Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

J. P. Uhry

# Sur le problème du couplage maximal

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 9, nº V3 (1975), p. 13-20

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_3_13_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, octobre 1975, V-3, p. 13 à 20)

# SUR LE PROBLÈME DU COUPLAGE MAXIMAL (*)

par J. P. UHRY (1)

Résumé. — *Sur le problème du couplage maximal, on étudie un algorithme basé sur les propriétés des solutions optimales (en variables continues) du programme linéaire associé. Le dernier théorème établit le lien étroit existant entre une solution optimale particulière et un couplage maximal (solution optimale en nombres entiers), ce qui constitue une propriété remarquable du problème.*

Les définitions non données ici sont dans [1].

Soit un graphe simple non orienté $G = (X, E)$ où $X$ représente l'ensemble des sommets $[n = \text{card}(X)]$ et $E$ l'ensemble des arêtes $[m = \text{card}(E)]$. On appelle couplage un ensemble d'arêtes $C$ tel qu'il y ait au plus une arête de $C$ incidente à tout sommet de $G$. On appelle couplage maximal un couplage de cardinalité maximale. Soit $A$ la matrice d'incidence aux arêtes de $G$.

Le problème de la recherche d'un couplage maximal dans $G$ peut être formulé comme le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} Ax \leqq 1, \qquad x_i = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = z\,(\text{Max}). \end{cases}$$

Il est clair que les arêtes correspondant aux variables $x_i$ qui valent 1 dans une solution optimale de (P) forment un couplage maximal. Associons à (P) le programme linéaire

$$\text{(PL)} \qquad \begin{cases} Ax \leqq 1, \qquad x \geqq 0, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = z\,(\text{Max}). \end{cases}$$

(*) Reçu juin 1974.
(1) Attaché C.N.R.S., Université I de Grenoble.

L'algorithme du simplexe se réduit pour ce programme linéaire à un algorithme de marquage très rapide [4]. Nous donnons en annexe une procédure, inspirée de l'algorithme d'Edmonds [2], qui permet également de résoudre (PL) par marquage de manière très efficace.

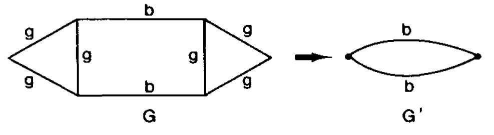
Le programme (PL) possède, entre autres, la propriété que pour toute solution de base $\bar{x}$ les variables d'écart valent 0 ou 1 $\left(\text{c'est-à-dire que } \sum_{i=1}^{m} A_j^i x_i = 0 \text{ ou } 1\right)$ et que $\bar{x}_i = 1, 1/2$ ou 0 [3]. On dira que les arêtes correspondantes sont respectivement noires, grises et blanches. Les arêtes grises forment des cycles impairs (évidemment disjoints) qu'on appellera *cycles libres*.

On appellera *sommet saturé* un sommet incident à une arête noire ou à deux arêtes grises. Un sommet non saturé est dit *libre*; toutes les arêtes incidentes à un sommet libre sont blanches. A toute solution de base $\bar{x}$ de (PL) on associe $p(\bar{x})$ nombre de sommets libres, $q(\bar{x})$ nombre de cycles libres et on posera $r(\bar{x}) = p(\bar{x}) + q(\bar{x})$.

L'objet de cette note est de mettre en évidence la parenté entre certaines solutions optimales de (PL) et les solutions optimales de (P) et d'utiliser cette parenté dans un algorithme de construction d'un couplage maximal.

**Réduction du graphe $G$ par rapport à une solution de base $\bar{x}$ de (PL)**

On appellera graphe réduit $G'$ par rapport à $\bar{x}$, le graphe obtenu à partir de $G$ en contractant les cycles libres de $G$ en des sommets et en supprimant toutes les arêtes grises




**Lemme 1 :** $\bar{x}$ induit sur le graphe $G'$ une solution entière $x'$ telle que

$$p(x') = r(x') = r(\bar{x}).$$

*Démonstration :* Tous les cycles libres sur $G$ deviennent des sommets libres dans $G'$ les arêtes communes à $C$ et $C'$ gardent la même couleur.

On appellera (PL') l'homologue de (PL) sur $G'$.

**Lemme 2 :** Pour toute solution de base $\bar{x}$ de (PL) on a

$$z(\bar{x}) = \frac{n - p(\bar{x})}{2}.$$

*Démonstration :* Évidente.

**Lemme 3 :** Une solution $\bar{x}$ de (PL) induit sur $G$ un couplage ayant $r(\bar{x})$ sommets libres.

*Démonstration :* Pour obtenir un tel couplage à partir de $\bar{x}$, il suffit d'introduire un sommet libre et un seul dans chaque cycle libre. On parcourt alors le cycle libre à partir de ce sommet en coloriant alternativement les arêtes en blanc et noir.

