

C. R. DUGUAY

A. HAURIE

**Étude analytique du flux des patients dans une unité
de soins à l'aide d'un modèle markovien**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 10, n° V3 (1976), p. 7-25

http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_3_7_0

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE ANALYTIQUE DU FLUX DES PATIENTS DANS UNE UNITÉ DE SOINS A L'AIDE D'UN MODÈLE MARKOVIAN (*)

par C. R. DUGUAY et A. HAURIE (1)

Résumé. — Trois structures d'information pour la prise de décision d'admission dans une unité de soins sont définies à partir de la connaissance des arrivées et des départs de la période. On montre qu'une politique d'admission utilisant un niveau de réapprovisionnement fixe est optimale quand on connaît le nombre de départs de la période mais pas dans le cas contraire. La valeur de l'information fournie par les précisions des départs et par le système de la zone tampon est quantifiée en fonction du taux moyen d'occupation de l'unité, de la variabilité de celui-ci et du risque de devoir admettre un patient urgent dans des conditions anormales.

1. INTRODUCTION

Cette étude a pour but d'étudier le système d'admission des patients hospitalisés en analysant trois structures d'information différentes.

Nous considérons une unité de soins où sont admis des patients urgents et des patients électifs. L'admission immédiate d'un patient urgent est une nécessité; ainsi, s'il n'y a pas de lit disponible, on devra encourir un coût social élevé. L'admission d'un patient électif peut être différée jusqu'au moment qui semble le plus opportun au preneur de décision, c'est-à-dire le bureau d'admission.

Nous envisageons trois structures d'information différentes : la première correspond au cas où seule l'occupation de l'unité est connue du bureau d'admission qui ne dispose d'aucune indication sur les départs de la journée et les arrivées de la journée; la seconde correspond au cas où les médecins avertissent un jour à l'avance le bureau d'admission d'un congé; la troisième structure correspond au cas où les arrivés d'urgences sont connues, ce qui est possible quand l'hôpital dispose d'une « zone tampon » où sont admis pendant 24 heures les urgents arrivant à l'hôpital (de ce fait l'unité de soins considérée connaîtra un jour à l'avance ses arrivées d'urgence).

Pour comparer ces trois structures d'information nous modéliserons le système d'admission comme un système stochastique décrit par une chaîne de Markov commandée. Cette modélisation suit la voie indiquée par P. Kolesar [1] et F. L. Offensend [2].

(*) Reçu juin 1975.

(1) École des Hautes Études commerciales.

Outre la quantification de la valeur de l'information fournie par les prévisions des congés ou par le système de zone tampon, cette étude montre que, dans les derniers cas une politique d'admission utilisant un niveau de réapprovisionnement fixe, de type (S, S) suivant la terminologie des modèles de stock est adaptée. Par contre, dans le cas où le bureau d'admission ne connaît que le nombre de patients actuellement présents, le niveau de réapprovisionnement devrait ne pas rester constant lorsque l'occupation de l'unité augmente.

En section 2 le modèle markovien est présenté. En section 3, la détermination de politiques d'admission optimales est considérée. En section 4 une analyse numérique, portant sur le cas d'une unité de 50 lits permet d'illustrer les avantages des différentes structures et la forme des stratégies d'admission.

2. LES HYPOTHÈSES DU MODÈLE MARKOVIEN

2.1. Variables d'état et variables de décision

Nous considérons une unité de soins dont l'état au jour t est décrit par le triplet (x_t, d_t, u_t) , où :

x_t = nombre de patients présents dans l'unité au début de la journée;
 d_t = nombre de patients quittant l'unité dans le courant de la journée;
 u_t = nombre de patients urgents arrivant à l'unité dans le courant de la journée.

Nous considérons une variable d'action au jour t , a_t , où :

a_t = nombre de patients électifs admis dans l'unité le jour t .

Les aléas affectant le système sont, d'une part, les arrivées de patients urgents, d'autre part les départs (congs, transferts ou décès) des patients traités.

2.2. Hypothèse sur les lois d'arrivée

Nous supposons que le nombre u_t de patients urgents se présentant à l'unité de soins le jour t est une variable aléatoire indépendante du jour particulier t et de la variable d'état x_t .

Cette hypothèse est évidemment une simplification de la réalité en particulier en ce qui a trait à la stationnarité (indépendance par rapport à t).

2.3. Hypothèse sur les lois de départ

Nous supposons que le nombre d_t de patients quittant l'unité de soins au jour t est une variable aléatoire dont la loi ne dépend que de l'occupation de l'unité au temps t , c'est-à-dire de la variable d'état x_t .

Cette hypothèse est difficile à justifier à partir d'arguments structurels. En effet, le nombre de patients présents affecte la loi des départs, cependant cette loi dépendra beaucoup de la durée de séjour de ces patients dans l'unité; il y aura donc en réalité des effets héréditaires assez complexes.

Cette hypothèse ne peut donc se justifier qu'*a posteriori*, comme une façon simple de représenter le processus de départ; cela revient à dire « tout se passe comme si le nombre de départs ne dépendait que de x_t ».

Il faudra donc faire une vérification statistique de la validité de cette description. En annexe 2, nous verrons qu'effectivement cette hypothèse peut être acceptée pour une unité de soins de chirurgie à l'hôpital général de Verdun.

