

M. MINOUX

**Structures algébriques généralisées des problèmes
de cheminement dans les graphes**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 10, n° V2 (1976), p. 33-62

http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_2_33_0

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STRUCTURES ALGÈBRIQUES GÉNÉRALISÉES DES PROBLÈMES DE CHEMINEMENT DANS LES GRAPHEs

Théorèmes, algorithmes et applications (*)

par M. MINOUX (1)

Résumé. — Cet article est consacré à la formulation des problèmes de cheminement dans les graphes finis en termes de structures algébriques.

On montre tout d'abord que certains problèmes de cheminement ne rentrent pas dans le cadre des formulations classiques [algèbres de chemins de Carre (1971) ou de Gondran (1973) par exemple] et doivent être interprétés dans des structures algébriques plus générales.

On expose ensuite les principaux algorithmes de résolution applicables à ces problèmes « non classiques »; ceux-ci apparaissent comme des généralisations des algorithmes de Ford, de Moore, et de Dijkstra, bien connus dans le cas particulier du plus court chemin.

On montre enfin qu'une importante classe de problèmes pratiques peut se formuler et se résoudre dans le cadre de la théorie.

I. — INTRODUCTION

L'interprétation des problèmes de cheminement dans les graphes finis en termes de structures algébriques a fait l'objet, jusqu'ici, de nombreux travaux. Les plus récents, parmi lesquels ceux de Carre [5] et de Gondran [14], [16], [17], ont permis de montrer que la plupart de ces problèmes se ramènent à la résolution de systèmes d'équations linéaires dans des structures algébriques particulières : les semi-anneaux.

Les méthodes de recherche de chemins dans les graphes apparaissent alors comme des transpositions d'algorithmes bien connus en algèbre linéaire usuelle : méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, Gauss-Jordan, etc.

On constate, cependant, qu'un certain nombre de problèmes ne rentre pas dans le cadre de cette formulation « classique ». C'est le cas, entre autres, du problème du plus court chemin avec contraintes temporelles (P.C.C.T.) exposé par Halpern et Priess dans [20], et résolu par une méthode dérivée de

(*) Reçu janvier 1975, version révisée reçue mai 1975.

(1) Centre National d'Études des Télécommunications.

l'algorithme de Dijkstra [9]. C'est aussi le cas du problème du plus court chemin avec longueurs fonctions du temps, exposé par Cooke et Halsey [6] et Dreyfus [10].

L'objet de cet article est, en particulier, de montrer que ces problèmes (non classiques) doivent être interprétés dans le cadre, beaucoup plus général, des processus de Markov discrets. Ainsi à chaque nœud $x_i \in X$ du graphe $G = [X, U]$ on associe un état $E_i \in S$ (S est l'ensemble des états) et à chaque arc $(x_i, x_j) \in U$ on associe une transition h_{ij} (application de l'ensemble S dans lui-même). Si S a une structure de monoïde (respectivement à une opération interne « addition » notée \oplus) et si H est l'ensemble des endomorphismes de S on montre (cf. chap. II) que le triplet (H, \oplus, \circ) est un semi-anneau associatif; il constitue par conséquent une algèbre de chemins au sens de [5] et [17].

Soit A la matrice d'endomorphismes $N \times N$ dont les termes a_{ij} sont les transitions associées aux arcs (x_i, x_j) de G et aux couples $(x_i, x_j) \notin U$.

A est appelée matrice d'adjacence généralisée de G et possède les propriétés suivantes :

- les puissances successives A, A^2, \dots, A^k constituent une information condensée sur l'ensemble des transitions de longueur 1, 2, \dots, k .
- les matrices $A^{(k)} = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^k$ constituent une information condensée sur l'ensemble des transitions de longueur $\leq k$;

- la matrice $A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)}$ constitue une information condensée sur l'ensemble de toutes les transitions possibles (les conditions d'existence de A^* sont étudiées au chapitre II).

Dans le cadre de ce nouveau formalisme, les problèmes de cheminement « classiques » correspondent au cas particulier où :

- S est muni d'une seconde loi de composition interne notée \star (associative, élément neutre, distributive à droite et à gauche pour \oplus);
- les endomorphismes a_{ij} appartiennent tous à un sous-ensemble $H' \subset H$ tel que (H', \circ) et (S, \star) soient isomorphes.

La composition des endomorphismes a_{ij} équivaut alors à la multiplication (au sens de \star) des éléments de S qui leur correspondent, ce qui permet de déterminer explicitement (sans passer par l'intermédiaire des états des nœuds de G) la matrice d'endomorphismes A^* (cf. chap. II.6).

A l'inverse, les problèmes de cheminement « non classiques » sont ceux pour lesquels les endomorphismes a_{ij} (ou leurs produits $a_{jk} \circ a_{ij}$) ne sont connus que par leur effet sur des éléments de S c'est-à-dire « point par point ».

Dans ces conditions, la matrice $A^* = [a_{ij}^*]$ ne peut plus être calculée explicitement, et les a_{ij}^* ne peuvent être connus qu'indirectement, par leur effet sur des éléments particuliers de S (état initial).

La structure algébrique (S, H, \oplus, \circ) généralise, pour ces problèmes, la structure classique de semi-anneau (S, \oplus, \star) .

Au chapitre III, l'exemple du plus court chemin avec contraintes temporelles (P.C.C.T.) est étudié de façon détaillée et sert d'illustration aux développements théoriques du chapitre II. Dans les chapitres IV et V les principaux algorithmes de résolution, applicables aux problèmes « non-classiques », apparaissent comme des généralisations des algorithmes de Ford [13] de Moore [26 b] et de Dijkstra [9].

Enfin au chapitre VI un certain nombre de problèmes « non-classiques » (parmi lesquels des problèmes nouveaux) sont passés en revue, et on montre comment ils peuvent se formuler et se résoudre dans le cadre des structures algébriques généralisées.

II. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES GÉNÉRALISÉES

1) Notations et définitions

● Soit S un ensemble d'états muni d'une opération interne \oplus associative et commutative (S a donc une structure de monoïde commutatif). On suppose qu'il existe un élément neutre ε ($a \oplus \varepsilon = a, \forall a \in S$).

● Soit H l'ensemble des endomorphismes de S relativement à \oplus . Par définition

$$h(a \oplus b) = h(a) \oplus h(b), \quad \forall h \in H, a \in S, b \in S.$$

L'endomorphisme « identité » sera noté e . En conséquence : $e(a) = a, \forall a \in S$.

● L'opération \oplus sur S induit sur H une opération, également notée \oplus , définie par

$$(h \oplus g)(a) = h(a) \oplus g(a), \quad \forall h \in H, g \in H, a \in S.$$

On vérifie que \oplus est une opération interne de H .

L'élément neutre de \oplus dans H est l'endomorphisme noté h^ε qui à tout $a \in S$ associe $\varepsilon \in S$, et on a bien

$$h^\varepsilon \oplus h = h \oplus h^\varepsilon = h, \quad \forall h \in H.$$

● Nous considérerons dans H une seconde loi, notée \otimes définie par

$$h \in H, g \in H, h \otimes g = g \circ h$$

(où \circ est l'opération de composition des applications).

\otimes est une opération associative mais, en général, *non commutative*. On notera que \otimes est une opération interne et que l'élément neutre de \otimes est l'endomorphisme « identité » e . En effet

$$e \circ h = h \circ e = h \Leftrightarrow h \otimes e = e \otimes h = h, \quad \forall h \in H.$$

- La multiplication \otimes est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi \oplus (ceci se vérifie aisément).
- La multiplication \otimes admet h^e comme élément absorbant à droite car

$$(h^e \circ g)(a) = h^e(g(a)) = \varepsilon, \quad \forall a \in S, \quad \forall g \in H,$$

d'où

$$g \otimes h^e = h^e, \quad \forall g \in H.$$

- D'après ce qui précède, le triplet (H, \oplus, \otimes) est un semi-anneau associatif (au sens de [28]).
- La structure (S, H, \oplus, \otimes) sera appelée *structure algébrique de cheminement généralisée*.

- Considérons un graphe (orienté) $G = [X, U]$:

X , ensemble des sommets, $|X| = N$.

U , ensemble des arcs $u = (x, y)$, $x \in X$, $y \in X$

et $|U| = M$.

A chaque arc $u = (x_i, x_j) \in U$ associons un endomorphisme $h_{ij} \in H$ que nous appellerons « transition de longueur 1 » de x_i à x_j .

Nous supposons dans toute la suite que

$$h_{ij}(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall (x_i, x_j) \in U.$$

Il en résulte que l'on a

$$(h_{ij} \circ h^e)(a) = h_{ij}(h^e(a)) = h_{ij}(\varepsilon) = \varepsilon \quad (\forall a \in S)$$

et par suite

$$h_{ij} \otimes h^e = h^e \otimes h_{ij} = h^e$$

(h^e absorbe tous les endomorphismes h_{ij}).

[Si G est un *multigraphe* et s'il existe plusieurs arcs entre x_i et x_j , on définira pour le couple (x_i, x_j) l'endomorphisme h_{ij} comme la somme des transitions associées aux arcs (x_i, x_j) .]

