RAIRO. Recherche opérationnelle

J. J. Maugis

Étude de réseaux de transport et de distribution de fluide

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 11, nº 2 (1977), p. 243-248

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1977__11_2_243_0>

R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle/Operations Research
(vol. 11, n° 2, mai 1977, p. 243 à 248)

ÉTUDE DE RÉSEAUX DE TRANSPORT ET DE DISTRIBUTION DE FLUIDE

par M. J. J. MAUGIS (1)

Résumé. — *L'objet de la première partie de cet article est de rappeler les hypothèses du problème classique du calcul des pressions sur un réseau de fluide, puis, de montrer que, lorsqu'elle existe, la solution de ce problème est unique. Un procédé de détermination des conséquences de faibles variations apportées aux hypothèses d'un calcul de pressions est présenté dans la deuxième partie : ce procédé permet de mesurer rapidement l'incidence de modifications apportées aux diamètres des conduites ou aux consommations. Une troisième partie est consacrée à la présentation d'une technique de minimisation des coûts d'équipements pour la construction d'un nouveau réseau ou le renforcement d'un réseau existant.*

INTRODUCTION

Pour étudier ses réseaux de transport et de distribution, le Gaz de France a été conduit à élaborer puis à mettre en œuvre sur ordinateur des techniques de calcul appropriées. Les programmes correspondants, dont certains ont été mis au point il y a plus de quinze ans, ont contribué à la majorité des travaux entrepris pour l'étude du transport et de la distribution du gaz en France; ils ont été également employés, à la demande de pays étrangers, pour faciliter la conception de nouveaux réseaux. Ce large champ d'utilisation et le degré de généralité des techniques, applicables pour l'essentiel à n'importe quel fluide liquide ou gazeux, ont conduit à présenter les résultats les plus importants. Au lieu d'en fournir une démonstration détaillée nous avons préféré renvoyer le lecteur aux trois premières notes indiquées en bibliographie et disponible sur demande (2). En pratique les programmes de calcul de réseaux servent à traiter chaque année 25 à 30% de l'ensemble des réseaux de distribution placés sous la responsabilité du Gaz de France, ce qui correspond à environ 25 000 km de conduits en zone urbaine.

---

(1) Chef du Service d'Informatique et de Mathématiques Appliquées à la Direction des Études et Techniques Nouvelles du Gaz de France.

(2) Gaz de France — Direction des Études et Techniques Nouvelles. Service Documentation et Brevets, 361, av. du Président Wilson, 93, La Plaine-Saint-Denis.

1. HYPOTHÈSES D'UN CALCUL DE PRESSIONS SUR UN RÉSEAU DE FLUIDE ; UNICITÉ DE LA SOLUTION

Les pressions et les débits associés à un réseau de fluide dépendent des consommations dont il est le siège, de ses conditions d'alimentation et des coefficients de résistance à l'écoulement de ses conduites.

La mise en œuvre du calcul des pressions et des débits suppose que soient définis les points du réseau susceptibles d'introduire une discontinuité ; ces points sont appelés les nœuds du réseau. On distingue le plus souvent :

— les nœuds à pression imposée qui peuvent être soit des sources, soit des points de consommation.

— les nœuds à débit imposé qui peuvent correspondre également soit à des sources, soit à des points de consommation ;

— les nœuds de changement de diamètre correspondant à une modification de la résistance à l'écoulement ;

— les nœuds d'intersection de plusieurs conduites.

On affecte un débit nul aux nœuds de changement de diamètre ou d'intersection de conduites, s'ils ne sont le siège d'aucune injection ou d'aucun soutirage.

Les relations entre les pressions et les débits interviennent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \omega(i)} Q_{ij} = C_i && i \in A' \\ &H_j - H_i = V_{ij} = R_{ij} \, |Q_{ij}|^{\alpha - 1} Q_{ij} && ij \in B \end{aligned} \tag{2}$$

Les notations sont explicitées ci-dessous.