2.4. Stratégies d'admission et probabilité de transition sous différentes structures d'information

Nous considérerons trois structures d'information définies par les fonctions informatives suivantes :

$$\begin{aligned} \theta^I &: (x_t, d_t, u_t) \rightarrow y_t^I = x_t, \\ \theta^{II} &: (x_t, d_t, u_t) \rightarrow y_t^{II} = x_t - d_t, \\ \theta^{III} &: (x_t, d_t, u_t) \rightarrow y_t^{III} = x_t - d_t + u_t. \end{aligned}$$

Dans le premier cas le bureau d'admission ne connaît que l'occupation x_t de l'unité avant de prendre sa décision d'admettre des électifs.

Dans le second cas il connaît en outre le nombre de départs dans la journée.

Dans le dernier cas l'état est complètement connu, y compris le nombre d'arrivées d'urgence.

Une stratégie d'admission en t , suivant la structure d'information I (respectivement II ou III) sera une fonction :

$$s_t^I : y_t^I \rightarrow a_t = s_t^I(y_t^I)$$

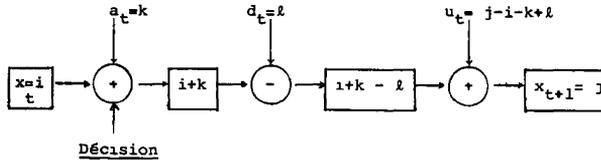
(resp. s_t^{II} ou s_t^{III}).

Une stratégie stationnaire vérifiera

$$s_t^I = s_{t'}^I \quad \forall t \neq t'.$$

2.4.1. Probabilités de transition pour y_t^I

Selon la structure d'information θ^I on passe de $y_t^I \stackrel{\Delta}{=} x_t$ à $y_{t+1}^I = x_{t+1}$ par la séquence d'événements suivants :



La décision intervient donc avant que les départs et les arrivées d'urgence ne soient connus.

Posons

$$M \stackrel{\Delta}{=} \text{nombre de lits dans l'unité de soins,}$$

donc $x_t \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$. Il est facile de voir que l'on a sous les hypothèses faites :

$$g_{ij}^k \triangleq P[x_{t+1} = j | x_t = i \text{ et } a_t = k] \\ = \sum_{l=0}^i P[d_t = l | x_t = i] \cdot P[u_t = j - i - k + l] \quad \text{si } j < M \quad (2.1)$$

et

$$P[x_{t+1} = M | x_t = i \text{ et } a_t = k] \\ = \sum_{l=0}^i P[d_t = l | x_t = i] \cdot \left\{ \sum_{n=M-i-k+l}^{\infty} P[u_t = n] \right\}. \quad (2.2)$$

En dénotant $(^1) \{q(l|i)\}$, $l \in \{0, 1, \dots, i\}$ la loi conditionnelle des départs et $\{f(n)\}$, $n \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ la loi des arrivées on peut écrire (2.1) et (2.2) sous la forme

$$g_{ij}^k = \sum_{l=0}^i q(l|i) f(j - i - k + l) \quad \text{si } j < M, \quad (2.3)$$

$$g_{iM}^k = \sum_{l=0}^i q(l|i) \left\{ \sum_{n=M-i-k+l}^{\infty} f(n) \right\}. \quad (2.4)$$

Par un changement de variable simple :

$$n = j - i - k + l$$

et donc

$$l = n - j + i + k.$$

On peut encore écrire (2.3) et (2.4) sous la forme équivalente :

$$g_{ij}^k = \sum_{n=j-i-k}^{j-k} f(n) q(n - j + i + k | i) \quad \text{si } j < M, \quad (2.5)$$

$$g_{iM}^k = \sum_{n=M-i-k}^{\infty} f(n) \left\{ \sum_{l=0}^{n-M+i+k} q(l|i) \right\}. \quad (2.6)$$

Nous appellerons $G(s^l)$ la matrice des probabilités de transition $g_{ij} s^l(i)$, $i, j \in \{0, 1, \dots, M\}$ correspondant à une stratégie stationnaire s^l .

Nous appellerons $p(s^l)$ le vecteur des probabilités d'état stationnaires :

$$p_j(s^l) \triangleq P[x_t = j | s^l], \quad j \in \{0, 1, \dots, M\}$$

vérifiant

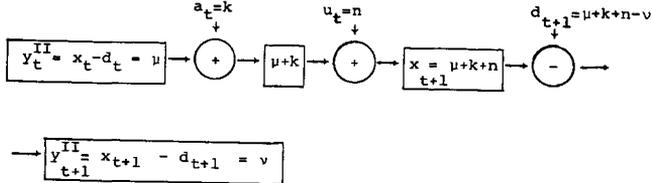
$$p(s^l) = G^T(s^l) p(s^l). \quad (2.7)$$

(¹) En dehors du domaine de variation prescrit pour ces variables aléatoires, la distribution de probabilité est identiquement nulle.

Sous les conditions classiques d'ergodicité, à une stratégie stationnaire s^I correspondra une distribution stationnaire $p(s^I)$ donnée par une solution normalisée de (2.7).

