Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Ioan Tomescu

Un algorithme pour l'obtention d'une chaîne Hamiltonienne en partant de l'arbre minimal d'un graphe

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, n° V3 (1975), p. 5-12

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_3_5_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, octobre 1975, V-3, p. 5 à 12)

UN ALGORITHME POUR L'OBTENTION D'UNE CHAÎNE HAMILTONIENNE EN PARTANT DE L'ARBRE MINIMAL D'UN GRAPHE (*)

par Ioan TOMESCU (1)

Résumé. — *Dans cet article on donne un algorithme heuristique pour obtenir une chaîne hamiltonienne minimale en partant d'un arbre minimal et on prouve que si toutes les longueurs des arêtes d'un graphe sont positives, alors la matrice des distances directes et la matrice des distances minimales admettent les mêmes arbres minimaux.*

Tous les graphes considérés ici sont graphes finis, non orientés et connexes, qui admettent donc des arbres partiels. Parmi les algorithmes qui conduisent à la chaîne hamiltonienne minimale se trouve l'algorithme de N. Christofides [1], qui produit la chaîne hamiltonienne minimale qui a les extrémités fixées. Cela permet de résoudre tout problème de parcours hamiltoniens optimaux, grâce à l'équivalence (du point de vue de la résolution) des problèmes suivants : 1° chaîne hamiltonienne minimale; 2° cycle hamiltonien minimal; 3° chaîne hamiltonienne minimale ayant une extrémité ou toutes les deux extrémités fixées ou soumises à la condition d'appartenir à un ensemble donné de sommets du graphe ([1], [2], [3]).

L'idée de l'algorithme de Christofides est celle de partir de l'arbre minimal et produire une séquence d'arbres minimaux, associés à des matrices de distances qui conservent la chaîne hamiltonienne minimale avec les extrémités fixées, jusqu'à l'obtention d'un arbre qui a seulement des sommets de premier ou de deuxième degré, c'est-à-dire jusqu'à l'obtention de la chaîne hamiltonienne cherchée [1].

La convergence de cet algorithme vers la solution optimale n'est pas assurée. Les arbres obtenus successivement peuvent s'approcher d'une chaîne hamiltonienne, c'est-à-dire ils peuvent contenir un nombre petit de sommets de

(*) Reçu décembre 1974.

(1) Faculté de Mathématiques et de Mécanique, Université de Bucarest, Roumanie.

degré supérieur à 2, et puis s'éloigner d'une chaîne hamiltonienne. Pour éviter cette situation et pour obtenir une chaîne hamiltonienne en partant d'un arbre partiel qui n'est pas une chaîne hamiltonienne, nous proposons un algorithme qui produit à chaque pas la minimisation de la croissance de la longueur de l'arbre.

Évidemment de cette façon l'algorithme ne produit pas nécessairement la chaîne hamiltonienne minimale, mais produit une « bonne » solution.

Supposons le graphe G complet ayant une matrice carrée A des distances directes entre les sommets de G, c'est-à-dire a_{ij} représente la longueur de l'arête $[i, j]$ de G. Pour justifier l'algorithme, observons d'abord que un arbre partiel de G, qui n'est pas une chaîne hamiltonienne, peut être transformé dans un arbre partiel qui contient des sommets avec des degrés plus petits, par les opérations suivantes :

01. On relie deux sommets pendants (de degré 1) x et y par une arête $[x, y]$. Par cette opération apparaît un cycle unique dans le graphe. Sur ce cycle il y a au moins un sommet z de degré $d(z) \geqq 3$, parce qu'au cas contraire l'arbre partiel initial était une chaîne hamiltonienne, ce qui contredit notre hypothèse. Nous supprimons de ce cycle une arête $[v, z]$, incidente à un sommet z de degré supérieur à 2, le graphe obtenu étant aussi un arbre qui a un ou deux sommets de degré supérieur à 2, pour lesquels le degré décroît avec une unité, sans apparaître de nouveaux sommets de degré supérieur à 2.