A' : ensemble des nœuds à débit imposé ;

B : ensemble des tronçons du réseau ;

ij : indices courants désignant des nœuds quelconques ;

C_i : débit fixé par hypothèse au nœud i, ce débit est compté positivement si le nœud i est un point de consommation et négativement s'il s'agit d'un point d'injection ;

Q_{ij} : débit du tronçon (i, j), compte positivement si l'écoulement s'effectue de j vers i et négativement dans le cas contraire ;

$\omega(i)$: ensemble des nœuds directement reliés au nœud i ;

H_i : pression au nœud i ;

α : exposant très voisin de 2, dans ce qui suit on pose $= 2$;

R_{ij} : coefficient de résistance à l'écoulement du tronçon (i, j), donné par la formule,

$$R_{ij} = R_{ji} = k \frac{l_{ij}}{D_{ij}^{\beta}}$$

où l_{ij} et D_{ij} représentent la longueur et le diamètre du tronçon, où k est fonction de la densité du fluide et de la rugosité interne du tuyau et où β est un exposant proche de 5,

V_{ij} perte de charge du tronçon (i, j) c'est-à-dire différence des pressions aux extrémités

Les relations du type (1) sont appelées relations de conservation, celles du type (2) sont appelées relations de perte de charge Il y a N' relations de conservation si N' représente le nombre de nœuds à débit imposé et $2T$ relations de perte de charge si T désigne le nombre de tronçons L'ensemble des $(2T + N')$ relations (1) et (2) permet de calculer l'ensemble des $(2T + N')$ inconnues

– N' valeurs de pression aux nœuds à débit fixé,

– T valeurs de débit Q_{ij} (en toute rigueur, il faudrait distinguer deux valeurs de débit Q_{ij} et Q_{ji} par tronçon ij, mais la simplicité de la relation $Q_{ij} = - Q_{ji}$ évite d'expliciter cette distinction),

– T valeurs de perte de charge V_{ij} (ici encore on posera $V_{ji} = - V_{ij}$)

Enfin, connaissant les T valeurs de débit, il est possible de calculer les valeurs des injections et des soutirages aux N'' nœuds où la pression est fixée par hypothèse Il suffit pour cela d'écrire les N'' relations de conservation correspondantes Soit A'' l'ensemble des nœuds à pression imposée

On démontre (voir bibliographie 3), les résultats ci-dessous

– La solution du système d'équations constitué par les relations (1) et (2) correspond au minimum de la fonction f des débits donnée par

$$f = \sum_{i,j \in B} \frac{R_{ij}}{3} |Q_{ij}| Q_{ij}^2 + \sum_{i \in A} H_i \left(\sum_{j \in \omega(i)} Q_{ij} \right),$$

à l'intérieur du domaine D défini par les relations de conservation de type (1) L'unicité de la solution du système de relations (1) et (2) est assurée car la fonction f est strictement convexe et le domaine D est défini par des relations linéaires

La solution du système d'équations constitué par les relations (1) et (2) correspond au maximum de la fonction g des pertes de charge donnée par

$$g = - \sum_{i,j \in B} \frac{2}{3\sqrt{R_{ij}}} |V_{ij}|^{\frac{3}{2}} - \sum_{i \in A} C_i \left(H_s - \sum_{k,P \in r_i} V_{k,P} \right)$$

(où r_i représente une chaîne de tronçons reliant le nœud i à un nœud d'indice s à pression fixée H_s), à l'intérieur du domaine défini par des contraintes linéaires portant sur les V_{ij} et garantissant l'unicité de la pression en chaque nœud

— A l'optimum, la relation :

$$f = g$$

traduit le principe de conservation de l'énergie mécanique sur le réseau considéré. Cet ensemble de résultats correspond aux théorèmes d'existence et d'unicité établis pour les flots et les tensions associés à un graphe (voir bibliographie 4). Dans le cas particulier d'un réseau de fluide il est intéressant de mettre en évidence le rôle particulier joué par les pressions (voir bibliographie 3).

En pratique, les réseaux urbains sur lesquels on effectue des calculs de pression sont de taille très variable : de quelques dizaines de nœuds à quelques milliers de nœuds selon l'importance de l'agglomération correspondante. La détermination des pressions débouche donc sur la résolution de systèmes d'équation non linéaires dont le nombre d'inconnues va de quelques dizaines à quelques milliers. Ces inconnues sont les pressions aux nœuds à débit imposé (ensemble A') et les débits des tronçons (ensemble B); compte tenu du degré de maillage choisi, le nombre de tronçons est d'environ 30 % supérieur à celui du nombre total de nœuds. Le processus de calcul est itératif et le temps d'exécution dépend de la qualité de la solution initiale choisie. Pour fixer les idées nous donnons ci-dessous quelques ordres de grandeur de temps d'unité centrale IBM 370-145 qui sont nécessaires :

— de 1 à 8 secondes pour des réseaux d'une centaine de nœuds à pression inconnue ;

— de 8 à 50 secondes pour des réseaux de 500 nœuds ;

— de 60 à 400 secondes pour des réseaux de 1 200 nœuds.