On définit alors la *matrice d'adjacence généralisée* de G comme un élément $A \in H^{N^2}$ par

$$\begin{cases} a_{ij} = h_{ij} & \text{si } (x_i, x_j) \in U, \\ a_{ij} = h^\varepsilon & \text{si } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Les opérations \oplus et \otimes de H induisent dans H^{N^2} des opérations \oplus et \otimes définies par

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, N}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, N}},$$

$$c = A \oplus B = (c_{ij}) \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N),$$

$$c = A \otimes B = (c_{ij}) \Leftrightarrow c_{ij} = \bigoplus_{k=1, \dots, N} a_{ik} \otimes b_{kj} \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N),$$

où \bigoplus désigne la sommation relative à \oplus dans H .

2) Interprétation en termes de processus de Markov discrets

Nous avons défini la matrice d'adjacence généralisée A de G comme la matrice de toutes les transitions de longueur 1 sur G . Une transition h_{ij} de longueur 1 est l'opération qui fait passer de l'état E_i du sommet x_i à l'état $E_j = h_{ij}(E_i)$ du sommet x_j .

On peut très bien définir de la même façon, la transition $t(\pi_{ij})$ associée à un chemin π_{ij} de x_i à x_j dans G . Si π_{ij} est de cardinalité n , nous dirons que la transition $t(\pi_{ij})$ est de longueur n , et, si

$$\pi_{ij} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_{n-1}}, x_{i_n})\},$$

avec

$$x_{i_1} = x_i, \quad x_{i_n} = x_j,$$

alors

$$t(\pi_{ij}) = h_{i_{n-1}, i_n} \circ h_{i_{n-2}, i_{n-1}} \circ \dots \circ h_{i_1, i_2}$$

ou d'une façon équivalente

$$t(\pi_{ij}) = h_{i_1, i_2} \otimes h_{i_2, i_3} \otimes \dots \otimes h_{i_{n-1}, i_n}.$$

Les transitions de longueur n figurent dans les termes de la matrice A^n (puissance n -ième de A) : le terme a_{ij}^n est la somme (au sens de \oplus) de toutes les transitions de longueur n de x_i à x_j .

Si un *état du graphe* G est caractérisé par la donnée d'un état E_i en chaque

sommet $x_i \in X$ et si $\mathcal{E}^0 = \begin{bmatrix} E_1^0 \\ \vdots \\ E_N^0 \end{bmatrix}$ est l'état initial de G alors : $\mathcal{E}^k = A^k(\mathcal{E}^0)$

est l'état de G après k étapes (k intervalles de temps).

La matrice A s'interprète alors comme la matrice de transition associée à un processus de Markov discret.

3) Propriétés des structures algébriques généralisées

Étant donné $G = [X, U]$ et A matrice d'adjacence généralisée de G , les deux propriétés suivantes permettent de ramener beaucoup de problèmes de cheminement sur G au calcul des puissances successives A, A^2, A^3, \dots, A^k de A , ou encore, des matrices

$$A^{(k)} = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^k.$$

PROPRIÉTÉ 1 : Si P_{ij}^k désigne l'ensemble des chemins de x_i à x_j comportant exactement k arcs, alors

$$a_{ij}^k = \sum_{\pi \in P_{ij}^k} t(\pi). \quad (\text{II.1})$$

PROPRIÉTÉ 2 : Si $P_{ij}^{(k)}$ désigne l'ensemble des chemins de x_i à x_j comportant k arcs au plus, alors :

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\pi \in P_{ij}^{(k)}} t(\pi). \quad (\text{II.2})$$

La démonstration de (II.1) se fait par récurrence sur k en tenant compte du fait que h^e est absorbant pour \otimes (cf. référence [17]).

La propriété 2 découle directement de la propriété 1.

4) Endomorphismes p -réguliers. Résultats relatifs aux graphes sans circuit p -absorbant

Pour $h \in H$ la puissance k -ième de h est

$$h^k = h \otimes h \otimes \dots \otimes h = h \circ h \circ \dots \circ h \quad (k \text{ fois}).$$

Définissons alors

$$h^{(k)} = e \oplus h \oplus h^2 \oplus \dots \oplus h^k.$$

DÉFINITION : On dira qu'un endomorphisme $h \in H$ est p -régulier si : $h^{(p)} = h^{(p+1)}$.

Il résulte d'abord de la définition que

$$h^{(p)} = h^{(p+1)} = \dots = h^{(p+q)} \quad (\forall q > 1).$$

On en déduit pour tout $h \in H$ p -régulier l'existence d'un endomorphisme quasi-inverse de h défini par

$$h^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} h^{(k)} = h^{(p)} = h^{(p+1)} = \dots = h^{(p+q)}.$$

De plus, h^* vérifie les deux relations

$$h^* = e \oplus h^* \otimes h = e \oplus h \otimes h^*$$

(en effet, l'associativité de \otimes permet d'écrire : $h^k \otimes h = h \otimes h^k = h^{k+1}$).

Nous dirons alors qu'un graphe $G = [X, U]$ est sans circuit p -absorbant si et seulement si l'endomorphisme $t(\gamma)$ (transition) associé à chaque circuit γ de G est p -régulier.

En particulier, un graphe G est sans circuit 0-absorbant si pour tout circuit γ de G on a

$$t(\gamma) \oplus e = e.$$

THÉORÈME 1 : Si G est sans circuit p -absorbant, alors :

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\pi}^{\oplus} t(\pi)$$

où la sommation s'étend à l'ensemble des chemins de x_i à x_j de k arcs au plus, et n'empruntant pas plus de p fois successivement chaque circuit de G .

La démonstration utilise seulement la distributivité de \otimes à droite et à gauche par rapport à la loi \oplus et la p -régularité de $t(\gamma)$ pour tout circuit γ de G .

Un important résultat, conséquence du théorème 1 est obtenu lorsqu'on fait $p = 0$ [$t(\gamma) \oplus e = e$ pour tout circuit γ]. On obtient alors le :

THÉORÈME 2 : Si G est sans circuit 0-absorbant alors :

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\pi}^{\oplus} t(\pi),$$

où la sommation s'étend à l'ensemble des chemins élémentaires (c'est-à-dire : sans circuit) entre x_i et x_j et ne comportant pas plus de k arcs. En conséquence

$$a_{ij}^{(N-1)} = \sum_{\pi \in N_{ij}}^{\oplus} t(\pi),$$

où N_{ij} est l'ensemble des chemins élémentaires de x_i à x_j .

Enfin

$$A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = A^{(N-1)} = A^{(N)} = \dots$$

et A^* vérifie

$$A^* = A \oplus A^* \otimes A = A \oplus A \otimes A^*.$$

Ce théorème permet de rendre compte d'un certain nombre de problèmes de cheminement dans lesquels les chemins que l'on recherche ont la propriété d'être élémentaires. Ainsi par exemple le problème du plus court chemin dans un graphe G sans circuit de longueur négative.

Ceci dit, dans le cas $p \geq 1$ il n'est pas possible de démontrer avec les seules hypothèses du *théorème 1* la convergence finie de la suite $A^{(k)}$. La cardinalité des chemins intervenant dans l'énoncé du *théorème 1* ne peut en effet être bornée [18]. Si, par contre, on fait l'hypothèse que les endomorphismes a_{ij} ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N$) commutent on obtient :

THÉORÈME 3 (M. Gondran, 1974) : *Si G est sans circuit p -absorbant ($p \geq 1$) et si les endomorphismes $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,N}}$ commutent alors on a*

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\pi}^{\oplus} t(\pi),$$

où la sommation s'étend à l'ensemble des chemins de x_i à x_j de k arcs au plus, et n'empruntant pas plus de p fois chaque circuit élémentaire de G .

De plus, il existe un nombre $K < +\infty$ tel que

$$A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = A^{(K)} = A^{(K+1)} = \dots$$

et A^* vérifie :

$$A^* = A \oplus A^* \otimes A = A \oplus A \otimes A^*.$$

Démonstration : Comme tout circuit de G peut se décomposer en une somme de circuits élémentaires, la commutativité des endomorphismes a_{ij} permet d'écrire pour tout chemin π_{ij} de x_i à x_j :

$$t(\pi_{ij}) = t(\pi_{ij}^0) \otimes [t(\gamma_1)]^{\alpha_1} \otimes [t(\gamma_2)]^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes [t(\gamma_v)]^{\alpha_v},$$

où π_{ij}^0 est un chemin élémentaire de x_i à x_j , où v ($v < +\infty$) est le nombre de circuits élémentaires de G , et où α_n (pour $n = 1, \dots, v$) désigne le nombre de fois que le chemin π_{ij} emprunte le circuit élémentaire γ_n . On peut appliquer alors la démonstration du *théorème 1*. La seconde partie du *théorème 3* découle du fait que la cardinalité des chemins en question est bornée. En effet, un circuit élémentaire de G comporte au plus N arcs, et par suite, le plus long chemin n'empruntant pas plus de p fois chaque circuit élémentaire de G n'aura pas plus de

$$K = v.p.N + N - 1 \text{ arcs.}$$

C. Q. F. D.

5) Endomorphismes K -stables. Définition et résultats

Le théorème 3 ne s'applique pas dans le cas général où $p \geq 1$ et où \otimes n'est pas commutative. Nous allons montrer que, moyennant d'autres hypothèses, il est encore possible d'établir la convergence de la suite des matrices $A^{(k)}$.