2.4.2. Probabilités de transition pour y_t^{II}

Selon la structure d'information θ^{II} la séquence d'événements faisant passer de y_t^{II} à y_{t+1}^{II} peut être schématisée de la façon suivante :



Pour calculer les probabilités de transition nous devons tenir compte du fait que la capacité maximale de l'unité est M et donc $x_{t+1} - \mu + k + n$ est borné par M . Dans ces conditions si on pose

$$\gamma_{\mu\nu}^k \triangleq P [x_{t+1} - d_{t+1} = \nu | x_t - d_t = \mu \text{ et } a_t = k],$$

on aura

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu}^k &= \sum_{n=\nu-(\mu+k)}^{M-(\mu+k)} f(n) q(\mu+k+n-\nu | \mu+k+n) \\ &+ \sum_{n=M-(\mu+k)+1}^{\infty} f(n) q(M-\nu | M) \quad \text{si } \nu < M \end{aligned} \quad (2.8)$$

et

$$\gamma_{\mu M}^k = \sum_{n=M-(\mu+k)}^{\infty} f(n) q(0 | M). \quad (2.9)$$

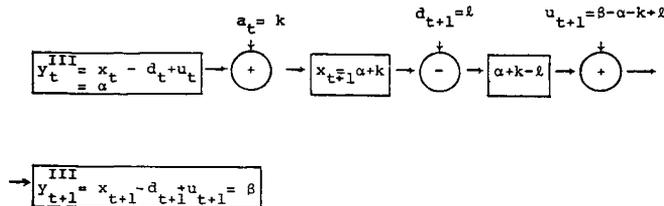
Ce qu'il faut remarquer dans ces expressions est le fait que l'on a invariance des probabilités de transition quand on fait varier μ et k tout en gardant leur somme constante :

$$\mu + k = \mu' + k' = L \rightarrow \gamma_{\mu\nu}^k = \gamma_{\mu'\nu}^{k'}. \quad (2.10)$$

Cette propriété (2.10) aura d'importantes conséquences sur la forme des stratégies optimales comme nous le verrons en section 3.

2.4.3. Probabilités de transition pour y_t^{III}

Selon la structure θ^{III} on passe de y_t^{III} à y_{t+1}^{III} par la séquence d'événements suivante :



Ici encore x_{t+1} est borné supérieurement par le nombre total de lits dans l'unité, M .

Si on pose

$$\delta_{\alpha\beta}^k = P[x_{t+1} - d_{t+1} + u_{t+1} = \beta \mid x_t - d_t + u_t = \alpha \text{ et } a_t = k],$$

on aura

$$\delta_{\alpha\beta}^k = \sum_{l=0}^{\alpha+k} q(l \mid \alpha+k) f(\beta - \alpha - k + l) \quad \text{si } \beta < M, \quad (2.11)$$

$$\delta_{\alpha M}^k = \sum_{l=0}^{\alpha+k} q(l \mid \alpha+k) \left\{ \sum_{n=M-\alpha-k+l}^{\infty} f(n) \right\}. \quad (2.12)$$

Remarquons que dans ce cas aussi on a une propriété d'invariance analogue à (2.10) :

$$\alpha + k = \alpha' + k' = L \rightarrow \delta_{\alpha\beta}^k = \delta_{\alpha'\beta'}^{k'}. \quad (2.13)$$

3. DIFFÉRENTS MODÈLES DE DÉCISION

Dans cette section nous nous intéresserons au problème de la détermination de stratégies stationnaires optimales relativement à divers critères et sous différentes structures d'information.

3.1. Formulation générale d'un modèle de décision

Nous supposons que le bureau d'admission a une fonction d'utilité qui dépend de l'occupation x_t et aussi du nombre d'urgents refusés. Soit

$$\omega(l), \quad l \in \{0, 1, \dots, \infty\}$$

l'utilité d'avoir l patients dans le système. Comme la capacité de l'unité est M , on doit s'attendre à ce que $\omega(l)$ soit fortement décroissante pour $l > M$ puisque cela correspond à des patients urgents non admis. Nous définirons donc la fonctionnelle d'utilité :

$$\Omega(y_t^\sigma, a_t) \triangleq E[\omega(x_t - d_t + a_t + u_t) \mid y_t \text{ et } a_t].$$

A une structure d'information θ^σ , $\sigma = I, II, III$ et à une stratégie stationnaire s^σ correspondra une évolution de x_t à partir d'un état initial $x_0 = i$. Nous définirons alors

$$\varphi_{s^\sigma}(i) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E \left[\sum_{t=1}^n \Omega(y_t^\sigma, a_t) \mid y_0^\sigma = i \text{ et } s^\sigma \right]}{n} \quad (3.1)$$

et nous dirons que \hat{s} est une stratégie optimale si

$$\varphi_{\hat{s}^\sigma}(i) = \text{Max}_{s^\sigma} \varphi_{s^\sigma}(i). \quad (3.2)$$

Une stratégie optimale maximise donc l'utilité moyenne par période. La détermination d'une stratégie optimale peut se faire suivant des méthodes classiques telles que présentées, par exemple, par S. M. Ross [3].

3.2. Forme des stratégies optimales pour les structures d'information θ^{II} et θ^{III}

En nous basant sur un théorème général de la théorie des modèles de décision markoviens, nous établissons, en annexe 1, le résultat suivant :

PROPOSITION : *Suivant les structures d'information θ^{II} ou θ^{III} , si \hat{s}^σ est une stratégie optimale, alors on a nécessairement la relation suivante :*

$$\left. \begin{aligned} y^\sigma &= \alpha, \\ \hat{s}^\sigma(\alpha) &= L - \alpha \rightarrow \text{pour tout } y^\sigma = \alpha' \in \{\alpha, \alpha + 1, \dots, L\}, \\ \hat{s}^\sigma(\alpha') &= L - \alpha' \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ce qui, sous des hypothèses un peu plus restrictives sur les utilités et les probabilités de transition est équivalent à

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}^\sigma(\alpha) &= L - \alpha && \text{pour } \alpha \leq L, \\ \hat{s}^\sigma(\alpha) &= 0 && \text{pour } \alpha > L, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

pour un $L \in \{0, 1, \dots, M\}$.