02. Un sommet pendant y, relié à un sommet x avec le degré $d(x) \geqq 3$, est intercalé entre deux sommets, z et t, qui sont reliés par une arête, ainsi que les degrés des sommets z et t soient tout au plus égaux à 2. Pour cela, on supprime les arêtes $[x, y]$ et $[z, t]$ et on ajoute les arêtes $[y, z]$ et $[y, t]$.

03. Un sommet v qui n'est pas pendant, relié à un sommet x avec $d(x) \geqq 3$, est relié à un sommet pendant y qui n'appartient pas à la même composante connexe que v, composante obtenue par la suppression de l'arête $[x, v]$. Puis on supprime l'arête $[x, v]$ et on obtient aussi un arbre. Dans le premier cas la croissance de la longueur de l'arbre est égale à $a_{x,y} - a_{v,z}$, dans le deuxième elle est égale à $a_{y,z} + a_{y,t} - a_{x,y} - a_{z,t}$, et dans le troisième cas elle est égale à $a_{v,y} - a_{x,v}$.

Observons que dans tous les cas parmi les sommets de l'arbre de degré supérieur ou égal à 3, au moins le degré d'un sommet décroît avec une unité et le degré d'aucun sommet ne croît.

Après l'itération de ce procédé nous obtenons un arbre qui a seulement des sommets de degré égal à 1 ou à 2, donc qui est une chaîne hamiltonienne. Pour avoir une longueur petite de la chaîne hamiltonienne, il est bien de choisir les transformations successives sur l'arbre ainsi qu'on minimise, à chaque pas, la croissance de la longueur de l'arbre. Par conséquence, nous procédons comme suit :

1) Soient $y_1, y_2, \ldots, y_p$ les sommets pendants de l'arbre. Chaque sommet y_i sera relié à tous les sommets y_j avec $j > i$. Pour un j fixé, nous choisirons la plus longue arête qui se trouve sur la chaîne qui relie y_i avec y_j, qui est incidente à un sommet de degré supérieur à 2, puis nous trouverons la croissance de la longueur correspondante à l'élimination de cette arête par l'opération 01.

Pour chaque sommet pendant nous calculons la croissance minimale de la longueur de l'arbre, correspondante à l'application de l'opération 01 pour ce sommet et les autres sommets pendants d'indice plus grand.

2) Pour tous les sommets pendants y, qui se relient à des sommets de degré plus grand que 2, nous obtenons le minimum de la croissance de la longueur de l'arbre par l'opération 02.

3) Pour tous les sommets v qui ne sont pas pendants et qui se relient à des sommets x, de degré plus grand que 2, nous déterminons le minimum de la croissance de la longueur de l'arbre par l'opération 03.

4) Parmi les minimums calculés aux points 1), 2) et 3) nous choisirons la plus petite valeur.

S'il existe plusieurs sommets qui réalisent la même valeur minimale, nous choisirons la transformation qui produit la décroissance du degré des deux sommets de degré supérieur à 2, respectivement avec une unité (le nombre maximal).

Nous appliquons cette transformation, qui minimise la croissance de la longueur de l'arbre, du type 01, ou 02, ou 03. Si l'arbre obtenu a seulement des sommets de premier ou de deuxième degré, c'est-à-dire s'il est une chaîne hamiltonienne, fin. Sinon, on passe au point 1).

Appliquons cet algorithme heuristique pour le graphe complet G à six sommets $x_1, x_2, \ldots, x_6$, ayant la matrice suivante des longueurs des arêtes :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	14	27	15	20	15
x_2	14	0	18	3	6	2
x_3	27	18	0	15	17	18
x_4	15	3	15	0	1	4
x_5	20	6	17	1	0	4
x_6	15	2	18	4	4	0

L'arbre minimal, obtenu à l'aide de l'algorithme de Kruskal, est dessiné dans la figure 1, avec les sommets pendants x_1, x_3, x_5, x_6.