DÉFINITION : Soit $H' \subset H$ un sous-ensemble d'endomorphismes de H . Nous dirons que les endomorphismes de H' sont K -stables si il existe un entier $K < +\infty$ tel que

$$\begin{aligned} \forall h_1, h_2, h_3, \dots, h_K \in H', \\ h_1 \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_K = h^\varepsilon. \end{aligned}$$

On observera que tous les éléments d'un ensemble d'endomorphismes K -stables sont K -réguliers. L'hypothèse de la K -stabilité est donc plus forte que celle de la K -régularité.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 4 : Si le sous-ensemble d'endomorphismes $H' = \{ a_{ij} / (x_i, x_j) \in U \}$ est K -stable (K entier $< +\infty$) alors on a

$$A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = A^{(K)} = A^{(K+1)} = \dots$$

et A^* vérifie

$$A^* = A \oplus A^* \otimes A = A \oplus A \otimes A^*.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que tous les chemins de plus de K arcs n'ont pas à être pris en compte dans (II.2). En effet on a

$$a_{ij}^K = h^\varepsilon \quad (\forall i \text{ et } \forall j),$$

et par suite :

$$A^K = A^{K+1} = \dots = A^{K+q} = [h^\varepsilon] \quad (\forall q > 0).$$

Beaucoup de problèmes de cheminement sur $G = [X, U]$ se ramènent au calcul de la matrice A^* des théorèmes 2,3 et 4.

Nous verrons cependant que les problèmes « non classiques » ne peuvent pas être résolus de cette manière.

6) Structures algébriques généralisées et problèmes de cheminement classiques

Les différents problèmes de cheminement étudiés dans [5] et [17], par exemple, rentrent dans le cadre des structures algébriques généralisées ci-dessus et correspondent au cas particulier où :

a) S est muni d'une loi de composition interne \star (associative, élément neutre e' , distributive à droite et à gauche pour \oplus , élément absorbant ε);

b) à chaque endomorphisme a_{ij} est associé de façon biunivoque un élément α_{ij} de S (en particulier à l'endomorphisme h^e on associe l'élément absorbant $\varepsilon \in S$; à l'endomorphisme identité e on associe $e' \in S$);

c) les endomorphismes a_{ij} sont définis par

$$a_{ij}(s) = \alpha_{ij} \star s \quad (\forall s \in S).$$

Il en résulte que les endomorphismes a_{ij} appartiennent tous à un sous-ensemble H' de H , stable vis-à-vis des opérations \oplus et \otimes et tel que (H', \otimes) soit isomorphe à (S, \star) .

Bien que restrictives, les conditions a) b) c) sont satisfaites par un grand nombre d'exemples; entre autres :

- problèmes d'existence de chemins (connexité...) [17];
- problèmes d'énumération (énumération de chemins, de circuits hamiltoniens, etc.) [24];
- problèmes d'optimisation (chemin de capacité maximale, [21], [22], plus court chemin, plus long chemin – P.E.R.T. – chemin de fiabilité maximale [17], k plus courts chemins [25], [26], etc.);
- problèmes de dénombrement [17].

Pour tous ces problèmes, il existe de nombreux algorithmes de calcul direct de A^* .

7) Problèmes de cheminement « non classiques »

La suite de cet article sera consacrée plus particulièrement aux problèmes de cheminement pour lesquels on sait que la matrice d'endomorphismes A^* existe, mais ne peut pas être calculée directement :

- soit parce que les endomorphismes a_{ij} ne sont connus que par leur effet sur les éléments de S (c'est-à-dire point par point);
- soit parce que le produit de deux endomorphismes tels que a_{ij} et a_{jk} n'est connu que par son effet sur des éléments de S (point par point).

A défaut de la matrice A^* , on se contentera dans ce cas, de déterminer l'effet des endomorphismes $a_{i,1}^*$, $a_{i,2}^*$, ..., $a_{i,N}^*$ sur un élément particulier E_i^0 de S (état initial du sommet x_i considéré comme origine).

Le chapitre suivant est consacré à l'étude d'un exemple de problème « non classique » (référence [20]).

III. — UN EXEMPLE : LE PROBLÈME DU PLUS COURT CHEMIN AVEC CONTRAINTES TEMPORELLÈS (P.C.C.T.)

1) Dans la suite, on appellera S l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ constituées par des collections finies d'intervalles fermés de $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Tout élément $a \in S$ correspond donc à la donnée de deux vecteurs (α, β) de dimension finie $q(a)$, et de composantes

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q(a)}],$$

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{q(a)}]$$

et vérifiant d'autre part

$$\alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2 < \dots < \alpha_{q(a)} \leq \beta_{q(a)}.$$

Par convention, des intervalles tels que $[t, +\infty]$, et \emptyset (intervalle vide) appartiennent à S .

2) On définit dans S l'opération \oplus (union de deux collections finies d'intervalles) par

$$a \in S, b \in S, a \oplus b = \{t/t \in a \text{ ou } t \in b\}.$$

L'ensemble S muni de \oplus a une structure de monoïde commutatif (\oplus est interne, commutative, associative). L'ensemble vide \emptyset est l'élément neutre de \oplus .

3) L'intersection \cap de deux collections a et b est définie de façon classique

$$a \cap b = \{t/t \in a \text{ et } t \in b\}.$$

4) On définit également dans S une opération externe notée T (translation) par

$$a \in S, \tau \in \mathbf{R}^+, \tau T a = \{t + \tau/t \in a\}.$$

5) Enfin, on définit une opération interne notée \mathbf{L} appelée « extension d'une collection a par une collection b » de la manière suivante :

si

$$a = \{[\alpha_1, \alpha'_1], [\alpha_2, \alpha'_2], \dots, [\alpha_p, \alpha'_p]\},$$

$$b = \{[\beta_1, \beta'_1], [\beta_2, \beta'_2], \dots, [\beta_q, \beta'_q]\}$$

alors

$$a \mathbf{L} b = c = [\gamma_1, \gamma'_1] \oplus [\gamma_2, \gamma'_2] \oplus \dots \oplus [\gamma_p, \gamma'_p]$$

juin 1976.

avec pour $1 \leq i \leq p$:

$$\begin{aligned} [\gamma_i, \gamma'_i] &= [\alpha_i, \alpha'_i] && \text{si } \alpha'_i \notin b \\ &= [\alpha_i, \beta'_j] && \text{si } \alpha'_i \in [\beta_j, \beta'_j]. \end{aligned}$$

On notera que l'opération \mathbf{L} est associative mais *non commutative*.

6) Soit $G = [X, U]$ un graphe simple orienté et fini.

A chaque arc $u = (x_i, x_j) \in U$ on associe :

– un nombre réel $d_{ij} \geq 0$ mesurant le temps de parcours de l'arc u de x_i à x_j ;

– un élément $V_{ij} \in S$ représentant l'ensemble des instants de départ possible de x_i pour aller vers x_j sur l'arc $u = (x_i, x_j)$.

D'autre part, à chaque sommet $x_i \in X$ on associe un élément W_i de S représentant l'ensemble des instants t où le parking est autorisé au nœud x_i .

[N.B. : Si G n'est pas *simple* on peut toujours se ramener au cas où G est simple. En effet, si $u' = (x_i, x_j)$ et $u'' = (x_i, x_j)$ sont deux arcs entre x_i et x_j , il suffit d'associer $V_{ij} = V'_{ij} \oplus V''_{ij}$ à l'un des deux arbitrairement retenu.]

7) Le problème exposé et résolu en [20] est le suivant : étant donné deux nœuds $s \in X$, $t \in X$, $s \neq t$ trouver le plus court chemin (au sens des temps de parcours) entre s et t , compatible avec les contraintes temporelles définies par les V_{ij} (sur les arcs) et les W_i (dans les nœuds).

8) L'état d'un nœud $x_i \in X$, est l'élément E_i de S représentant l'ensemble des instants d'arrivées possibles en x_i à partir de l'origine s . Soit $u = (x_i, x_j)$ un arc quelconque issu de x_i . Désignons par E_j l'ensemble des instants d'arrivées possibles en x_j à partir de s en passant par x_i . Alors E_j est défini à partir de E_i par les formules de transition (cf. référence [20]) :

$$D_i = E_i \mathbf{L} W_i, \quad (\text{III.1})$$

$$E_j = d_{ij} \mathbf{T} (D_i \cap V_{ij}). \quad (\text{III.2})$$

(REMARQUE : dans (III.1) D_i représente l'ensemble des instants de départs possibles de x_i sans préciser quel arc issu de x_i sera effectivement utilisé.)

