Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

M. Girault

Commentaire de l'article : « The relevation transform and a generalization of the gamma distribution function »

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 10, nº V3 (1976), p. 71-73

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_3_71_0>

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle
(vol. 10, n° 10, octobre 1976, p. 71 à 73)

COMMENTAIRE DE L'ARTICLE : THE RELEVATION TRANSFORM AND A GENERALIZATION OF THE GAMMA DISTRIBUTION FUNCTION (*)

par M. GIRAULT

Martin Krakowski a publié dans le numéro de mai 1973 de la revue, un intéressant article intitulé : *The relevation transform and a generalization of the gamma distribution function* : article que nous noterons dans la suite (M. K.). La partie centrale de cette étude peut recevoir une interprétation en termes de processus ponctuels de Poisson qui rend évidents certains résultats et montre clairement le lien qui relie cette question à la distribution gamma.

1. PROCESSUS PONCTUEL DE POISSON

Soit sur $t > 0$ un processus ponctuel de Poisson uniforme de densité constante $1/a$ et $\{t_1; t_2; \ldots; t_n\}$ une réalisation de ce processus. Les intervalles successifs $U_1 = t_1$; $U_2 = t_2 - t_1$; $\ldots$; $U_n = t_n - t_{n-1}$ sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à la loi gamma de paramètres 1 et $1/a$ que nous noterons $\gamma\,(1;\ 1/a)$. La loi élémentaire est $f(u)\,du = e^{-u/a}\,(du/a)$. Il est facile de vérifier que les dates $t_1\ t_2 \ldots t_n \ldots$ sont les instants de régénération (« relevation ») considérés dans (M. K.) (section 7), lorsque $A(t) = B(t) = e^{-t/a}$ (auto-relevation) et lorsque le nombre des régénérations possibles est arbitrairement grand.

On sait que la probabilité d'obtenir k points sur $[0, t]$ est

$$P_k = e^{-t/a} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{a}\right)^k \qquad \text{(loi de Poisson).}$$

Par suite la probabilité que la durée de vie soit au moins égale à t lorsque l'individu dispose de $(n-1)$ régénérations est (relation 7.2 de M.K.) :

$$A(t, n) = P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1} = e^{-1/a} \sum_0^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{a}\right)^k.$$

(*) Reçu mai 1976

2. INTERPOLATION DU PROCESSUS DE POISSON; PROCESSUS GAMMA UNIFORME

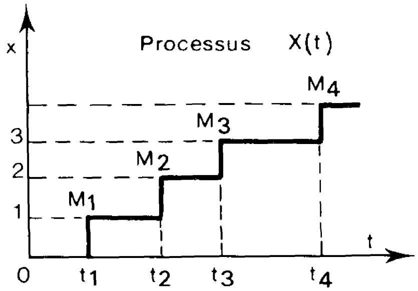
Associons au processus uniforme de Poisson sa fonction indicatrice $X(t)$, où :

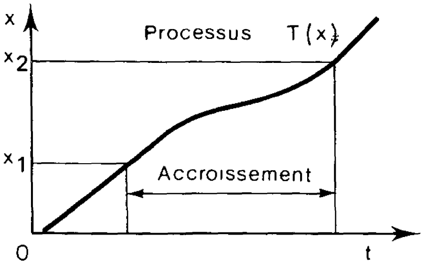
$$X(t) = \begin{cases} \text{nombre de points obtenus sur } [0;\, t]; \\ \text{nombre de points de régénération jusqu'à l'âge } t. \end{cases}$$

$X(t)$ est un processus numérique à accroissement aléatoires indépendants, à valeurs entières positives.

$X(t)$ est une fonction en escalier. Désignons par M_1, M_2 ... les bornes à gauche des paliers.

M_k a pour coordonnées : $\left\{ \begin{array}{l} \text{abscisse aléatoire obéissant à la loi} \\ \gamma\,(k;\, 1/a), \text{ ordonnée } k. \end{array} \right\}$.