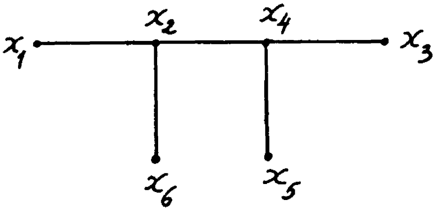

Figure 1

On obtient ainsi le minimum de la croissance de la longueur de l'arbre par l'opération 01 :

Pour x_1 : on ajoute l'arête $[x_1, x_6]$ et on élimine l'arête $[x_1, x_2]$. La croissance de la longueur : 1.

Pour x_3 : on ajoute l'arête $[x_3, x_5]$ et on élimine l'arête $[x_3, x_4]$.

La croissance de la longueur : 2.

Pour x_5 : on ajoute l'arête $[x_5, x_6]$ et on élimine l'arête $[x_2, x_4]$.

La croissance de la longueur : 1. On ne peut pas appliquer l'opération 02, parce qu'il n'existe pas d'arêtes ayant toutes les deux extrémités de degré inférieur ou égal à 2. Pour appliquer l'opération 03 il est nécessaire de rechercher seulement les sommets x_2 et x_4.

Pour x_2 le minimum des croissances est atteint si l'on ajoute l'arête $[x_2, x_5]$ et on élimine l'arête $[x_2, x_4]$, avec la croissance de la longueur égale à trois unités.

Pour x_4 le minimum des croissances est atteint si l'on ajoute l'arête $[x_4, x_6]$ et on élimine l'arête $[x_2, x_4]$, avec la croissance de la longueur égale à une unité.

Nous voyons que dans trois cas la croissance est minimale, égale à une unité. Dans deux cas un seul sommet de degré supérieur à 2 a son degré réduit avec une unité et dans le troisième cas deux sommets de degré supérieur à 2 ont leur degré réduit avec une unité. Nous choisirons ce dernier cas, c'est-à-dire l'inclusion de l'arête $[x_5, x_6]$ et la suppression de l'arête $[x_2, x_4]$, ce qui nous donne la chaîne hamiltonienne minimale $[x_1, x_2, x_6, x_5, x_4, x_3]$ avec une longueur égale à 36 unités.

Cette chaîne est minimale parce que l'arbre minimal (qui est unique) a une longueur de 35 unités et il n'est pas une chaîne hamiltonienne, donc toute chaîne hamiltonienne a une longueur plus grande ou égale à 36, les longueurs des arêtes étant nombres entiers.

Évidemment le nombre de pas de cet algorithme est majoré par

$$\sum_{x \mid d(x) \geqq 3} (d(x)-2).$$

Cet algorithme a été programmé en FORTRAN IV avec 437 instructions pour l'ordinateur IBM 360/30 du Centre de Calcul de l'Université de Bucarest par M. Anton Bătătorescu. Ont été résolus sept exemples de graphes ayant chacun douze sommets en 3 mn 53 s, avec une erreur maximale par rapport à la solution optimale de 5 %.

Mais on peut construire un exemple de graphe complet à huit sommets pour lequel la différence entre les longueurs de la solution optimale et de la solution obtenue à l'aide de l'algorithme heuristique présenté ici est arbitrairement large, si l'on choisit des valeurs convenables pour les longueurs des arêtes. Ce graphe a la propriété que les matrices A et A^* sont différentes, où A^* est la matrice des distances minimales entre les sommets du graphe. Pour résoudre un problème de chaîne (ou cycle) hamiltonienne minimale il est bien de partir de la matrice A^* des longueurs minimales entre les sommets du graphe, parce que au cas contraire il est possible que le parcours minimal qui passe par tous les sommets du graphe ne soit pas hamiltonien, comme l'on voit dans la figure 2.