On peut écrire (III.1) et (III.2) de façon condensée sous la forme

$$E_j = d_{ij} \mathbf{T} [(E_i \mathbf{L} W_i) \cap V_{ij}] = h_{ij}(E_i)$$

où l'application (transition) h_{ij} de $S \rightarrow S$ est entièrement déterminée par

la donnée du triplet $\begin{bmatrix} d_{ij} \\ V_{ij} \\ W_i \end{bmatrix}$. L'application h_{ij} est un endomorphisme de S car,

pour chacune des opérations \mathbf{T} , \cap , \mathbf{L} et

$$\forall E \in S, F \in S, G \in S, W \in S, \tau \in \mathbf{R}^+$$

on a :

$$\begin{aligned} \tau T(E \oplus F) &= (\tau T E) \oplus (\tau T F), \\ (E \oplus F) \perp W &= (E \perp W) \oplus (F \perp W), \\ (E \oplus F) \cap G &= (E \cap G) \oplus (F \cap G). \end{aligned}$$

9) Nous considérons l'ensemble H' des endomorphismes h déterminés par la donnée d'un triplet

$$h = [\tau, V, W], \quad \tau \in \mathbf{R}^+, \quad V \in S, \quad W \in S.$$

L'endomorphisme identité e appartient à H' car il correspond à

$$\tau = 0, \quad V = \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}, \quad W = \emptyset.$$

Si $\varepsilon = \emptyset$ est l'élément neutre de \oplus on a bien

$$h(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall h \in H'.$$

La loi \otimes (composition des endomorphismes de H') n'est pas commutative. L'endomorphisme h^ε qui à tout $E \in S$ associe $\varepsilon = \emptyset$ est de la forme

$$h^\varepsilon = [0, \emptyset, \emptyset].$$

Cet élément est absorbant pour \otimes .

10) Associons à chaque arc $u = (x_i, x_j) \in U$ de G l'endomorphisme de H' défini par

$$a_{ij} = h_{ij} = [d_{ij}, V_{ij}, W_i]$$

et à tout couple $(x_i, x_j) \notin U$:

$$a_{ij} = h^\varepsilon = [0, \emptyset, \emptyset].$$

Ceci définit la matrice d'adjacence généralisée

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N}}$$

On peut alors — en théorie du moins — calculer les puissances successives A^k de A et définir les matrices d'endomorphismes $A^{(k)}$. Cependant *ceci est impossible en pratique* car on peut vérifier que le produit de deux endomorphismes h_{ij} et h_{jk} associés à deux arcs (x_i, x_j) et (x_j, x_k) consécutifs, ne peut être assimilé à un triplet $[\tau, V, W]$. Par suite le produit $h_{ij} \circ h_{jk}$ ne peut être connu que par son effet sur des éléments de S . On renoncera donc à calculer les $A^{(k)}$ explicitement, et l'on se contentera de déterminer l'image, par ces endomorphismes, de l'état initial E_1^0 d'un nœud x_1 considéré comme origine.

juin 1976.

11) Soit E_1^0 l'état du nœud x_1 (origine) : c'est l'ensemble des instants où un convoi peut être envoyé du nœud x_1 dans le réseau de communication. En général $E_1^0 = \{ [0, +\infty] \}$. Alors

$$a_{1j}^k(E_1^0) = \sum_{\pi \in P_{1j}^k}^{\oplus} t(\pi)(E_1^0)$$

représente l'ensemble des instants d'arrivées possibles en x_j à partir de x_1 et en empruntant des chemins de k arcs exactement, et

$$a_{1j}^{(k)}(E_1^0) = \sum_{\pi \in P_{1j}^{(k)}}^{\oplus} t(\pi)(E_1^0)$$

représente l'ensemble des instants d'arrivées possibles en x_j à partir de x_1 et en empruntant des chemins de k arcs au plus.

12) Compte tenu du fait que les endomorphismes a_{ij} ne commutent pas, il faut pour établir l'existence de A^* démontrer que les endomorphismes de $H'' = \{ a_{ij}/(x_i, x_j) \in U \}$ sont K -stables avec $K < +\infty$.

Nous supposons comme dans [20] que l'on a

$$d_{ij} > 0, \quad \forall (x_i, x_j) \in U.$$

[S'il existe des arcs (x_i, x_j) tels que $d_{ij} = 0$, on contracte le graphe G relativement aux sommets x_i et x_j et on se ramène au cas précédent.]

Définissons dans S la relation de préordre (total) suivante :

$$E \leq F \Leftrightarrow \min \{ t/t \in \mathbf{R}^+, t \in E \} \leq \min \{ t/t \in \mathbf{R}^+, t \in F \}$$

(par convention : si $E = \emptyset$, $\min \{ t/t \in \mathbf{R}^+, t \in E \} = +\infty$).

On remarque alors que pour $a_{ij} \in H''$ et $\forall E \in S$ on a

$$a_{ij}(E) \geq d_{ij} \mathbf{T} E \geq d_{\min} \mathbf{T} E, \quad (\text{III. 3})$$

où

$$d_{\min} = \min \{ d_{ij}/(x_i, x_j) \in U \} > 0.$$

Soit t_{\max} la plus grande composante des vecteurs descriptifs des collections V_{ij} et W_i . (Lorsque les collections V_{ij} et W_i contiennent des intervalles du type $[\tau, +\infty]$, il est facile de montrer que l'on peut borner supérieurement les instants d'arrivées en chaque nœud et, par conséquent, que l'on peut toujours se ramener au cas où $t_{\max} < +\infty$). Si $K = \text{partie entière}(t_{\max}/d_{\min}) + 1$, on peut écrire d'après (III.3) et $\forall h_1, h_2, \dots, h_K \in H''$:

$$\bar{h}(E) = h_1 \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_K(E) \geq t_{\max} \mathbf{T} E \quad (\forall E \in S)$$

et par suite

$$\bar{h}(E) = \emptyset \quad (\forall E \in S),$$

ce qui démontre la *K-stabilité* des endomorphismes de H'' .

13) On déduit alors du *théorème 4* l'existence de A^* ; l'interprétation de A^* est la suivante :

$$A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = A^{(K)} = A^{(K+1)} = \dots$$

$a_{1,j}^*(E_1^0)$ représente l'ensemble de *tous* les instants d'arrivées possibles en x_j à partir de x_1 .

Les chapitres suivants seront consacrés à l'étude des différents algorithmes de calcul des $a_{1,j}^*(E_1^0)$ ($\forall j = 2, \dots, N$) applicables aux problèmes « non classiques ».

Comme nous allons le voir ce sont des généralisations des algorithmes de Ford [13] et de Dijkstra [9] (dérivés des méthodes itératives de résolution du système d'équations linéaires $A^* = A \oplus A^* \otimes A$).

Les autres algorithmes applicables aux problèmes « classiques » comme ceux de Floyd [12] et de Dantzig [7] (dérivés des méthodes d'inversion pour la résolution de $A^* = A \oplus A^* \otimes A$) ne semblent pas susceptibles d'une telle généralisation.

IV. — ALGORITHMES DE FORD ET DE MOORE GÉNÉRALISÉS

On s'intéresse donc ici aux chemins de G d'origine, x_1 pour fixer les idées.

Lorsque \oplus n'est pas idempotente, on généralise l'algorithme de Bellman [2] qui n'est autre que la méthode de Jacobi appliquée à l'équation : $A^* = A \oplus A \otimes A^*$ ([16], [17]).

Si E_i^t ($i = 1, \dots, N$) sont les états des nœuds à l'étape t , les états E_i^{t+1} sont calculés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1^{t+1} = \sum_{i=1}^N a_{i1}(E_i^t) \oplus E_1^0, \\ E_j^{t+1} = \sum_{i=1}^N a_{ij}(E_i^t) \quad (\forall j \neq 1). \end{array} \right.$$

Si on a : $A^{(K)} = A^*$, alors l'algorithme converge en K étapes au plus.

Lorsque \oplus est idempotente, l'algorithme de Bellman généralisé peut être amélioré pour donner l'algorithme de Ford [13] généralisé :

ALGORITHME (A 1)

1) *itération* $k = 0$:

$$E_1 = E_1^0 \in S,$$

$$E_i = \varepsilon, \quad \forall i = 2, \dots, N;$$

2) *itération* $k = k+1$, *modif* = 0;3) *pour tout arc* $u = (x_i, x_j) \in U$ ($E_i \neq \varepsilon$) :● *calculer*

$$E'_j = E_j \oplus a_{ij}(E_i),$$

● si $E'_j \neq E_j$, *modif* = 1,● *poser* $E_j = E'_j$;4) *si modif* = 0, *fin de l'algorithme*. On a $E_i = a_{1,i}^*(E_1^0)$ sinon, retourner en 2).

La variable *modif* est destinée à vérifier si des sommets ont changé d'état au cours de l'itération k . On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 5 : si $A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = A^{(K)}$ alors l'algorithme (A 1) converge en K itérations au plus.

Démonstration : Elle découle directement des propriétés 1 et 2 du § II, et de l'idempotence de \oplus , en remarquant que si $a_{1,j}^{(k)}$ converge de façon finie vers $a_{1,j}^*$ alors $a_{1,j}^{(k)}(E_1^0)$ converge vers $a_{1,j}^*(E_1^0)$, $\forall E_1^0 \in S$.

Rappelons ici que l'algorithme de Ford est une adaptation de la méthode de Gauss-Seidel à la résolution du système $A^* = A \oplus A^* \otimes A$ (cf. [5], [16]).