Ce couplage possède évidemment $r(\bar{x})$ sommets libres.

**Théorème 1 :** Soit une solution optimale $\bar{x}$ de (PL). Si la solution $x'$ induite sur le graphe réduit (comme il est indiqué au lemme 1) est optimale pour le programme (PL′) correspondant, alors tout couplage maximal sur $G$ possède $r(\bar{x})$ sommets libres.

*Démonstration :* La solution $\bar{x}'$ étant entière, elle est aussi solution optimale du problème (P) sur le graphe réduit ($\bar{x}'$ est donc un couplage maximal sur le graphe réduit).

Considérons le couplage $C$ sur $G$ obtenu à partir de $x$ comme il est indiqué dans la démonstration du lemme 3.

Comme $\bar{x}'$ est un couplage maximal sur le graphe réduit, il n'existe pas de chaîne alternée entre ses sommets libres [1]. *A fortiori*, il n'existe pas de chaîne alternée entre sommets libres du couplage $C$ et donc ce couplage est maximal.

On a ainsi exhibé un couplage maximal laissant $r(\bar{x})$ sommets libres mais, d'après le lemme 2, tous les couplages maximaux ont le même nombre de sommets libres ce qui démontre le théorème.

C. Q. F. D.

Pour démontrer le théorème suivant nous utiliserons deux propriétés de l'algorithme de résolution de (PL) (*cf.* annexe).

**Lemme 4 :** Au cours de l'algorithme de résolution de (PL), $r(x)$ décroît.

**Lemme 5 :** Dans la résolution de (PL) les sommet libres constituent une suite décroissante d'ensembles emboîtés.

**Théorème 2 :** Soit une solution optimale $\bar{x}$ de (PL) sur $G$, soit $G'$ le graphe réduit de $G$ par rapport à $\bar{x}$, et soit $\bar{x}'$ la solution optimale de (PL′) obtenue à partir de la solution $x'$ induite par $\bar{x}$ sur $G'$. Alors $\bar{x}'$ induit sur $G$ une solution optimale $\bar{\bar{x}}$ de (PL) telle que

$$r(\bar{\bar{x}}) \leqq r(\bar{x}).$$

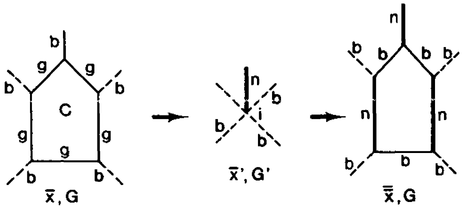
*Démonstration :* Indiquons comment $\bar{x}'$ induit une solution $\bar{\bar{x}}$ sur $G$.

Toutes les arêtes communes à $G$ et $G'$ gardent la même couleur. Seules posent un problème les arêtes de $G$ appartenant à un cycle libre. Soit $i$ un sommet de $G'$ correspondant à un tel cycle $C$ dans $G$.

*a*) Si $i$ est resté un sommet libre pour $\bar{x}'$, alors le cycle correspondant se retrouve en gris dans $\bar{\bar{x}}$ sur $G$.

*b*) $i$ est saturé par une arête noire pour $\bar{x}'$.

Alors comme le montre l'exemple, on part de l'extrémité de l'arête noire appartenant à $C$ et on colorie alternativement les arêtes de $C$ en blanc et noir.



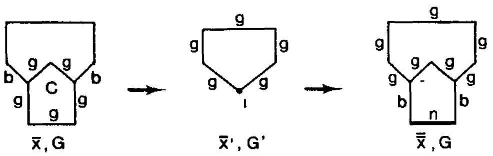

On voit dans ce cas que le cycle libre n'existe plus pour $\bar{\bar{x}}$.

*c*) $i$ appartient à un cycle libre $C'$ de $\bar{x}'$.

Dans ce cas il existe deux arêtes grises incidentes à $i$.

Les extrémités de ces arêtes qui appartiennent à $C$ découpent ce cycle en une chaîne de longueur paire et une chaîne de longueur impaire.

La solution induite sur $G$ s'obtient en laissant grises les arêtes de la chaîne paire et en coloriant les arêtes de la chaîne impaire alternativement en blanc et noir.




Il résulte de *a*, *b*, *c* que les sommets libres de $\bar{x}'$, deviennent des sommets ou des cycles libres de $\bar{\bar{x}}$ et que les cycles libres de $\bar{x}'$ induisent des cycles libres dans $\bar{\bar{x}}$.