Ce résultat est dû aux propriétés d'invariance (2.10) et (2.13). Les stratégies optimales auront alors une forme particulièrement simple et consisteront en une politique de réapprovisionnement à un seul niveau, L .

Un seul paramètre détermine la stratégie optimale; on peut donc facilement ajuster ce paramètre en procédant par simulation. Comme ce résultat est obtenu sans préciser la nature exacte de la fonction d'utilité ω nous pourrions omettre de préciser la forme de cette fonction lors de la simulation et nous déterminerons le niveau L en procédant à un arbitrage entre le nombre moyen d'urgents refusés et le taux moyen d'occupation de l'unité. Ceci sera fait en section 4.

3.3. Formulation d'un problème particulier dans le cas de la structure θ^I

Pour la structure d'information θ^I on ne peut pas justifier une stratégie simple de réapprovisionnement à partir d'un raisonnement analogue à celui de la section 3.2. En effet, dans les structures θ^{II} (ou θ^{III}) les patients quittant l'unité de soins en $t+1$ interviennent dans la transition de

$$y_t^{II} \text{ à } y_{t+1}^{II} \quad (\text{ou de } y_t^{III} \text{ à } y_{t+1}^{III}).$$

De ce fait, d'après l'hypothèse sur la loi de départ le nombre de départs sera dépendant de $x_{t+1} = y_t^{II} + a_t + u_t$ (ou de $x_{t+1} = y_t^{III} + a_t$); ainsi le nombre

de patients électifs admis influe sur la loi de départ intervenant dans la détermination des probabilités de transition.

Sous la structure θ^I cela n'est pas le cas; en effet, les patients quittant l'unité en t interviennent dans la transition de y_t^I à y_{t+1}^I et, de ce fait, le nombre de départs sera dépendant de $x_t = y_t^I$ seulement.

On conçoit alors qu'il puisse y avoir une différence entre les deux situations suivantes :

$$\begin{aligned} x_t &= 35, & a_t &= 10, \\ x_t &= 39, & a_t &= 6. \end{aligned}$$

En effet, dans le premier cas il faut s'attendre à moins de départs que dans le second et, dans ces conditions, une stratégie ayant la propriété 3.2 n'est pas nécessairement optimale.

Cette remarque est gênante, car la conséquence importante de la proposition 3.2 était de spécifier la forme probable de la stratégie optimale relativement à une large classe de fonctions d'utilité ω .

Comme nous ne voulons pas entrer dans le problème de la détermination de la fonction ω nous reformulerons le problème d'optimisation à la façon de P. Kolesar [1].

Nous cherchons donc une stratégie \hat{s}^I , stationnaire qui rende maximale l'occupation espérée de l'unité :

$$J = \sum_{y=0}^M j p_j(s^I), \quad (3.5)$$

où $p(s^I)$ est le vecteur des probabilités d'état stationnaires défini par (2.7) tout en satisfaisant à la contrainte

$$p_M(s^I) \leq b, \quad (3.6)$$

où b est un nombre donné entre 0 et 1 correspondant à une borne supérieure allouée à la probabilité de remplissage de l'unité de soins (donc de refuser des patients urgents).

Pour déterminer \hat{s}^I nous définirons les variables suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x_{jk} &= P[x_t = j \text{ et } a_t = k], \\ j &= 0, 1, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, M-j, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$p_j(s^I) = \sum_{k=0}^{M-j} x_{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.8)$$

$$s_{jk} = P[s^I(j) = k | x_t = j] = \frac{x_{jk}}{p_j(s^I)}, \quad k = 0, 1, \dots, M-j. \quad (3.9)$$

Alors le problème d'optimisation revient au problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{Max} \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{M-j} jx_{jk} \quad (3.10)$$

sous les contraintes :

$$x_{M0} \leq b, \quad (3.11)$$

$$\sum_{k=0}^{M-j} x_{jk} - \sum_{i=0}^M \sum_{k=0}^{M-i} x_{ik} g_{ij}^k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{M-j} x_{jk} = 1, \quad (3.13)$$

$$x_{jk} \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, M-j. \quad (3.14)$$

Si la solution du problème (3.10)-(3.14) implique pour les variables s_{jk} seulement des valeurs 0 ou 1 calculées d'après (3.7)-(3.9) on aura une stratégie \hat{s}^j bien déterminée. Si des s_{jk} ont des valeurs non entières, cela impliquera que l'on a avantage à utiliser des stratégies mixtes (ou aléatoires).

4. ANALYSE NUMÉRIQUE DES STRUCTURES D'INFORMATION

4.1. Identification des structures

La structure III définie par la fonction informative

$$\theta^{III} : (x_t, d_t, u_t) \rightarrow y_t^m = x_t - d_t + u_t$$

correspond à la situation où on dispose du maximum d'informations : Les arrivées et les départs de la période où l'on doit prendre une décision sont tous connus ou sous contrôle. L'incertitude n'intervient que par le biais des arrivées et départs des périodes ultérieures $t+1$, $t+2$, etc. Tel est le cas dans une unité où les médecins donnent un avis de congé un peu à l'avance et où il existe une zone tampon qui peut absorber les fluctuations dans le nombre d'arrivées d'urgence. Du point de vue de l'information tout se passe alors comme si les arrivées d'urgence de la période t dans une unité donnée étaient les arrivées d'urgence de la veille dans la zone tampon destinée à cette unité.