La fonction réciproque $x \to t$ est également à accroissements aléatoires positifs indépendants sur l'intervalle $(n;\, n+k)$ de x; l'augmentation Δt de t obéit à la loi $\gamma\,(k;\, 1/a)$ d'expression élémentaire $e^{-\Delta t/a}\,(1/\Gamma_k)\,(\Delta t/a)^{k-1}\,(d\Delta t/a)$.

Cette fonction aléatoire $T(x)$ peut être définie pour n et k réels positifs; on réalise ainsi le processus gamma uniforme (*voir* M. Girault : *Processus aléatoires*, p. 56) et la fonction réciproque interpole le processus $X(t)$ (*voir* M. K., section 8).

3. PROCESSUS PONCTUEL DE POISSON NON UNIFORME

Soit sur $t > 0$ un processus de Poisson non uniforme défini par sa fonction de distribution $G(t)$ (*voir* M. Girault : *Processus aléatoires*, Dunod, Paris, 1965). $G(t)$ est une fonction monotone croissante à variation bornée sur tout intervalle fini, continue à droite.

Toute réalisation du processus ponctuel est définie par une suite non décroissante d'instants t_1; t_2; ... ou de points M_1, M_2 sur l'échelle des temps réalisant les conditions suivantes :

1° Sur tout ensemble d'intervalles disjoints, les nombres de points obtenus sont indépendants en probabilité.

2° Sur l'intervalle $]t'\,t'']$ le nombre de points obtenus, disons $N(t't'')$ obéit à la loi de Poisson de paramètres $m = G(t'') - G(t')$. On a donc

$$\operatorname{Prob}\{N_{t't''} = k\} = e^{-m}\frac{m^k}{k!} \qquad \text{avec} \quad m = G(t'') - G(t').$$

Soit $t_1, t_2, \ldots$ une réalisation de ce processus. Il est facile de s'assurer que ces dates sont les instants des chutes successives d'un individu pour lequel en chacun de ces instants, une « régénération » (relevation) s'effectue; la loi commune des durées est définie par la fonction de survie :

$$\underset{\text{(notations de M. K.)}}{A(t) = B(t)} = \underset{\text{(notations précédentes)}}{e^{-G(t)}}.$$

En effet, dans le modèle « auto-relevation » (*voir* M. K., section 3 et 6) réalisant $A(t) = B(t) = e^{-G(t)}$ si l'on désigne par t_1 et t_2 les dates des deux premiers accidents, la loi du couple $(t_1\, t_2)$ est

$$-dA(t_1)\frac{-dA(t_2)}{A(t_1)} = e^{-G(t_2)}\,dG(t_1)\,dG(t_2). \tag{1}$$

D'autre part, si $(t_1\, t_2)$ sont les deux premiers points obtenus en réalisant le processus de Poisson de fonction de distribution $e^{-G(t)}$; la loi du couple $(t_1\, t_2)$ est

$$e^{-G(t_1)}\,dG(t_1)\,e^{-[G(t_2)-G(t_1)]}\,dG(t_2) = e^{-G(t_2)}\,dG(t_1)\,dG(t_2). \tag{2}$$

La démonstration s'étend sans difficulté à une suite $(t_1\, t_2 \ldots t_n \ldots)$.

On en déduit immédiatement la valeur de $A(t; n)$ (relation 6.2 de M. K.). En effet, $A(t, n)$ désignant la probabilité que la durée de vie soit au moins égale à t lorsque l'individu dispose de $(n-1)$ régénérations, on a

$A(t; n) = \operatorname{Prob}\{K_{(t)} \leqq n-1\}$, où $K(t)$ est le nombre de points obtenus sur $[0; t]$ par le processus

$= P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1}$,

ou

$$P_k = e^{-m}\frac{m^k}{k!} \qquad \text{avec} \quad m = G(t) = -\operatorname{Log} A(t),$$

donc

$$A(t; n) = e^{-m}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}m^k.$$

Les remarques précédentes éclairent également l'ensemble de l'étude (M. K.)

octobre 1976.