On a donc

$$r(\bar{\bar{x}}) = r(\bar{x}'),$$

mais d'après le lemme 4, $r(\bar{x}') \leqq r(x')$ et d'après le lemme 1, $r(\bar{x}') = r(x)$, d'où

$$\boxed{r(\bar{\bar{x}}) \leqq r(\bar{x}).}$$

On voit de plus qu'aucun sommet libre n'étant créé dans $\bar{x}'$, d'après le lemme 5 on a

$$p(\bar{\bar{x}}) \leqq p(\bar{x}),$$

mais il résulte du lemme 2 que $\bar{x}$ étant solution optimale de (PL), $p(\bar{x})$ est minimal donc $p(\bar{\bar{x}}) = p(\bar{x})$ ce qui démontre l'optimalité de $\bar{\bar{x}}$.

*Remarque* 1 : On voit qu'il est impossible de saturer un sommet libre de $G'$ correspondant à un sommet libre de $\bar{x}$. En effet, si cela était, on aurait $p(\bar{\bar{x}}) < p(\bar{x})$ ce qui contredit l'optimalité de $\bar{x}$.

Il n'est donc pas nécessaire de tenir compte des sommets libres de $\bar{x}$ qui peuvent être supprimés dans $G$.

Les théorèmes 1 et 2 vont nous permettre de justifier l'algorithme suivant.

**Algorithme**

(0) Partir d'une solution optimale de (PL) $\bar{x}$ sur $G$.

(1) Poser $G^0 = G$, $x_0 = \bar{x}$, $r_0 = r(x_0)$, $k = 1$.

(2) Soit $G^k$ le graphe réduit de $G^{k-1}$ pour la solution $x_{k-1}$.

(3)
- *a*) Si la solution induite par $x^{k-1}$ sur $G^k$ est optimale aller en (4). Sinon chercher une solution optimale $x_k$ sur $G^k$.
- *b*) Si $r(x_k) < r(x_{k-1})$, reconstituer par application récursive du théorème 2 une nouvelle solution optimale $\bar{x}$ sur $G$ avec $r(\bar{x}) = r(x^k)$ aller en (1).
- *c*) Sinon faire $k = k + 1$; aller en (2).

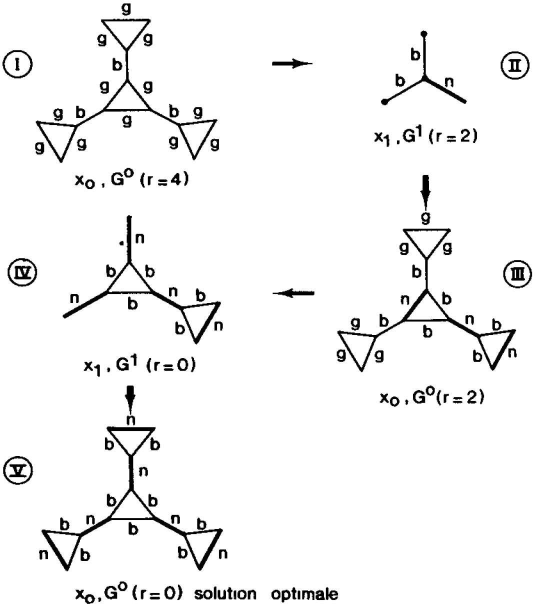
(4) Reconstituer la solution optimale continue sur $G$. Introduire un sommet libre et un seul dans chaque cycle libre pour obtenir un couplage maximal.

**Justification**

En (3) soit $r(x)$ diminue, soit le graphe se réduit. Le nombre de ces opérations étant évidemment limité, on est sûr, au pas *a*), d'aller en (4) une fois.

Quand on arrive au pas (4) la succession des solutions $x_0, \ldots, x_{k-1}$ est telle qu'on ait $r(x_0) = r(x_1) = \ldots = r(x_{k-1})$ et que la solution induite par $x_{k-1}$ sur $G^k$ soit un couplage maximal. On est dans le cas d'application du théorème 1. On sait alors que tout couplage sur $G^{k-1}$, qui laisse $r(x_{k-1})$ sommets insaturés, est maximal. C'est le cas de la solution induite par $x_{k-2}$ puisque $r(x_{k-2}) = r(x_{k-1})$. On peut donc répéter l'argument jusqu'à $x_0$ et $G^0$.

Exemple d'application de l'algorithme :




L'algorithme va nous permettre de démontrer constructivement les deux théorèmes suivants.

**Théorème 3 :** Soit $\bar{x}$ une solution optimale de (PL). Alors il existe un couplage maximal laissant libres les sommets libres de $\bar{x}$.