Lorsque la loi \oplus est *idempotente* ($a \oplus a = a$, $\forall a \in S$) on peut encore améliorer l'algorithme (A 1) de façon intéressante.

Un sommet x_i sera dit *marqué* à l'itération k si son état E_i a été modifié à l'itération k . Un sommet x_i sera dit *examiné* à l'itération k si pour tous les sommets x_j tels que $(x_i, x_j) \in U$ on a effectué les transformations :

$$\begin{cases} E'_j = E_j \oplus a_{ij}(E_i), \\ E_j = E'_j. \end{cases}$$

On observe alors qu'il est inutile d'examiner dans (A 1) à l'itération k un sommet x_i examiné à une itération $l < k$ et non marqué depuis.

En effet à l'itération l on a calculé

$$E_j^2 = E_j^1 \oplus a_{ij}(E_i^1)$$

pour x_j tel que $(x_i, x_j) \in U$ et par suite, à l'itération k , l'état du sommet x_j peut s'écrire en toute généralité

$$E_j^3 = E_j^1 \oplus a_{ij}(E_i^1) \oplus F_j \quad (\text{avec } F_j \in S)$$

(F_j exprime les nouveaux marquages qui ont lieu entre l'itération l et l'itération k à partir d'autres sommets que x_i .)

Comme, à l'itération k , l'état de x_i est toujours E_i^1 le marquage de x_j donnerait

$$E_j^4 = E_j^3 \oplus a_{ij}(E_i^1) = E_j^1 \oplus F_j \oplus a_{ij}(E_i^1) \oplus a_{ij}(E_i^1)$$

et, d'après l'idempotence de \oplus :

$$E_j^4 = E_j^3.$$

Ceci est vrai $\forall x_j$ tel que $(x_i, x_j) \in U$. D'où la propriété.

En tenant compte de cette remarque, et en désignant à l'étape courante, l'ensemble des sommets marqués par $X_2 \subset X$, on obtient l'algorithme de Moore généralisé.

ALGORITHME (A 2)

1) *itération* $k = 0$:

$$E_1 = E_1^0 \in S, \quad E_i = \varepsilon, \quad \forall i = 2, \dots, N,$$

$$X_2 = \{x_1\};$$

2) *itération* $k = k + 1$, *sélectionner un sommet quelconque* $x_i \in X_2$:

$$X_2 = X_2 - \{x_i\};$$

3) *pour tous les arcs* $(x_i, x_j) \in U$:

● *calculer*

$$E'_j = E_j \oplus a_{ij}(E_i),$$

● *si* $E'_j \neq E_j$ *alors* :

$$X_2 = X_2 \cup \{x_j\},$$

● *faire* $E_j = E'_j$;

4) *si* $X_2 = \emptyset$, *fin de l'algorithme* :

$$\text{on a : } a_{1j}^*(E_1^0) = E_j, \quad \forall x_j \in X$$

sinon retourner en 2).

L'algorithme (A 2) étant simplement une forme particulière de (A 1) dans laquelle on évite un certain nombre de marquages inutiles, il s'ensuit que :

- la convergence de (A 2) découle de celle de (A 1);
- la convergence de (A 2) est plus rapide (moins de marquages).

L'algorithme (A 2) sera utilisé au chapitre suivant pour établir la convergence de l'algorithme de Dijkstra généralisé.

[REMARQUE : Pour adapter les deux algorithmes (A 1) et (A 2) au cas classique, (cf. II.6) il suffit de remplacer le calcul de E'_j par $E'_j = E_j \oplus \alpha_{ij} \star E_i$.]

V. — ALGORITHME DE DIJKSTRA GÉNÉRALISÉ

Considérons le cas particulier du (P.C.C.T.) où l'on se donne une origine x_1 et où on recherche des chemins permettant d'atteindre *au plus tôt* chacun des autres nœuds x_2, x_3, \dots, x_N de G . Nous allons montrer qu'il n'est pas nécessaire [comme dans l'algorithme (A 2)] de rechercher *tous* les instants d'arrivées possibles E_j^* en x_j à partir de x_1 , à condition de faire un certain nombre d'hypothèses supplémentaires.

Explicitons tout d'abord ces hypothèses dans le cas général.

Nous supposons que S est muni d'une relation de *préordre total* notée \leq et que l'on a :

HYPOTHÈSE (H 1) : *La loi \oplus est idempotente ($a \oplus a = a, \forall a \in S$).*

HYPOTHÈSE (H 2) : *Pour $a \in S, b \in S, c \in S$, vérifiant $a \geq c$ et $b \geq c$, alors $a \oplus b \geq c$.*

HYPOTHÈSE (H 3) : *Si*

$$h \in H' = \{ a_{ij} / (x_i, x_j) \in U \} \cup \{ h^\varepsilon \}$$

alors $h(a) \geq a, \forall a \in S$.

Observer d'abord que (H 3) $\Rightarrow h^\varepsilon(a) = \varepsilon \geq a (\forall a \in S)$ autrement dit ε est un « plus grand élément de S ». Noter ensuite que si π est un chemin de G alors (H 3) $\Rightarrow t(\pi)(a) \geq a (\forall a \in S)$ [où $t(\pi)$ est la transition associée à π].

Dans le cas particulier de (P.C.C.T.) on notera que la relation de préordre total définie en (III.12), vérifie (H 1), (H 2) et (H 3).

Ceci étant, il est important, pour ce qui suit, de garder présent à l'esprit le fait que l'élément minimum d'un sous-ensemble $S' \subset S$ de S au sens de \leq n'est pas unique en général (la relation \leq n'étant pas antisymétrique).

[N.B. : Lorsqu'il s'agit de trouver des états maximaux dans S il faut changer le sens de la relation de préordre dans (H 2) et (H 3).]

Énonçons maintenant l'algorithme de Dijkstra [9] généralisé.

ALGORITHME (A 3) :

1) *itération* $k = 0$:

$$E_1 = E_1^0 \in S, \quad E_i = \varepsilon, \quad \forall i = 2, \dots, N,$$

$$X_1 = \emptyset,$$

$$X_2 = \{x_1\};$$

2) *itération* $k = k+1$, choisir un sommet x_m de X_2 vérifiant :

$$E_m \leq E_i, \quad \forall x_i \in X_2;$$

3)

$$X_1 = X_1 \cup \{x_m\},$$

$$X_2 = X_2 - \{x_m\};$$

4) si $X_1 = X$ fin de l'algorithme : les états E_j sont minimaux pour tous les $x_j \in X$. Sinon aller en 5);

5) pour tous les arcs $(x_m, x_j) \in U$:

- calculer $E'_j = E_j \oplus a_{mj}(E_m)$,
- si $E'_j \neq E_j$ poser $X_2 = X_2 \cup \{x_j\}$,
- $E_j = E'_j$;

6) si $X_2 = \emptyset$, fin de l'algorithme. Sinon, retourner en 2).

La convergence finie de (A 3) découle directement de celle de (A 2). En effet (A 3) ne diffère de (A 2) que par :

- une règle de sélection du nœud à examiner en 2);
- un critère d'arrêt supplémentaire en 4).

Évidemment la règle de sélection de x_m n'influe pas sur la convergence. D'autre part, un critère d'arrêt supplémentaire ne peut que diminuer le nombre d'itérations [c'est pourquoi lorsque (H 1), (H 2) et (H 3) sont satisfaites, on a toujours intérêt à utiliser (A 3) plutôt que (A 2)].

Pour démontrer que l'algorithme trouve bien un état minimal E_j pour chaque nœud x_j , il suffit donc de s'assurer que E_m est minimal dans S lorsque le nœud x_m est transféré pour la première fois dans X_1 . Plaçons-nous à l'étape k où le nœud x_m n'appartient pas encore à X_1 mais où x_m est le nœud choisi en 2). Par construction

$$E_m \leq E_j (\forall x_j \in X_2).$$

Montrons alors que E_m est un état minimal de x_m .

En notant P_{ij} l'ensemble des chemins entre x_i et x_j dans G , définissons pour $x_j \in X$:

$$E_j^* = a_{1j}^*(E_1^0) = \sum_{\pi \in P_{1j}} t(\pi)(E_1^0)$$

[E_j^* est l'état du nœud j qui serait obtenu après convergence de l'algorithme (A 2).]

Pour obtenir les E_j^* ($\forall x_j \in X$) on peut très bien appliquer (A 2) à partir de l'étape k de (A 3) [il suffit de supprimer le test d'arrêt en 4)]. Certains des états des différents nœuds de G vont ainsi pouvoir être encore modifiés, mais on remarque que ceci se fera toujours par des transitions issues des nœuds de X_2 (en effet, les nœuds de X_1 étant marqués et examinés, pour continuer le marquage on devra nécessairement partir d'un nœud de X_2). On peut donc écrire en toute généralité :

$$E_j^* = E_j \oplus \sum_{x_1 \in X_2} \oplus \sum_{\pi \in P_{1j}} t(\pi)(E_1) \quad (\forall x_j \in X).$$

Mais on sait que l'on a $t(\pi)(E_1) \geq E_1$ [hypothèse (H 3)], et par conséquent

$$E_j^* = E_j \oplus \sum_{x_1 \in X_2} \oplus F_1 \quad (\text{avec } F_1 \geq E_1 \geq E_m, \forall x_1 \in X_2).$$

En particulier, pour $x_j = x_m$ on a

$$E_m^* = E_m \oplus \sum_{x_1 \in X_2} \oplus F_1 \quad (\text{avec } F_1 \geq E_m, \forall x_1 \in X_2)$$

et en vertu de l'hypothèse (H 2) :

$$E_m \leq E_m^*,$$

C. Q. F. D.

E_m est donc bien minimal, comme E_m^* , mais ceci n'implique pas l'égalité puisque \leq n'est pas antisymétrique.