A l'autre extrême la structure I définie par la fonction informative

$$\theta^I : (x_t, d_t, u_t) \rightarrow y_t^I = x_t$$

correspond au minimum d'information ce qui survient quand il n'y a ni zone tampon ni politique de préavis de congé.

En principe plus on dispose d'information, plus on est en mesure d'améliorer la performance du système. Nous nous proposons dans cette section de quantifier l'avantage apporté par de meilleures structures d'information.

Notre exemple de base sera constitué d'une unité de cinquante (50) lits recevant un nombre aléatoire u d'arrivées d'urgence chaque jour ayant la distribution suivante :

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	μ_u	σ_u
	.04	.06	.08	.01	.16	.16	.14	.10	.08	.04	5.5	2.4

Le nombre des patients électifs admis est déterminé par les politiques d'admission.

Le nombre de départs par jour est une variable aléatoire ayant une distribution binomiale de paramètre (x, p) , où x est le nombre de patients présents dans l'unité ce jour-là et où p est une constante reliée à la durée de séjour moyenne des patients.

Les critères de performance retenus seront le taux d'occupation, la probabilité d'avoir à admettre un urgent dans des conditions anormales, la variabilité du taux d'occupation.

4.2. Avantages de la zone tampon

Pour évaluer les avantages de la zone tampon, il suffit d'étudier le comportement de notre unité de base dans chacune des deux situations : avec et sans zone tampon. Dans le premier cas il s'agit de la structure *III*; dans le second de la structure *II*.

La forme des stratégies optimales pour ces deux situations a été indiquée au paragraphe 3.2. Elles consistent à admettre, au début de chaque période, des patients électifs jusqu'au niveau L compte tenu des départs et des arrivées d'urgence connus. La valeur de L est déterminée en fonction des arbitrages sur les divers critères, principalement le taux d'occupation de l'unité et la probabilité de « transfert » i. e. la probabilité d'avoir à accueillir un urgent dans des conditions anormales ou à le transférer. Cette politique est analogue à la politique optimale de gestion des stocks dans le cas où le coût fixe de réapprovisionnement est nul. [Politique (S, s) avec $S = s$.]

Pour déterminer la politique optimale d'admission, il n'est pas nécessaire d'explicitier la forme de la fonction d'utilité des gestionnaires du système. Il suffit d'évaluer la valeur moyenne des critères de performance à partir des probabilités d'état stationnaire correspondant à une valeur de L donnée, puis de procéder à des arbitrages entre ces divers critères. Nous avons estimé le paramètre p à .12.

Par exemple pour $L_{II} = 37$, le taux d'occupation moyen est de 92 % et la probabilité de transfert est de .16 tandis que, pour $L_{II} = 42$ on a 96,4 % et .3 comme valeurs moyennes pour les deux critères respectivement.

Pour choisir entre ces deux seuils, il y a donc un arbitrage à faire entre une hausse de 4,4 % du taux moyen d'occupation et une hausse de .14 dans la probabilité de transfert. Seules les préférences des décideurs peuvent trancher ici, mais elles n'ont pas à être explicitées dans une fonction d'utilité.

Pour les fins de notre étude, nous déterminons une valeur moyenne de chacun des critères de performance pour une valeur donnée de L dans les situations d'information *II* et *III*.

La figure 1 ci-après fournit le taux d'occupation moyen de l'unité et son écart-type (variabilité) pour $L_{II} = 37, 38, \dots, 44$ dans la situation *II* et pour $L_{III} = 43, \dots, 50$ dans la situation *III*.

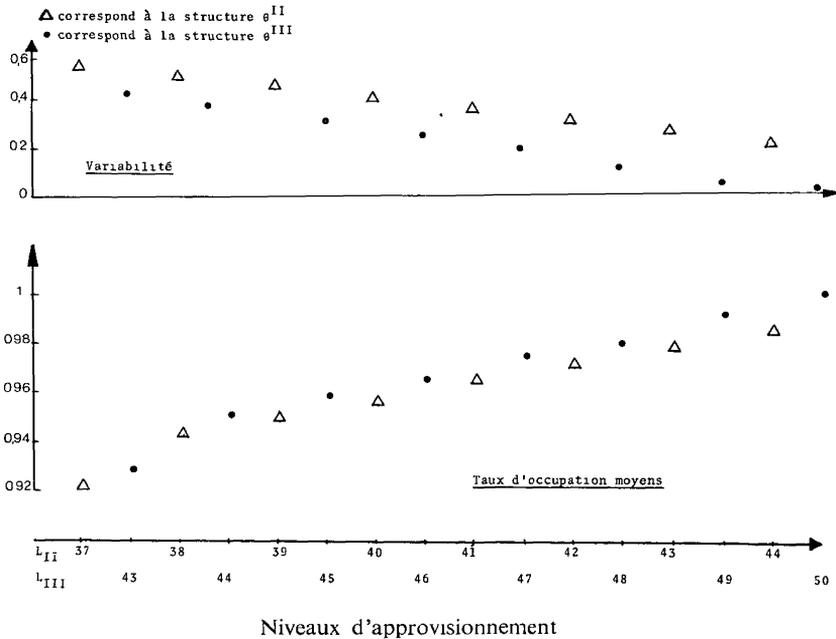


Figure 1.
Effets sur le taux d'occupation des différents politiques d'admission sous les structures θ^{II} et θ^{III} .