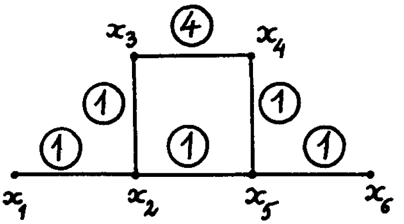

Figure 2

Si l'on suppose que les arêtes non dessinées ont une longueur grande, la chaîne hamiltonienne minimale est $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ de longueur égale à huit unités. Mais la chaîne $[x_1, x_2, x_3, x_2, x_5, x_4, x_5, x_6]$ atteint aussi tous les sommets du graphe, n'est pas hamiltonienne et a une longueur égale à sept unités. Dans les problèmes pratiques nous sommes intéressés de trouver un parcours de longueur minimale qui passe par tous les sommets du graphe, donc la matrice initiale des longueurs sera la matrice A^*. La matrice des distances minimales A^* vérifie la condition de transitivité, c'est-à-dire

$$a_{ij}^* \leqq \min_k (a_{ik}^* + a_{kj}^*) \quad \text{pour tout } i, j$$

et cette condition nous assure l'existence d'une chaîne de longueur minimale qui passe par tous les sommets du graphe et qui soit hamiltonienne.

En effet, soit $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_j, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_p}, x_j, x_{i_{p+2}}, \ldots, x_{i_q})$ une chaîne minimale qui passe par tous les sommets du graphe et qui visite le sommet x_j deux fois. Si l'on remplace les arêtes $[x_{i_p}, x_j]$ et $[x_j, x_{i_{p+2}}]$ de cette chaîne par l'arête $[x_{i_p}, x_{i_{p+2}}]$, de longueur plus petite ou égale à la somme des longueurs des deux arêtes supprimées, parce qu'on a :

$$a^*_{i_p, i_{p+2}} \leqq a^*_{i_p, j} + a^*_{j, i_{p+2}}$$

on obtient une nouvelle chaîne qui passe par tous les sommets du graphe, de longueur plus petite ou égale que la chaîne initiale.

De cette manière, par l'itération de ce procédé, on peut obtenir au moins une chaîne minimale qui passe par tous les sommets et qui soit hamiltonienne pour un graphe pour lequel la matrice des longueurs est transitive. La proposition suivante nous montre que les matrices A et A^* admettent les mêmes arbres partiels minimaux, au cas où toutes les longueurs des arêtes sont différentes de zéro.

Proposition : *Pour un graphe connexe G avec la matrice des distances directes A, les arbres partiels minimaux de A coïncident avec les arbres partiels minimaux correspondants à la matrice des distances minimales A^*, si $a_{ij} > 0$ pour tout $i \neq j$.*

Démonstration : En utilisant le théorème de B. Roy ([4], [5]) la matrice A^* peut être obtenue en partant de la matrice A d'ordre n par $n(n-1)(n-2)$ opérations élémentaires qui consistent chacune dans le remplacement de l'élément a_{ij} par $\min(a_{ij}, a_{ik} + a_{kj})$ pour des différents indices i, j, k. Nous démontrerons qu'à chaque pas l'ensemble des arbres partiels minimaux du graphe reste inchangé. Nous notons la matrice obtenue de A par cette transformation par $T_{ij}^{(k)}(A)$.

Si $a_{ij} \leqq a_{ik} + a_{kj}$, alors évidemment $T_{ij}^{(k)}(A) = A$ et la propriété est prouvée. Au cas contraire $a_{ij} > a_{ik} + a_{kj}$. D'abord nous démontrons que l'arête $[i, j]$ n'appartient à aucun arbre partiel minimal du graphe avec la matrice des longueurs A.

Au cas contraire, tout arbre minimal ne peut pas contenir tous les deux arêtes $[i, k]$ et $[k, j]$ parce qu'il contient en ce cas un cycle à trois sommets. Si un arbre minimal contient par exemple les arêtes $[i, j]$ et $[i, k]$ nous appliquons la transformation a, qui consiste dans le remplacement de l'arête $[i, j]$ par $[j, k]$ dans cet arbre, en obtenant aussi un arbre (il est connexe et sans cycle, parce que le nouveau nombre cyclomatique est égal à 0). L'arbre ainsi obtenu a une longueur plus petite, parce que $a_{ij} > a_{jk}$, ce qui n'est pas possible, donc un arbre partiel minimal ne peut pas contenir $[i, j]$ et l'une des arêtes $[i, k]$ et $[k, j]$.