Dans (A 3) X_1 représente donc à chaque itération l'ensemble des nœuds pour lesquels un état minimal a déjà été trouvé. [La signification de (X_2) est inchangée par rapport à (A 2).]

Ceci étant, il importe de remarquer que (A 3) n'est pas du tout identique à l'algorithme classique de Dijkstra [9] employé pour la recherche des plus courts chemins avec longueurs ≥ 0 . En effet (A 3) ne converge pas en général en N itérations. C'est le cas lorsqu'il est appliqué à (P.C.C.T.) par exemple.

Pour démontrer la convergence de (A 3) en N itérations, il faut ajouter une hypothèse supplémentaire sur la loi \oplus et sur la relation de préordre \leq , comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 6 : Si les hypothèses (H 2) et (H 3) sont vérifiées et si, de plus, on a

$$(H 4) \quad \forall a \in S, \quad \forall b \in S, \quad b \geq a \Rightarrow a \oplus b = a,$$

alors l'algorithme de Dijkstra généralisé converge en N itérations au plus.

Démonstration : L'hypothèse (H 4) entraîne l'idempotence de \oplus car

$$\forall a \in S, \quad a \geq a$$

et d'après (H 4) :

$$a \geq a \Rightarrow a \oplus a = a \quad (\forall a \in S).$$

Donc (H 2), (H 3), (H 4) \Rightarrow (H 1), (H 2), (H 3), (H 4) et les résultats obtenus sur (A 3) s'appliquent.

Reprenons maintenant la démonstration de la convergence de (A 3). On sait que l'on peut écrire $\forall x_j \in X$:

$$E_j^* = E_j \oplus \sum_{x_l \in X_2}^{\oplus} F_l \quad \text{avec} \quad F_l \geq E_m.$$

En particulier pour x_m :

$$E_m^* = E_m \oplus \sum_{x_l \in X_2}^{\oplus} F_l \quad \text{avec} \quad F_l \geq E_m,$$

d'où par (H 4) :

$$E_m^* = E_m.$$

L'état E_m va donc rester inchangé dans toutes les itérations suivantes et on aura par suite :

$$x_m \notin X_2.$$

Il en résulte qu'à chaque itération les ensembles X_1 et X_2 sont disjoints. Comme la cardinalité de X_1 augmente de 1 à chaque itération, l'algorithme s'arrêtera soit lorsque $\text{card}(X_1) = N$ soit lorsque $X_2 = \emptyset$ c'est-à-dire au bout de N itérations au plus.

C. Q. F. D.

REMARQUE : Pour adapter l'algorithme (A 3) au cas « classique » (cf. II. 6) il suffit de remplacer le calcul de E'_j par

$$E'_j = E_j \oplus \alpha_{mj} \star E_m.$$

VI. — QUELQUES PROBLÈMES DE CHEMINEMENT NON CLASSIQUES ET LEUR RÉOLUTION

Nous allons voir sur quelques exemples qu'une classe importante de problèmes peut se formuler et se résoudre dans le cadre des structures généralisées (S, H, \oplus, \otimes) .

1) Plus court chemin avec longueurs des arcs dépendant du temps ([6], [10])

$$S = \mathbf{R} \cup \{ +\infty \}, \quad \oplus = \min, \quad \varepsilon = \{ +\infty \}.$$

A chaque arc (x_i, x_j) de G on associe une fonction réelle du temps $t_j = h_{ij}(t_i)$ donnant le temps t_j d'arrivée en x_j lorsqu'on part de x_i à l'instant t_i . La condition pour que h_{ij} soit un endomorphisme de S est que

$$h_{ij}[\min(t, t')] = \min[h_{ij}(t); h_{ij}(t')]$$

c'est-à-dire que la fonction h_{ij} soit croissante (au sens large). (Dreyfus [10] montre que l'on peut toujours se ramener à ce cas). On suppose aussi que

$$h_{ij}(+\infty) = +\infty.$$

D'autre part,

$$h_{ij}(a) \geq a, \quad \forall a \in S$$

entraîne

$$a \oplus t(\gamma)(a) = a$$

pour tout circuit γ et on voit que G est sans circuit 0-absorbant; d'où l'existence de A^* d'après le théorème 2. Si les fonctions h_{ij} n'ont pas toutes la même forme analytique simple (par exemple $h_{ij}(t_i) = t_i + d_{ij}$ ou encore : $h_{ij}(t_i) = t_i \times d_{ij}$, etc.), si par exemple les h_{ij} sont donnés « point par point » (c'est-à-dire par leur effet sur des éléments de S) alors la structure classique de semi-anneau (S, \oplus, \star) est insuffisante pour rendre compte de ce problème.

En revanche, dans la structure (S, H, \oplus, \otimes) on pourra calculer les plus courts chemins d'une origine x_1 aux autres points (il faut préciser l'instant de départ du nœud x_1) par l'un des algorithmes (A 1), (A 2) ou (A 3). Comme les hypothèses requises pour la convergence de (A 3) en N itérations (th. 6) sont vérifiées, on aura intérêt à utiliser ce dernier. On retrouve alors l'algorithme proposé par Dreyfus dans [10]. Le nombre de calculs est le même que pour un plus court chemin ordinaire (et longueurs ≥ 0).

Une autre application intéressante et aux conséquences pratiques importantes est le problème du plus long chemin (P.E.R.T.) avec longueurs (= durée des tâches) variant en fonction du temps. Si l'on suppose, comme dans un pro-

blème P.E.R.T. normal, l'absence de circuits dans G , l'algorithme de Dijkstra (A 3) peut être utilisé pour apporter une solution efficace à ce problème.

On pourra aussi employer un algorithme de programmation dynamique généralisée [26 a].

Les problèmes que nous allons passer en revue maintenant ne semblent pas encore avoir été étudiés. Tout d'abord une généralisation de l'exemple ci-dessus.

2) Recherche des k plus courts chemins avec longueurs des arcs dépendant du temps

L'étude algébrique du problème des k plus courts chemins avec longueurs constantes apparaît dans [25] et [26]. Comme dans [26] nous prendrons comme ensemble S l'ensemble des k -uples $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ de $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$ (\leq désigne dans ce paragraphe la relation d'ordre classique dans \mathbf{R}). L'addition \oplus est définie par

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in S,$$

$$b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \in S \Rightarrow a \oplus b$$

est le k -uple des k plus petites composantes distinctes de a et de b . L'élément neutre de \oplus est $\varepsilon = (+\infty, +\infty, \dots, +\infty)$. On remarque que \oplus est idempotente.

Comme au paragraphe précédent, on associe à chaque arc (x_i, x_j) de G une fonction réelle f_{ij} telle que $f_{ij}(+\infty) = +\infty$ qui permet de définir l'application h_{ij} de $S \rightarrow S$ par

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \quad h_{ij}(a) = [f_{ij}(\alpha_1), f_{ij}(\alpha_2), \dots, f_{ij}(\alpha_k)].$$

Pour que h_{ij} soit une application de $S \rightarrow S$ il faut bien sûr supposer que

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow f_{ij}(\alpha_1) \leq f_{ij}(\alpha_2)$$

condition qui est vérifiée si les f_{ij} sont des fonctions *croissantes* (au sens large). Cette hypothèse est également suffisante pour que les h_{ij} soient des endomorphismes de S . Comme les h_{ij} ne commutent pas, il faut supposer la K -stabilité des endomorphismes de $H' = \{a_{ij}/(x_i, x_j) \in U\}$ et pour cela il suffit de poser les deux conditions :

- il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que

$$f_{ij}(t) \geq t + \delta, \quad \forall f_{ij} \text{ et } \forall t;$$

- d'autre part, il existe un nombre réel T tel que :

$$t > T \Rightarrow f_{ij}(t) = +\infty$$

conditions qui ne sont pas restrictives en pratique.

On vérifie alors que les endomorphismes de H' sont K -stables avec $K =$ partie entière $(T/\delta) + 1$ et le *théorème 4* prouve l'existence de A^* . Enfin, compte tenu du fait que \oplus est idempotente, l'algorithme (A 2) peut être utilisé pour rechercher les k -plus courts chemins d'une origine x_1 à tous les autres nœuds ⁽¹⁾. (L'instant de départ de x_1 étant précisé.)

