$  n'apparaissent pas, puisque on suppose plusieurs unités présentées en permanence dans *S1*) :

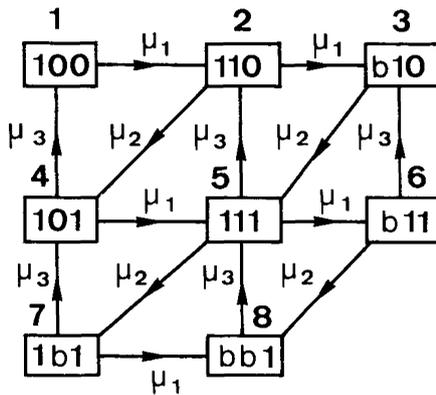


Figure 9.

Écrivons la conservation du flux de transition en chaque sommet (renuméroté de 1 à 8) :

$$\begin{aligned} \mu_1 q_1 &= \mu_3 q_4 & (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) q_5 &= \mu_2 q_3 + \mu_1 q_4 + \mu_3 q_8 \\ (\mu_1 + \mu_2) q_2 &= \mu_1 q_1 + \mu_3 q_5 & (\mu_2 + \mu_3) q_6 &= \mu_1 q_5 \\ \mu_2 q_3 &= \mu_1 q_2 + \mu_3 q_6 & (\mu_1 + \mu_3) q_7 &= \mu_2 q_5 \\ (\mu_1 + \mu_3) q_4 &= \mu_2 q_2 + \mu_3 q_7 & \mu_3 q_8 &= \mu_2 q_6 + \mu_1 q_7 \end{aligned}$$

Si l'on suppose que les trois guichets ont le même taux de service  $\mu$ , le système ci-dessus se résout aisément (en n'oubliant pas que  $q_1 + q_2 + \dots + q_8 = 1$ ).

On trouve :

$$q_1 = \frac{4}{39}; q_2 = \frac{5}{39}; q_3 = \frac{8}{39}; q_4 = \frac{4}{39}; q_5 = q_8 = \frac{6}{39}; q_6 = q_7 = \frac{3}{39}.$$

En écrivant la conservation des unités pour l'un des guichets, G2 par exemple, on trouve :

$$\lambda_{\max} = \mu \cdot (p_{110} + p_{b10} + p_{111} + p_{b11}) = \mu(q_2 + q_3 + q_5 + q_6)$$

en effet  $q_2 + q_3 + q_5 + q_6$  représente la probabilité pour le guichet G2 soit effectivement en service (c'est-à-dire ni vide, ni bloqué). D'où, la condition pour que le système ne s'engorge pas :

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{22}{39}$$

On trouve évidemment le même seuil en écrivant la conservation des unités au guichet G1 ou G3 : la probabilité que le guichet 1 fonctionne effectivement est :  $q_1 + q_2 + q_4 + q_5 + q_7 = \frac{22}{39}$  ; pour G3 :  $q_4 + q_5 + \dots + q_8 = \frac{22}{39}$ . Ce résultat est donné presque sans démonstration dans [1] ; il est établi par une voie différente dans [6].

Il est intéressant de noter, qu'à la saturation, la probabilité pour qu'un guichet fonctionne effectivement est la même pour les trois guichets.

c) **Cas de quatre files en série, avec aucune place d'attente devant les second, troisième et quatrième guichets**

Il s'agit d'une extension du cas précédent.

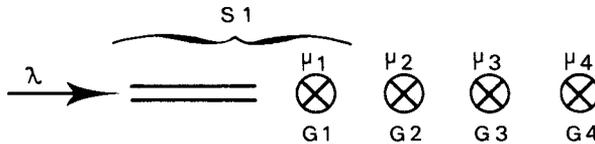


Figure 10.

Parmi les 34 états possibles pour ce système, 21 seulement ont une probabilité non négligeable au voisinage de la saturation. Les indices les décrivant, ont la même interprétation que ci-dessus :

1000, 1100, b100, 1010, 1001, 1110, b110, 1b10, bb10, 1101, b101, 1011, 10b1, 1111, b111, 1b11, 11b1, bb11, b1b1, 1bb1, bbb1.