Dans cette dernière situation, le paramètre L_{III} est fixé en se souvenant que le nombre d'arrivées d'urgence à l'unité u_t est connu et correspond aux arrivées d'urgence de la veille à la zone tampon. Il y a donc moins de fluctuations au niveau de l'arrivée quotidienne de nouveaux patients puisqu'on peut ajuster l'admission des patients électifs en fonction des urgences de la journée. On peut fixer un niveau L_{III} plus élevé ou en d'autres termes conserver un nombre $(50 - L_{III})$ de lits de sécurité plus petit. Ces lits de sécurité

sont réservés pour faire face surtout aux urgences des jours suivants. La valeur de L_{III} est fixée comme si les urgents connus étaient des électifs. Pour fin de comparaison, mieux vaut donc rapprocher L_{II} et $L_{III} = L_{II} + \mu_u$. C'est ce qui est fait sur la figure 1.

L'étude des résultats permet de constater que pour un gestionnaire plutôt prudent, plus attiré par une faible probabilité de transfert que par un haut taux d'occupation, l'avantage de la zone tampon est de lui permettre d'atteindre un taux d'occupation légèrement plus élevé et plus stable, d'environ 1%. Par exemple, on a :

	Taux moyen d'occupation (%)	Écart-type (%)	Probabilité de transfert
$L_{II} = 37$	92	6,5	.16
$L_{III} = 43$	93	5,5	.16

Pour le gestionnaire porté à prendre plus de risques, l'avantage de la zone tampon est plus marqué. Par exemple, on a :

	Taux moyen d'occupation (%)	Écart-type (%)	Probabilité de transfert
$L_{II} = 42$	96,4	4	.3
$L_{III} = 48$	97,9	1,7	.3

En somme la zone tampon suscite une structure d'information d'autant plus avantageuse qu'on est près de la pleine capacité. A cet avantage, il faut ajouter le regroupement (« pooling ») des lits de sécurité des diverses unités qui a été signalé dans une autre étude par C. R. Duguay et G. Gollin [4].

4.3. Avantages de la structure d'information θ^{II} sur θ^I

Avec la structure d'information θ^I , le bureau d'admission ne connaît au début de la période t ni d_t , le nombre de départs dans la période ni u_t , le nombre d'arrivées d'urgents dans la période. Cette structure correspond à la situation où les médecins n'avisent pas le bureau à l'avance des congés probables et où il n'y a pas de zone tampon. Ce sont deux variables aléatoires dont les distributions peuvent être approximées à l'aide des statistiques

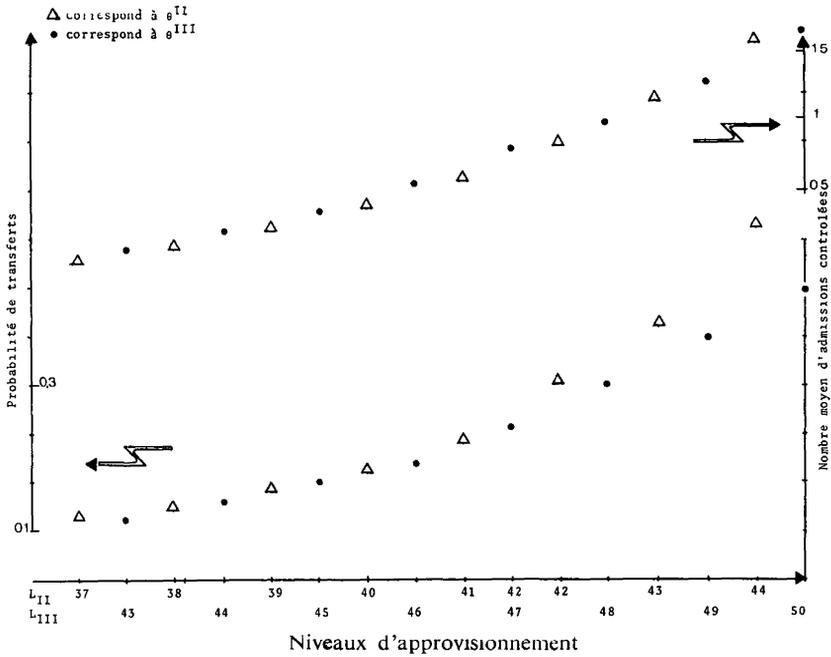


Figure 2.
Effets sur les probabilités de transfert et sur le nombre d'admission
des structures θ^{II} et θ^{III} .

recueillies. En supposant que la politique d'admission des électifs soit encore d'en admettre jusqu'à un niveau donné L^I , on a

$$\begin{aligned}
 x_{t+1} &= x_t + a_t - d_t + u_t, \\
 &= L^I - d_t + u_t \quad \text{si } x_t \leq L^I, \\
 &= x_t - d_t + u_t \quad \text{si } x_t > L^I.
 \end{aligned}$$

Dans le cas où les distributions du nombre de départs et du nombre d'arrivées sont telles que $[d_t - u_t]$ peut être négatif, le seuil L^I ne constitue pas un plancher au niveau d'occupation comme dans les deux situations précédentes.

Pour évaluer l'avantage de connaître en début de période le nombre de départs survenant dans cette période, on peut procéder comme dans la section précédente en comparant les résultats obtenus dans chacune des situations avec des politiques qui se correspondent et, si possible, dont le caractère optimal a été établi.

Reprenons notre exemple de base, i. e. :

une unité de 50 lits;

des départs d_t suivant une binomiale $B(x_t, p = 0, 12)$;

des arrivées d'urgence.