*Démonstration :* On a vu à la remarque 1 que les sommets libres de $\bar{x}$ ne sont pas saturés quand on cherche l'optimum de (PL) sur le graphe réduit.

Ils ne sont donc jamais saturés dans le cours de l'algorithme et se retrouvent tels quels dans le couplage maximal.

**Théorème 4 :** Soit $\bar{x}$ une solution optimale de (PL) comportant un nombre minimal de cycles libres. Alors le couplage obtenu à partir de $\bar{x}$ en détruisant les cycles libres, comme il est indiqué dans la démonstration du lemme 3, est maximal. Par conséquent tout couplage maximal possède $r(\bar{x})$ sommets libres.

*Démonstration :* A l'issue de l'algorithme, on trouve une solution $\bar{x}$ telle que $r(\bar{x})$ soit minimal, Comme le nombre de sommets libres d'une solution optimale sur $G$ est constant d'après le lemme 1, c'est que le nombre de cycles libres est minimal ce qui démontre le théorème.

C. Q. F. D.

On peut donc décrire l'algorithme proposé comme la recherche d'une solution optimale de (PL) comportant un nombre minimal de cycles libres.

# ANNEXE

## ALGORITHME DE RÉSOLUTION DE (PL)

(0) On part d'une solution de base $x_0$ quelconque. On note $S$ l'ensemble des sommets libres.

(1) Si $S = \varnothing$. Terminer. La solution est optimale.
Sinon choisir $i_0 \in S$. Marquer $i_0$ $(0, +)$. Aller en (2).

(2) Marquer les sommets en utilisant les règles suivantes :

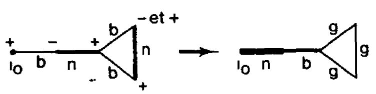
*a*) La deuxième composante du label de $i$ est $+$ et l'arête $(i, j)$ est blanche.
- Si $j$ est non marqué, marquer $j\,(i, -)$.
- Si $j$ est un sommet libre, aller en (3).
- Si la deuxième composante du label de $j$ est $+$, aller en (4).
- Si $j$ appartient à un cycle libre, aller en (5).

*b*) La deuxième composante du label de $i$ est $-$ et l'arête $(i, j)$ est noire.
- Si $j$ est non marqué, marquer $j\,(i, +)$.
- Si la deuxième composante du label de $j$ est $-$, aller en (4).

*c*) Si le processus de marquage est terminé, aller en (6).

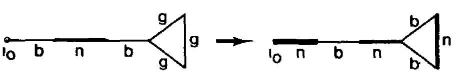
(3) On a détecté une chaîne alternée entre $i_0$ et $j$.
Inverser la couleur des arêtes de la chaîne. Faire $S = S - \{ i_0, j \}$. Aller en (1).

(4) On a détecté un cycle impair relié par une chaîne alternée à $i_0$.
Colorier les arêtes du cycle en gris et inverser les couleurs des arêtes de la chaîne.




Faire $S = S - \{ i_0 \}$. Détruire tous les labels. Aller en (1).

(5) On a détecté une chaîne alternée entre $i_0$ et un cycle libre. Inverser la chaîne et détruire le cycle libre.




Faire $S = S - \{ i_0 \}$. Détruire tous les labels. Aller en (1).

(6) Faire $S = S - \{ i_0 \}$. Effacer du graphe tous les sommets marqués. Aller en (1).

On voit sur cet algorithme que les lemmes 4 et 5 sont vérifiés. En effet, on ne crée jamais de sommets libres ($S$ diminue constamment) et de plus aux pas (3) et (5), $r(x)$ diminue de deux unités et au pas (4) il reste inchangé donc $r(x)$ décroît au cours de l'algorithme.

**Justification de l'algorithme**

Construisons un vecteur $y$ attaché aux sommets de la manière suivante : Chaque fois qu'on passe au pas (6) de l'agorithme, on met à 0 les sommets marqués (+) et à 1 les sommets marqués (—).

A l'issue de l'algorithme tous les sommets qui n'ont pas reçu de valeur sont mis à 1/2.

Le lecteur vérifiera sans peine que le vecteur ainsi obtenu est une solution réalisable du dual de (PL) qui est telle qu'on ait égalité entre la valeur de la solution du primal et celle du dual ce qui démontre l'optimalité.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod.

[2] EDMONDS, *Paths, trees, flowers*, Canad. J. Math., 17.

[3] JOHNSON, *Programming in network on graphs*, ORC 65-1, University of Berkeley, California.

[4] BURLET, *Thèse de 3e cycle*, Université de Grenoble (à paraître).

[5] WITZGALL et ZAHN, *Modifications of edmonds maximal matching algorithm*, J. Res. Nat. Bureau Stand., 69 B, No. 1 et 2.