3) Plus courts chemins avec actualisation et extensions

A chaque arc (x_i, x_j) de G on associe une longueur qui dépendra, dans un chemin, du nombre d'arcs antérieurement empruntés. Donnons un exemple. Si on interprète le cheminement le long de l'arc (x_i, x_j) comme la réalisation d'un programme d'investissements annuel, le coût de l'arc (x_i, x_j) est : $c_{ij}/(1+\tau)^t$ où t est le nombre d'arcs auparavant empruntés par le chemin, c'est-à-dire l'année de la dépense c_{ij} (τ est le taux d'actualisation).

Considérons, d'une manière plus générale, l'ensemble S des vecteurs à $T+1$ composantes dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$. L'opération \oplus est définie par

$$a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T),$$

$$b = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_T) \Rightarrow c = a \oplus b = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_T)$$

avec

$$\gamma_i = \min \{ \alpha_i, \beta_i \} \quad (i = 0, \dots, T).$$

On remarque que \oplus est idempotente. L'élément neutre est

$$\varepsilon = (+\infty, +\infty, \dots, +\infty).$$

A chaque arc (x_i, x_j) de G on associe :

- un nombre entier $0 < d_{ij} \leq T$;
- une fonction réelle positive $f_{ij}(t)$ (définie pour $t = 0, \dots, T$) telle que $f_{ij}(+\infty) = +\infty$ et la transition h_{ij} est définie par

$$h_{ij}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_T),$$

où

$$\beta_t = +\infty, \quad \text{pour } t < d_{ij},$$

$$\beta_t = \alpha_{t'} + f_{ij}(t') \quad (t' = t - d_{ij}) \quad \text{pour } d_{ij} \leq t \leq T.$$

On vérifie que h_{ij} est un endomorphisme de S et que $h_{ij}(\varepsilon) = \varepsilon$. L'endomorphisme h^ε est défini à partir de $f^\varepsilon(t) = +\infty, \forall t$. Ceci étant, on remarque que les endomorphismes h_{ij} sont T -stables et le *théorème 4* prouve l'existence de A^* .

⁽¹⁾ Dans le résultat ces chemins peuvent contenir des boucles.

Définissons d'autre part dans S la relation de préordre total

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T) \leq (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_T) \Leftrightarrow \min_{i=0, \dots, T} \{\alpha_i\} \leq \min_{i=0, \dots, T} \{\beta_i\}.$$

on a bien

$$a \geq c \quad \text{et} \quad b \geq c \Rightarrow a \oplus b \geq c \quad (\forall a, b, c \in S)$$

et

$$h_{ij}(a) \geq a, \quad \forall (x_i, x_j) \in U \quad \text{et} \quad \forall a \in S.$$

L'algorithme (A 3) s'applique donc à ce problème.

Comme on n'a pas

$$b \geq a \Rightarrow a \oplus b = a$$

on voit que la convergence se fera, en général, en plus de N itérations.

Le problème du plus court chemin avec actualisation évoqué plus haut, correspond au cas particulier où $d_{ij} = 1, \forall (x_i, x_j) \in U$ et où

$$f_{ij}(t) = c_{ij}/(1+\tau)^t$$

[$c_{ij} > 0$ est le coût non actualisé de l'arc (x_i, x_j) .]

Il existe beaucoup d'autres variantes de cette formulation. Signalons entre autres :

- plus courts chemins avec contraintes d'affaiblissement (dans les réseaux de Télécommunications). Dans ce cas $f_{ij}(t)$ est constante et égale à la longueur l_{ij} de l'arc (x_i, x_j) , T est l'affaiblissement maximum toléré (mesuré en décibels), d_{ij} est l'affaiblissement de l'arc (x_i, x_j) . (L'affaiblissement d'un chemin est la somme des affaiblissements, exprimés en décibels, des arcs qui le constituent. On suppose évidemment que les d_{ij} sont des nombres entiers de décibels); ce problème est traité en détail dans [26 b].

- plus court chemin de moins de T arcs. Dans ce cas on prendra $f_{ij}(t)$ constante et égale à la longueur l_{ij} de l'arc (x_i, x_j) pour $0 \leq t \leq T$ et $f_{ij}(t) = +\infty$ pour $t > T$; $d_{ij} = 1$ pour tous les arcs (x_i, x_j) ;

- en substituant les opérations « max » et « min » aux opérations « min » et + dans la formulation ci-dessus on rend compte de la même manière : du problème du chemin de capacité maximale avec contraintes sur le nombre d'arcs (moins de T arcs). Du problème du chemin de capacité maximale et de longueur inférieure à une constante donnée.

(REMARQUE : Ce qui précède peut se généraliser au cas où on ne discrétise pas le temps en prenant pour S l'ensemble des fonctions réelles de t sur $[0, T]$, mais ceci ne présente guère qu'un intérêt théorique : pour que le calcul soit possible, en pratique, il faudra toujours supposer le temps discret.)

4) Chemins de probabilité maximale avec probabilités dépendantes du temps

Nous généralisons ici un problème mentionné dans [17]. L'intervalle de temps fini $[0, T]$ est découpé en k intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, k-1$) (où $t_0 = 0, t_k = T$) de même durée prise comme unité. L'ensemble S est l'ensemble des k -uples

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \quad \text{où } 0 \leq \alpha_i \leq 1.$$

L'état d'un sommet $x_j \in X$ est un élément $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ où α_i désigne la probabilité d'un chemin (produit des probabilités de ses arcs, supposées indépendantes) entre x_1 (origine) et x_j arrivant à l'instant t_i en x_j .

L'opération \oplus sur S est définie par

$$\begin{aligned} a &= (\alpha_i)_{i=1, \dots, k}, & b &= (\beta_i)_{i=1, \dots, k}, \\ a \oplus b &= c = (\gamma_i)_{i=1, \dots, k} & \text{et} & \quad \gamma_i = \max \{ \alpha_i, \beta_i \}, \end{aligned}$$

\oplus est idempotente. L'élément neutre est $\varepsilon = [0, 0, \dots, 0]$.

A chaque arc (x_i, x_j) de G on associe :

a) un nombre entier $d_{ij} > 0$ représentant le temps nécessaire pour se rendre de x_i à x_j ;

b) une fonction $f_{ij}(t)$ ($0 \leq f_{ij} \leq 1$) définie pour $0 \leq t \leq T - d_{ij}$ et représentant la probabilité que l'on a de pouvoir utiliser l'arc (x_i, x_j) pour aller de x_i à x_j entre l'instant t et l'instant $t + d_{ij}$.

L'endomorphisme h_{ij} associé à (x_i, x_j) est alors défini par

$$h_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k),$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_t &= 0 & \text{pour } t < d_{ij} & \quad (t \text{ entier}), \\ \beta_t &= \alpha_{t'} \times f_{ij}(t') & \text{pour } d_{ij} \leq t \leq T & \quad (t' = t - d_{ij}) \end{aligned}$$

[\times désigne ci-dessus la multiplication des réels.]

On vérifiera que h_{ij} est un endomorphisme de S et que $h_{ij}(\varepsilon) = \varepsilon$. L'endomorphisme h^ε est défini à partir d'une fonction $f^\varepsilon(t) = 0, \forall t$.

Les endomorphismes h_{ij} sont k -stables et on déduit du théorème 4 l'existence de A^* . D'autre part définissons dans S la relation de préordre total

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \leq (\beta_1, \dots, \beta_k) \Leftrightarrow \max_{i=1, \dots, k} \{ \alpha_i \} \leq \max_{i=1, \dots, k} \{ \beta_i \}.$$

On a bien

$$a \leq c \quad \text{et} \quad b \leq c \Rightarrow a \oplus b \leq c$$

et

$$h_{ij}(a) \leq a, \quad \forall (x_i, x_j) \in U, \quad \forall a \in S.$$

On pourra donc résoudre ce problème par l'algorithme de Dijkstra généralisé (A 3) pour rechercher un chemin de probabilité maximale de x_1 à x_j ($\forall x_j$) (en supposant que l'on part de x_1 à l'instant 0). (Comme on n'a pas : $a \geq b \Rightarrow a \oplus b = a$ la convergence se fera en général en plus de N itérations.)

Nous pensons que des applications intéressantes de ce qui précède peuvent être trouvées dans le domaine des télécommunications (chemin de probabilité maximale pour traverser un central téléphonique lorsque l'état d'occupation de ses différents organes évolue dans le temps), dans celui de la fiabilité des systèmes etc.

5) Théorie des automates et langages dépendant du contexte

Les liens existant entre les langages réguliers (langages de Kleene ou K -langages) et les problèmes de cheminement dans les graphes ont été étudiés par Carre et Backhouse dans [1].

Rappelons qu'un K -langage est défini par la donnée d'un couple $L = (V, \Gamma)$ où :

a) V est un alphabet

$$V = \{ V_a, V_t \},$$

$V_a = \{ A_i \}_{i \in I}$ est l'alphabet auxiliaire, $V_t = \{ a_j \}_{j \in J}$ est l'alphabet terminal, (l'ensemble des mots — chaînes finies de caractères — de V est noté V^*);

b) Γ est une K -grammaire c'est-à-dire une série de règles (dites : de production) indépendantes du contexte, de la forme

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} A_i \rightarrow a_j A_k & (\text{règle non terminale}), \\ A_i \rightarrow a_j & (\text{règle terminale}). \end{cases}$$

A toute K -grammaire on associe le graphe orienté $G = [X, U]$ dont l'ensemble des sommets est $X = V_a \cup \{ T \}$ (T est le sommet « terminal ») et dans lequel

$$\begin{aligned} (A_i, A_k) \in U &\Leftrightarrow \text{la règle } [A_i \rightarrow a_j A_k] \in \Gamma, \\ (A_i, T) \in U &\Leftrightarrow \text{la règle } [A_i \rightarrow a_j] \in \Gamma. \end{aligned}$$

Le sommet « initial » (ou : axiome) A_{i_0} est de demi-degré intérieur nul dans G .