$u_t \dots \dots \dots$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	μ_u	σ_u
	.04	.06	.08	.12	.16	.16	.14	.10	.08	.04	5,5	2,4

Avec la structure d'information θ^{II} , la politique d'admission « admettre des électifs jusqu'au seuil $L_{II} = 40$ » donne les résultats suivants :

taux d'occupation moyen = .94;

probabilité d'un transfert = 0,21.

Procédons d'abord de façon heuristique :

Avec la structure d'information θ^I , la politique d'admission correspondante consiste à admettre des électifs jusqu'au seuil $L_I(x_t) = 40 + x_t \cdot p$ puisque le nombre de départs suit une loi $B(x_t, .p)$. Ceci correspond à ce que nous avons fait en 4.2 en comparant les résultats des politiques de seuil L_{II} et $L_{III} = L_{II} + \mu_u$.

Le nombre de départs espéré dans une période est donné par le tableau suivant :

État $x_t \dots \dots \dots$	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	
Nombre espéré de départs	3.6	3.84	4.08	4.32	4.56	4.8	5.04	5.28	5.52	5.76	6
	3.72	3.96	4.2	4.44	4.68	4.92	5.16	5.4	5.64	5.88	

Par suite la politique qui, dans la structure d'information θ^I correspondrait de façon heuristique à $L^{II} = 40$ est définie par le tableau suivant :

État $x_t \dots \dots \dots$	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	
Seuil d'admission						44					
Nombre d'admission	4	12	10	8	6	5	3	1	0	0	0
	13	11	9	7	5	4	2	0	0	0	

On a représenté sur la figure 3 les deux politiques en portant sur un graphe le nombre de patients électifs admis en fonction du nombre de lits occupés dans l'unité suivant chacune des deux politiques.

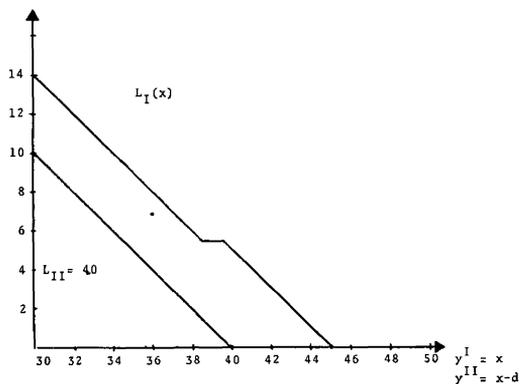


Figure 3.

Nombre de patients admis en fonction de la variable d'information.

Etat x_t	Nombre d'admission a_t	
	$b = .20$ $tx = .90$	$b = .36$ $tx = .94$
35	5	7
36	4	6
37	3	4
38	2	6
39	≈ 0	5
40		2
41		3
42		(2,3) : (.4, .6)
43		4
44	0	1
45		2
46		0
47		0
48		2
49		0
50		0

Figure 4.

Stratégies d'admission optimales selon la structure θ' .

- b = probabilité d'avoir l'unité pleine \approx probabilité de refuser des urgents;
- tx = taux d'occupation moyen;
- (2, 3) : (.4, .6) désigne la distribution de probabilité;
- (.4, .6) sur les valeurs (2,3).

Évidemment on doit s'attendre à une perte d'efficacité lorsqu'on ne connaît pas le nombre de départs, qui se traduira soit par une augmentation de la probabilité de refuser un urgent, soit par une diminution du taux d'occupation.

Au lieu d'étudier cette politique heuristique par simulation, nous avons déterminé des politiques maximisant le taux d'occupation espéré sous une contrainte fixant la probabilité de refuser un urgent ou plus, en suivant pour cela la méthode de la section 3.3. Le tableau suivant résume les résultats obtenus pour deux valeurs données à cette probabilité de refus d'urgents.

En analysant le tableau, nous constatons que pour maintenir, sous la structure d'information θ^I , la probabilité de refus à .20 il faut considérablement réduire le taux moyen d'occupation en comparaison avec la structure d'information θ^{II} .

Pour retrouver un taux moyen d'occupation aux environs de .94 il faut être prêt à supporter une probabilité de refuser un urgent d'environ .36. On peut donc facilement constater le coût pour l'institution de ne pas connaître le nombre de départs.

Remarquons enfin que la forme de stratégie obtenue de façon heuristique n'est pas confirmée par l'optimisation.

5. CONCLUSION

Dans cette étude nous avons considéré le problème de l'admission des patients électifs dans une unité de soins d'un hôpital. Grâce à une modélisation du système sous forme d'un processus markovien de décisions séquentielles nous avons pu établir que, sous des conditions très générales, une stratégie d'admission simple basée sur une politique d'approvisionnement (S, S) est optimale quand on connaît le nombre de départs. Nous avons pu alors, en procédant par simulation, quantifier les avantages fournis par la prévision des arrivées d'urgences et des départs. Une vérification, par des techniques de programmation linéaire, d'une règle de décision heuristique dans le cas où on ne connaît pas le nombre de départs n'a pas confirmé exactement cette forme de stratégie. Cependant une évaluation de la perte d'efficacité lorsque l'on ne connaît pas le nombre de départs a pu être faite.

ANNEXE 1

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2

Nous ferons cette démonstration dans le cas de la structure θ^{II} . Le même raisonnement s'appliquerait au cas de θ^{III} .