2. CONSÉQUENCES DE VARIATIONS FAIBLES DES HYPOTHÈSES

On considère la solution S_0 d'un problème de calcul de pertes de charge associé à un réseau quelconque. On cherche au voisinage de S_0 les conséquences d'une variation de l'une des hypothèses retenues pour le calcul de S_0, par exemple la consommation en un nœud ou la résistance à l'écoulement de l'un des tronçons. Soit x un paramètre représentatif de l'amplitude de cette variation et soit S la solution associée à cette variation.

— S_0 est caractérisé par :

- un vecteur $H_{(0)}$ à N composantes $H_{i(0)}$ avec $i \in A$,
- un vecteur $C_{(0)}$ à N' composantes $C_{i(0)}$ avec $i \in A'$,
- un vecteur $Q_{(0)}$ à T composantes $Q_{ij(0)}$ non nulles avec $(i, j) \in B$,
- un vecteur $R_{(0)}$ à T composantes $R_{ij(0)}$ avec $(i, j) \in B$;

– S est caractérisée par :
  – un vecteur H à N composantes H_i avec $i \in A$,
  – un vecteur C à N' composantes C_i avec $i \in A'$,
  – un vecteur Q à T composantes Q_{ij} avec $(i, j) \in B$,
  – un vecteur R à T composantes R_{ij} avec $(i, j) \in B$.

Le principe de la méthode des approximations successives est :

– de poser

$$H = H_{(0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n H_{(n)} \tag{3}$$

$$Q = Q_{(0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q_{(n)}$$

– de montrer que si $(H_{n-1}), Q_{(n-1)})$est calculable, alors le couple $(H_{(n)}, Q_{(n)})$ l'est également, quel que soit n. Le principe de ces calculs consiste à reporter les expressions de H et Q données par (3) et (4) dans les relations de pertes de charges et de conservation, puis, à procéder à une identification terme à terme des séries entières obtenues.

On montre (voir bibliographie 3) que l'application de la méthode des approximations successives fournit un procédé de détermination rapide des conséquences de faibles variations apportées aux hypothèses d'un calcul de pressions. Les conditions du calcul du rayon de convergence des séries entières en x obtenues, sont exposées. Ce calcul s'appuie sur des techniques développées dans le domaine de la théorie des houles (voir bibliographie 5).

3. MINIMISATION DES COÛTS D'ÉQUIPEMENT

Le tracé d'un réseau étant fixé et les consommations étant connues en tous les nœuds on cherche à minimiser le coût d'établissement S du réseau donné par la formule :

$$S = \sum_{i,j \in B} l_{ij} D_{ij}^{\gamma}$$

où γ est un exposant qui dépend des variations de coût des tuyaux en fonction des variations des diamètres. La minimisation de S est assujettie aux contraintes suivantes :

– la pression en tout nœud doit être supérieure à un minimum fixé,

– les débits sont fixés a priori et vérifient les relations de conservation en chaque nœud.

La minimisation de S sous les contraintes définies ci-dessus conduit à des valeurs de diamètres qui ne sont pas nécessairement identiques aux valeurs disponibles dans le commerce.

La mise en œuvre de techniques de séparation et d'évaluation progressive permet de se ramener à des valeurs commerciales. L'étude du réseau de répartition de gaz de Téhéran (voir bibliographie 1 et 2) a nécessité environ 20 minutes d'unité centrale d'IBM 370-145 pour un réseau d'une centaine de nœuds.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Utilisation de l'ordinateur pour l'étude des réseaux de distribution de gaz*, Réf. : M. SIMA 3541 JJM/GTB PB PB/.
2. *Emploi de l'ordinateur pour l'étude des réseaux de distribution*, MM. BERENGUIER, MAUGIS, M^{me} MAUGIS, ATG Congrès, 1973.
3. *Propriétés caractéristiques des réseaux de fluides, applications*, Réf. : M. SIMA 5853 JJM.
4. C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI, *Programmes, jeux et réseaux de transport*, Dunod, 1962.
5. René GOUYON, *Contribution à la théorie des houles*, Privat, 1960.