La génération des mots de L équivaut alors (cf. [1]) à l'énumération des chemins de A_{i_0} à T dans G .

Le problème de la reconnaissance [c'est-à-dire : étant donné un mot de degré k ⁽¹⁾, déterminer s'il appartient ou non à $L = (V, \Gamma)$] revient à énumérer

(1) Le degré d'un mot $\varphi \in V^*$, noté : $\delta[\varphi]$, est le nombre des caractères qui le composent.

tous les chemins de longueur k dans G . L'étude des K -langages rentre, pour cette raison, dans la catégorie des problèmes de cheminement classiques.

Nous allons montrer maintenant que les problèmes « non classiques » correspondent à certaines classes de grammaires « dépendantes du contexte ».

Considérons sur l'alphabet $V = \{V_a, V_t\}$ un ensemble de règles de production « dépendantes du contexte » de la forme

$$(\Gamma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \varphi A_i \rightarrow f_{ij}(\varphi) A_j, \\ \text{avec} \\ \varphi \in V_t^*, \quad f_{ij}(\varphi) \in V_t^* \quad (\text{règle non terminale}), \\ \bullet \\ \varphi A_i \rightarrow f_i(\varphi), \\ \text{avec} \\ \varphi \in V_t^*, \quad f_i(\varphi) \in V_t^* \quad (\text{règle terminale}), \end{array} \right.$$

où les fonctions f_{ij} et f_i vérifient la condition de non-décroissance du degré $\delta[f_{ij}(\varphi)] > \delta[\varphi]$.

Le graphe G_1 associé à la grammaire (Γ_1) est défini comme précédemment.

On note $L_1 = (V, \Gamma_1)$ le langage engendré par Γ_1 (langage méta-linéaire « dépendant du contexte »; abréviation : MLC). On s'intéresse au problème de la reconnaissance d'un mot de degré k .

L'ensemble $\mathcal{P}(V_t^*)$ muni de l'opération \oplus (union ensembliste) sera pris comme ensemble S . L'élément neutre de \oplus dans S est la partie vide notée \emptyset . \oplus est idempotente. L'état $E_i \in S$ d'un nœud A_i de G_1 représente un ensemble de mots (non terminaux) de la forme

$$\varphi_i A_i \quad \text{où} \quad \varphi_i \in E_i.$$

A chaque arc (A_i, A_j) de G_1 on associe l'endomorphisme h_{ij} défini par

$$h_{ij}(s) = \sum_{\varphi \in s}^{\oplus} f_{ij}(\varphi).$$

Si on suppose que les fonctions f_{ij} vérifient

$$\delta[\varphi] \geq k \Rightarrow f_{ij}(\varphi) = \emptyset \quad (\forall \varphi \in V_t^*)$$

les endomorphismes h_{ij} sont k -stables.

En prenant comme origine le sommet A_{i_0} de G (correspondant à l'axiome) et comme état initial : \emptyset (représentant le mot non-terminal « A_{i_0} »), l'algorithme de Moore généralisé (A 2) peut être utilisé pour reconnaître un mot de degré k de L_1 : en d'autres termes, il constitue un automate acceptant les mots d'un MLC-langage.

Ce qui précède se généralise sans difficulté au cas général des MLC-grammaires dont les règles de production seraient de la forme

$$\varphi A_i \psi \rightarrow f_{ij}(\varphi) A_j g_{ij}(\psi).$$

REMERCIEMENTS

Je remercie M. Michel Gondran pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues sur le sujet de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. C. BACKHOUSE et B. A. CARRE, *Regular Algebra Applied to Path Finding Problems*, Inst. Math. Appl., 1975 (à paraître).
2. R. BELLMAN, *On a Routing Problem*, Quart. Appl. Math., 16, 1958.
3. C. BENSAKEN, *Structures algébriques des cheminements : pseudo-treillis gerbier de carré nul*, Network and switching Theory, G. BIORCI (ed.), Academic Press, 1968, p. 40-47.
4. C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
5. B. A. CARRE, *An Algebra for Network Routing Problems*, J. Inst. Maths. Applics., 7, 1971, p. 273-294.
6. K. L. COOKE et E. HALSEY, *The Shortest Route Through a Network with Time-Dependent Internodal Transit Times*, J. Math. Anal. and Appl., 14, 1966, p. 493-498.
7. G. B. DANTZIG, *All Shortest Routes in a Graph*, Théorie des graphes, Rome, 1966, Dunod, 1967, p. 91-92.
8. G. B. DANTZIG, W. O. BLATTNER et M. R. RAO, *All Shortest Routes from a Fixed Origin in a Graph*, in Théorie des graphes, Rome, 1966; Dunod, Paris, 1967, p. 85-90.
9. E. W. DIJKSTRA, *A Note on Two Problems in Connexion with Graphs*, Numerische Mathematik, 1, 1959, p. 269-271.
10. S. E. DREYFUS, *An Appraisal of Some Shortest Path Algorithms*, Operations Research, 17, n° 3, p. 395-412.
11. B. A. FARBEY, A. H. LAND et J. D. MURCHLAND, *The Cascade Algorithm for Finding all Shortest Distances in a Directed Graph*, Management Science, 14, n° 1, 1967, p. 19-28.
12. R. W. FLOYD, *Algorithm 97 : Shortest Path*, Communication of A.C.M., 5, 1962, p. 345.
13. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Flows in Networks*, Princeton Univ. Press., 1962.
14. M. GONDRAN, *Problèmes combinatoires et programmation en nombres entiers*, Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Paris VI, 17 avril 1974.
15. M. GONDRAN, *Algorithmes gloutons*, Bulletin des Études et Recherches E.D.F., Série Mathématiques, n° 2 1975.
16. M. GONDRAN, *Algèbre des chemins et algorithmes*, Programmation Combinatoire, B. ROY, éd. (Reidel) 1975.
17. M. GONDRAN, *Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe*, Note de la Direction des Études et Recherches de l'E.D.F., HI 1137/02, 29 mars 1973, édition du 9 juillet 1973, R.A.I.R.O., V-1, 1975.
18. M. GONDRAN, *Communication orale*, octobre 1974.
19. J. GRASSIN et M. MINOUX, *Variations sur un algorithme de Dantzig. Application à la recherche des plus courts chemins dans les grands réseaux*, R.A.I.R.O., V-1 1973, p. 53-62.

juin 1976.

20. J. HALPERN et I. PRIESS, *Shortest Path with Time Constraints on Movement and Parking*, Networks, 4, 1974, p. 241-253.
21. T. C. HU, *The Maximum Capacity Route Problem*, Operations Research, 9, 1961, p. 898-900.
22. T. C. HU, *Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths*, S.I.A.M., J. Appl. Math., 15, n° 1, 1967.
23. H. C. JOCKSCH, *The Shortest Route Problem with Constraints*, J. Math. Anal. Appl., 14, 1966, p. 191-197.
24. A. KAUFMAN et Y. MALGRANGE, *Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe*, R.A.I.R.O., 7, n° 26, 1963, p. 61-73.
25. E. MINIEKA, *On Computing Sets of Shortest Paths in a Graph*, Comm. A.C.M., 1974, V. 17, n° 6, p. 351-353.
26. E. MINIEKA et D.R. SHIER, *A Note on an Algebra for the k Best Routes in a Network*, J. Inst. Math. Appl., 11, 1973, p. 145-149; (a) M. MINOUX, *Graphes sans circuits, programmation dynamique généralisée et applications* (à paraître); (b) M. MINOUX, *Plus courts chemins avec contraintes*, Ann. Télécom. 30, n° 11-12, 1975; (c) E.F. MOORE, *The shortest path through a maze*, Proc. Int. Symp. Theory of Switching, part II, 1957, p. 285-292.
27. V. PETEANU, *An Algebra of the Optimal Path in Networks*, Mathematica, 9, 1967, n° 2, p. 335-342.
28. P. ROBERT et J. FERLAND, *Généralisation de l'algorithme de Warshall*, R.A.I.R.O., n° 7, 1968, p. 71-85.
29. B. ROY, *Chemins et circuits : énumération et optimisation*, Programmation Combinatoire, B. ROY éd., 1975, Reidel.
30. B. ROY et D. GALLAND, *Énumération des chemins ε -minimum admissibles entre deux points*, R.A.I.R.O., V-3, 1973, p. 3-20.
31. I. TOMESCU, *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*, C. R. Acad. Sc., Paris, 263, série A, 1966, p. 826-829.
32. J. Y. YEN, *Finding the k Shortest Loopless Paths in a Network*, Management Science, 17, n° 11, 1971, p. 712-716.