Nous cherchons la stratégie \hat{s}^{II} telle que

$$\varphi_{\hat{s}^{II}} = \text{Max}_{s^{II}} \varphi_{s^{II}}(i), \quad \forall i \in \{0, i, \dots, M\},$$

où

$$\varphi_{s^{II}}(i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[\sum_{t=1}^T \Omega(y_t^{II}, s^{II}(y_t^{II})) \mid y_0^{II} = i \right]}{T} \quad (1)$$

et où la fonctionnelle $\Omega(\cdot)$ est définie par

$$\Omega(j, k) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \omega(j+k+n). \quad (2)$$

On s'aperçoit que l'expression (2) ne dépend en fait que de $j+k$, nous poserons donc

$$C(j+k) \triangleq \Omega(j, k). \quad (3)$$

Nous pouvons écrire (1) sous la forme équivalente :

$$\varphi_{s^{II}}(i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[\sum_{t=1}^T C(y_t^{II} + s^{II}(y_t^{II})) \mid y_0^{II} = i \right]}{T}, \quad (4)$$

où le processus régissant les variables y_t^{II} est la chaîne de Markov décrite en (2.3) et (2.4).

Supposons que toute stratégie stationnaire s^{II} engendre une chaîne de markov ergodique, alors pour résoudre le problème d'optimisation il suffit de trouver une fonction $h(i)$, $i = 0, 1, \dots, M$ et une constante g telle que

$$g + h(i) = \text{Max}_k \left\{ C(i+k) + \sum_{j=0}^M \gamma_{ij}^k h(j) \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (5)$$

On aura alors :

$$g = \varphi_{\hat{s}^{II}}(i) \quad \text{pour tout } i,$$

où s^{II} est définie par la solution de la maximisation de l'expression (5). Ce résultat est, en particulier établi par S. M. Ross [3].

D'après la propriété d'invariance (2.5) le second membre de (5) ne dépend que de $(i+k)$ nous poserons donc

$$H(i+k) \triangleq C(i+k) + \sum_{j=0}^M \gamma_{ij}^k h(j), \quad (6)$$

et l'on voit que, si l'on a

$$\text{Max}_{k \geq 0} H(i+k) = H(L),$$

alors pour tout $j = i+1, i+2, \dots, L$, on aura

$$\text{Max}_{k \geq 0} H(j+k) = H(L).$$

Ce qui établit la première partie de la proposition 3.2.

Nous pouvons facilement constater, à partir de (5) que, si nous avons

$$\text{Max}_{k \geq 0} H(k) = H(L),$$

alors nous avons aussi

$$h(j) \equiv \text{Cte} \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots, L$$

et nous pouvons toujours choisir la valeur 0 pour la constante.

D'autre part il est clair que l'on aura toujours

$$\text{Max}_{k \geq 0} H(i+k) \geq \text{Max}_{k \geq 0} H(j+k) \quad \text{si } j \geq i. \quad (7)$$

On en déduit donc que l'on peut toujours choisir les $h(j)$ tels que :

$$\left. \begin{aligned} h(j) &= 0 && \text{si } j = 0, 1, \dots, L, \\ h(j) &\leq 0 && \text{si } j > L, \\ h(j) &\leq h(i) && \text{si } j > i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Définissons maintenant la fonction :

$$D(i+k) \triangleq \sum_{j=L+1}^M \gamma_{ij}^k h(j). \quad (9)$$

On a donc, pour $l = 0, 1, \dots, M$:

$$H(l) = C(l) + D(l). \quad (10)$$

Pour que la suite $H(l)$ soit monotone croissante pour $l \leq L$ et monotone décroissante pour $l \geq L$ il suffit que l'on ait

$$\Delta^2 C(l) < 0, \quad l = 2, \dots, M, \quad (11)$$

$$\Delta D(l) < 0, \quad l = 1, \dots, M, \quad (12)$$

où Δ est l'opérateur de différence première.

Si cette propriété est satisfaite la stratégie optimale sera nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} \hat{s}^H(j) &= L-j && \text{si } j \leq L, \\ \hat{s}^H(j) &= 0 && \text{si } j > L. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que la condition (11) est satisfaite si la fonctionnelle $\omega(\cdot)$ est concave.

Quant à la condition (12), du fait de la propriété (8), elle sera vérifiée si on a des probabilités de transition γ_{ij}^{l-j} qui donnent de plus en plus de « poids » aux grandes valeurs de j quand l augmente.

ANNEXE 2

VÉRIFICATION EMPIRIQUE DE L'HYPOTHÈSE SUR LA LOI DES DÉPARTS

Nous avons considéré une unité de soins du service de Chirurgie de l'Hôpital général de Verdun (région de Montréal). Cette unité comportait 29 lits et nous disposions de données sur une période totale de 4 ans. Les données relatives aux dimanches ont été éliminées puisque les congés ne sont que rarement accordés ce jour-là.

Nous avons procédé alors à un test du χ^2 en ajustant aux observations des lois binomiales (n, p) , où n est le nombre de patients présents et p est la probabilité élémentaire de départ.

Au risque d'erreur de première espèce 5 %, l'hypothèse a été acceptée.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. KOLESAR, *A Markovian Decision Model for Hospital Adms on Scheduling*, Man. Sc., vol. 16, 1970, p. B-384-96.
2. F. L. OFFENSEND, *Design, Control and Evaluation of Inpatient Nursing Systems*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, 1971.
3. S. M. ROSS, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden Day, 1970.
4. C. R. DUGUAY et G. GOLLIN, *Le problème de la régulation par le contrôle des admissions*, Rapport de recherche 74-04-08, École des Hautes Études commerciales de Montréal, 1974.