Remarquons que si  $\mu_4$  tend vers l'infini alors il n'y aura jamais d'unité en G4 : ce qui revient à supprimer G4. Il reste alors les huit états considérés au b) pour trois guichets en série :

1000, 1100, b100, 1010, 1110, b110, 1b10, bb10.

La matrice des transitions (valuées par leur taux), est donnée de préférence au graphe dont le tracé serait chargé, dans la figure 11 :

	1000	b100	1001	b110	bb10	b101	10b1	b111	11b1	b1b1	bb11	1bb1	bbb1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1000	1	$\mu_1$																			
1100	2		$\mu_1$	$\mu_2$																	
b100	3				$\mu_2$																
1010	4			$\mu_3$	$\mu_1$																
1001	5	$\mu_4$								$\mu_1$											
1110	6					$\mu_1$	$\mu_2$		$\mu_3$												
b110	7							$\mu_2$		$\mu_3$											
1b10	8							$\mu_1$			$\mu_3$										
bb10	9												$\mu_3$								
1101	10		$\mu_4$							$\mu_1$	$\mu_2$										
b101	11			$\mu_4$									$\mu_2$								
1011	12				$\mu_4$							$\mu_3$	$\mu_1$								
10b1	13					$\mu_4$											$\mu_1$				
1111	14						$\mu_4$							$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$					
b111	15							$\mu_4$										$\mu_2$	$\mu_3$		
1b11	16								$\mu_4$										$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
11b1	17									$\mu_4$										$\mu_1$	$\mu_2$
bb11	18										$\mu_4$										$\mu_3$
b1b1	19											$\mu_4$									$\mu_2$
1bb1	20												$\mu_4$								$\mu_1$
bbb1	21													$\mu_4$							

Figure 11.

Soient  $q_1, q_2, \dots, q_{21}$  les probabilités des états en régime permanent. Écrivons la conservation du flux des transitions pour chaque état, en faisant d'emblée :  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$  :

$$\begin{array}{lll}
 q_1 = q_5 & 2q_8 = q_6 + q_{16} & 3q_{15} = q_{14} \\
 2q_2 = q_1 + q_{10} & q_9 = q_7 + q_8 + q_{18} & 3q_{16} = q_{14} \\
 q_3 = q_2 + q_{11} & 3q_{10} = q_5 + q_6 + q_{17} & 3q_{17} = q_{13} + q_{14} \\
 2q_4 = q_2 + q_{12} & 2q_{11} = q_7 + q_{10} + q_{19} & 2q_{18} = q_{15} + q_{16} \\
 2q_5 = q_4 + q_{13} & 3q_{12} = q_8 + q_{10} + q_{20} & 2q_{19} = q_{15} + q_{17} \\
 3q_6 = q_3 + q_4 + q_{14} & 2q_{13} = q_{12} & 2q_{20} = q_{16} + q_{17} \\
 2q_7 = q_6 + q_{15} & 4q_{14} = q_9 + q_{11} + q_{12} + q_{21} & q_{21} = q_{18} + q_{19} + q_{20}
 \end{array}$$

On sait a priori que le rang de ce système est 20, mais on ignore la relation de dépendance entre ces équations, qui n'apparaît pas directement.

Une des équations (mais laquelle?) doit être remplacée par:  $\sum_{i=1}^{21} q_i = 1$ .

Pour le résoudre on substitue, dans un premier temps :

$$q_5 \rightarrow q_1, \quad q_8 \rightarrow q_7, \quad q_{16} \rightarrow q_{15}, \quad q_{18} \rightarrow q_{15}, \quad q_{14} \rightarrow 3q_{15}, \\ q_{12} \rightarrow 2q_{13}, \quad q_{20} \rightarrow q_{19}.$$

Restent 14 équations, qui deviennent 10, en faisant les substitutions :

$$q_3 \rightarrow q_2 + 3q_{13}, \quad q_9 \rightarrow 2q_7 + q_{15}, \quad q_{11} \rightarrow 3q_{13}, \quad q_{21} \rightarrow q_{15} + 2q_{19}$$