Supposons maintenant qu'il y a un arbre minimal relatif à la matrice A qui contient l'arête $[i, j]$ et ne contient pas les arêtes $[i, k]$ et $[k, j]$. Nous appliquons la transformation b, qui consiste dans la suppression de $[i, j]$, qui sera remplacée par $[i, k]$ et $[k, j]$.

On obtient ainsi un graphe connexe ayant son nombre cyclomatique égal à 1. Ce graphe contient un cycle et par la suppression d'une arête de ce cycle on obtient un nouvel arbre ayant la longueur inférieure à la longueur de l'arbre minimal, parce que $a_{ij} > a_{ik} + a_{kj}$, ce qui n'est pas possible. Donc nous avons démontré que l'arête $[i, j]$ n'appartient à aucun arbre partiel minimal relatif à la matrice des distances A.

Nous démontrons maintenant que l'arête $[i, j]$, la seule qui a changé la longueur, n'appartient à aucun arbre partiel minimal relatif à la matrice des distances $T_{ij}^{(k)}(A)$.

Supposons le contraire : l'arête $[i, j]$ appartient à un arbre minimal du graphe associé à la matrice $T_{ij}^{(k)}(A)$. Si cet arbre contient aussi l'une des arêtes $[i, k]$ et $[k, j]$, soit $[i, k]$, alors par la transformation a on obtient un arbre partiel relatif à la matrice $T_{ij}^{(k)}(A)$ de longueur plus petite que la longueur de l'arbre minimal parce que $a_{jk} > 0$, ce qui n'est pas possible.

Si l'arbre minimal ne contient pas les arêtes $[i, k]$ et $[k, j]$, alors par la transformation b on obtient un arbre de longueur plus petite que celle de l'arbre minimal, parce que la longueur de l'arête supprimée sur le nouveau cycle est strictement positive.

Donc tout arbre minimal relatif à la matrice $T_{ij}^{(k)}(A)$ ne contient pas l'arête $[i, j]$. Mais les matrices A et $T_{ij}^{(k)}(A)$ sont différentes éventuellement sur la position (i, j), donc si $a_{ij} > 0$ pour tout $i \neq j$, l'ensemble des arbres minimaux pour le graphe associé à la matrice A est le même que l'ensemble des arbres minimaux pour le graphe associé à la matrice $T_{ij}^{(k)}(A)$. Par l'itération de ce raisonnement on obtient que les matrices A et A^* ont les mêmes arbres partiels minimaux si toutes les longueurs des arêtes sont positives.

C. Q. F. D.

Si le graphe a quelques arêtes de longueur nulle ce résultat peut être contredit. En effet, le graphe complet à trois sommets K_3 qui a deux arêtes de longueur nulle et une autre arête de longueur positive admet un arbre partiel minimal, en temps que le graphe K_3 qui a trois arêtes de longueur nulle (les distances minimales du premier graphe) admet trois arbres partiels minimaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Christofides, *The shortest Hamiltonian chain of a graph*, S.I.A.M. J. Appl. Math., 19, 1970, p. 689-696.

[2] A. Kaufmann, *Introduction à la combinatorique en vue des applications*, Dunod, Paris, 1968.

[3] T. B. Boffey, *A note on minimal length Hamilton path and circuit algorithms*, Oper. Res. Quart., 24, n° 3, 1973, p. 437-439.

[4] B. Roy, *Transitivité et connexité*, C. R. Acad. Sc., Paris, série A, 249, 1959, p. 216-218.

[5] I. Tomescu, *Sur l'algorithme matriciel de B. Roy*, R.A.I.R.O., 2, n° 7, 1968, p. 87-91.