Dans un troisième temps, le système se réduit à 6 équations avec les substitutions :

$$q_4 \rightarrow 2q_1 - q_{13}, \quad q_6 \rightarrow 2q_7 - q_{15}, \quad q_{10} \rightarrow 2q_2 - q_1, \quad q_{17} \rightarrow 2q_{19} - q_{15}.$$

Enfin on fait successivement :

$$q_{13} \rightarrow 6q_{19} - 6q_{15} \quad \text{et} \quad q_2 \rightarrow 4q_1 + 24q_{15} - 24q_{19} \\ \text{puis} \quad q_1 \rightarrow q_7 - 3q_{15} + 2q_{19} \quad \text{et enfin} \quad q_7 \rightarrow 20q_{15} - 16q_{19},$$

pour aboutir à deux équations, toutes deux proportionnelles à :

$$223q_{15} = 197q_{19}.$$

Il est alors aisé d'exprimer tous les  $q_i$  en fonction de  $q_{15}$ , dont la valeur sera donnée par l'équation de normalisation  $\sum_{i=1}^{21} q_i = 1$ . Voici la solution, en posant  $d = 7\,817$  :

$$q_1 = q_5 = 227/d \quad q_2 = 284/d \quad q_3 = 752/d \quad q_4 = 298/d \\ q_6 = 547/d \quad q_7 = q_8 = 372/d \quad q_9 = 941/d \quad q_{10} = 341/d \\ q_{11} = 468/d \quad q_{12} = 312/d \quad q_{13} = 156/d \quad q_{14} = 591/d \\ q_{15} = q_{16} = q_{18} = 197/d \quad q_{17} = 249/d \quad q_{19} = q_{20} = 223/d \quad q_{21} = 643/d$$

En écrivant la conservation des unités pour l'un des 4 guichets,  $G_4$  par exemple, on obtient :  $\lambda_{\max} = \mu \left( q_5 + \sum_{i=10}^{21} q_i \right)$ . En effet, le terme :  $q_5 + \sum_{i=10}^{21} q_i$  représente la probabilité pour que  $G_4$  soit effectivement en service. D'où, la condition pour que le système ne s'engorge pas :

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{4\,024}{7\,817} = 0,5147754$$

Hunt dans [1] donne 0,5115 (il s'agit sans doute d'une légère erreur numérique). Pujolle dans [6] confirme notre valeur avec 0,515.

*N.B.* : Pour étudier la fiabilité de systèmes d'équipements (ou composants) on peut souvent adopter une formulation markovienne [7]; pour les systèmes réparables, les graphes de transition relatifs à la **disponibilité** sont fortement connexes (contrairement à ceux relatifs à la fiabilité qui comportent un ou plusieurs états absorbants) : on peut donc leur appliquer la méthode des coupes.

Je remercie MM. Billionnet et Krakowski de leurs très utiles remarques.

## BIBLIOGRAPHIE

1. G. C. HUNT, *Sequential Arrays of Waiting Lines*, Operations Research, december 1956, p. 674-683.
2. M. KRAKOWSKI, *Conservation Methods in Queuing Theory*, R.A.I.R.O., série verte, vol. 1, mars 1973, p. 63-84.
3. A. KAUFMANN, R. CRUON, *Les phénomènes d'attente*, Dunod, Paris 1962.
4. P. MORSE, *Queues, Inventories and Maintenance*, Wiley 1958, traduit en français : *Files d'attente, Stocks et entretien*, Dunod 1960 (en particulier p. 34-38).
5. T. L. SAATY, *Elements of Queuing Theory*, McGraw-Hill 1961.  
Entre le dépôt et la publication de cet article est paru :
6. G. PUJOLLE, *Files d'attente en série et application au taux de charge maximale d'un réseau d'ordinateurs*, R.A.I.R.O., série bleue, supplément au volume 10, n° 5, mai 1976.  
L'auteur y établit, de manière différente, des résultats obtenus ici, et donne une importante bibliographie.
7. M. CORAZZA, *Techniques mathématiques de la fiabilité prévisionnelle*, Cepadues (Sup'Aero), Toulouse 1975.